

В. С. Моисеев

**ДИНАМИКА ПОЛЕТА
И УПРАВЛЕНИЕ БЕСПИЛОТНЫМИ
ЛЕТАТЕЛЬНЫМИ АППАРАТАМИ**

Монография



Казань
2017

Посвящается
100-летию Великой Октябрьской
Социалистической Революции

В.С. Моисеев

**ДИНАМИКА ПОЛЕТА И УПРАВЛЕНИЕ
БЕСПИЛОТНЫМИ ЛЕТАТЕЛЬНЫМИ АППАРАТАМИ**

МОНОГРАФИЯ



**Казань
2017**

УДК 629.7.015(075.8)

ББК 39.56:39.52

М 74

Редактор серии:

В.С. Моисеев – заслуженный деятель науки и техники Республики Татарстан, д-р техн. наук, профессор.

Моисеев В.С.

М 74 Динамика полета и управление беспилотными летательными аппаратами: монография. – Казань: Редакционно-издательский центр «Школа», 2017. 416 с. (Серия «Современная прикладная математика и информатика»).

ISBN 978-5-906935-46-5

Монография посвящена решению актуальной проблемы программирования полетов БЛА при их применении для решения широкого круга военных и гражданских задач.

В рамках решения этой проблемы приводятся классификация современных БЛА, упрощенные уравнения движения при их старте, полете и посадке, методы формирования требуемых траекторий движения БЛА, а также методы синтеза инвариантного относительно конструктивных схем БЛА и прямого управления для БЛА классической самолетной схемы.

Представленные в работе модели и методы сопровождаются значительным числом примеров с расчетным и графическим материалом.

Книга предназначена для специалистов по управлению БЛА, а также для студентов, аспирантов и докторантов соответствующих специальностей.

УДК 629.7.015(075.8)

ББК 39.56:39.52

ISBN 978-5-906935-46-5

© Моисеев В.С., 2017

© РИЦ «Школа», 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА СЕРИИ	5
ВВЕДЕНИЕ	25
Глава 1. СОВРЕМЕННЫЕ БЕСПИЛОТНЫЕ ЛЕТАТЕЛЬНЫЕ АППАРАТЫ	28
1.1. Определение и классификация беспилотных ЛА	30
1.2. Общая характеристика траекторного подхода в задачах динамики полета и управления БЛА	39
1.3. Основные факторы, учитываемые в задачах динамики полета и управления БЛА	47
Глава 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ПОЛЕТА БЛА	66
2.1. Уравнения управляемых пространственных и плоских движений БЛА самолетных схем в геодезических (прямоугольных) координатах	66
2.2. Уравнения движения БЛА самолетных схем в географических координатах	85
2.3. Модели управляемых установившихся режимов полетов БЛА самолетных схем	94
2.4. Уравнения управляемого движения беспилотного вертолета	101
Глава 3. ДИНАМИКА ВЗЛЕТА И ПОСАДКИ БЛА	128
3.1. Взлет БЛА самолетных схем (СС) с мобильных пусковых установок	129
3.2. Аэродромный взлет БЛА СС	150
3.3. Аэродромная посадка БЛА СС	168
3.4. Парашютная посадка БЛА СС	176
3.5. Воздушный старт БЛА СС	193
3.6. Вертикальный взлет и посадка беспилотного вертолета	213

Глава 4. МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ ТРЕБУЕМЫХ СКОРОСТЕЙ И ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ БЛА	221
4.1. Определение требуемых скоростей полета БЛА	222
4.2. Плоские траектории движения БЛА	237
4.3. Пространственные траектории движения БЛА	275
Глава 5. СИНТЕЗ КОСВЕННОГО ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОЛЕТАМИ БЛА	313
5.1. Управление движением БЛА самолетных схем по пространственным и плоским траекториям	313
5.2. Управление движением беспилотного вертолета по требуемым пространственным и плоским траекториям	333
Глава 6. ПРЯМОЕ ПРОГРАММНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОЛЕТАМИ БЛА	352
6.1. Управление силой тяги БЛА самолетных схем с турбореактивными и поршневыми двигателями	352
6.2. Управление рулевыми поверхностями БЛА классической самолетной схемы.....	369
6.3. Управление оборотами двигателя и углами установки винтов и стабилизатора беспилотного вертолета	390
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	409
ЛИТЕРАТУРА	411

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА СЕРИИ

В серии книг «Современная прикладная математика и информатика», ориентированных на специалистов в этих областях, а также на студентов, магистрантов, аспирантов, адъюнктов и докторантов соответствующих специальностей, выходит очередная монография, посвящённая математическим моделям динамики полета и управления современными беспилотными летательными аппаратами (БЛА). Полученные в ней результаты могут быть использованы в практике формирования программного управления различных видов БЛА самолетных и вертолетных схем и учебном процессе подготовки специалистов соответствующих направлений, связанных с различными аспектами применения беспилотной авиационной техники.

В течение 2004-2016 г.г. в этой серии опубликованы следующие работы:

1. Моисеев В.С., Козар А.Н. Основы теории применения управляемых артиллерийских снарядов. Казань: Изд-во КВАКУ, 2004.

Рассмотрена теория применения управляемых артиллерийских снарядов, даны модели и методы их оптимального планирования. Особое внимание уделяется методам преодоления управляемыми артиллерийскими снарядами зон активной защиты целей и планированию одновременного удара по цели несколькими управляемыми артиллерийскими снарядами.

Книга может быть полезна как для слушателей и курсантов высших военных учебных заведений, так и для работников научно-исследовательских институтов.

2. Медведев В.И. Программирование на C++, C++.NET и C#. Казань: Мастер Лайн, 2005.

Излагаются основные понятия и методика разработки объектно-ориентированных программ на языках C++, C++.NET и C# с исполь-

зованием библиотеки классов Framework .NET платформы. Особое внимание уделено разработке Windows приложений из потоковых объектов и компонентов.

Монография предназначена для студентов вузов по направлению вычислительная техника и информатика, а также для всех, владеющих языком программирования С и желающих освоить .NET технологию программирования.

3. Зайдуллин С.С., Моисеев В.С. Математические модели и методы управления территориально распределёнными системами. Казань: Мастер Лайн, 2005.

Рассмотрены теоретические основы управления сложными территориально распределёнными организационно-техническими системами. Решение задач анализа, синтеза и управления такими системами выполняется на основе специальных прикладных информационных технологий.

Монография предназначена для широкого круга инженерно-технических работников, занимающихся вопросами разработки территориально распределённых систем.

4. Медведев В.И. Разработка компонентов и контейнеров на С++.NET и С#. Казань: Мастер Лайн, 2005.

Углублённо рассмотрено построение компонентов, контейнеров и объединение компонентов в контейнере с предоставлением сервисных услуг на базе библиотеки классов .NET Framework.

Монография имеет практическую направленность и предназначена для всех, владеющих объектно-ориентированным программированием на языках С++.NET и С# и желающих освоить программирование .NET компонентов.

5. Рахматуллин А.И., Моисеев В.С. Математические модели и методы оптимизации нестационарных систем обслуживания: монография. – Казань: РИЦ «Школа», 2006.

Рассмотрены теоретические основы оптимизации и адаптивного управления процессами обслуживания в сложных информационных и организационно-технических системах. Применение разработанных математических моделей, методов и алгоритмов иллюстрируется на

практических задачах оптимизации и адаптивного управления функционированием систем обслуживания.

Монография предназначена для широкого круга инженерно-технических работников, занимающихся вопросами исследования и оптимизации нестационарных процессов в сложных системах различного назначения.

6. Медведев В.И. .NET компоненты, контейнеры и удаленные объекты. Казань: РИЦ «Школа», 2006.

Книга посвящена компонентам – основным программным единицам при построении Windows-приложений в .NET технологии. Кроме компонентов и контейнеров, объединяющих компоненты в коллекции, значительное внимание уделено удалённым объектам и событиям, а также разработке использующих их распределённых приложений.

Для студентов и преподавателей вузов по направлению вычислительной техники и информатики. Представляет интерес для всех, знающих основы языков C++.NET и C# и желающих овладеть технологией создания и использования .NET компонентов для распределённых Windows приложений.

7. Козар А.Н., Борзов Г.Е., Рахматуллин А.И., Сотников С.В. Информатика ракетных войск и артиллерии. - Казань: «Отечество», 2006.

Работа посвящена применению современных программных оболочек типа Delphi для создания информационных технологий управления действиями ракетных войск и артиллерии тактического звена.

8. Габитов Р.И., Емалетдинова Л.Ю. Модели и методы разработки автоматизированных систем организационного управления: монография. – Казань: РИЦ «Школа», 2007. – 120 с., ил.

В монографии рассмотрены теоретические основы проектирования унифицированного программного обеспечения автоматизированных систем организационного управления технологическими процессами деятельности специалистов, а также оптимизационные модели, методы и алгоритмы, обеспечивающие эффективное функционирование проектируемой распределенной системы.

Монография предназначена для широкого круга инженерно-технических работников, занимающихся вопросами разработки автоматизированных систем организационного управления.

9. Литвин В.М., Набережнов Г.М., Песошин В.А., Шлеймович М.П. Сжатие данных в системах числового программного управления. монография. – Казань: РИЦ «Школа», 2007. – 108 с.

Монография предназначена для широкого круга научных и инженерно-технических работников и студентов, занимающихся вопросами проектирования и моделирования систем числового программного управления.

10. Валеев М.Ф., Емалетдинова Л.Ю. Автоматизация организационного управления технологическими процессами налогообложения граждан: монография. – Казань: РИЦ «Школа», 2007. – 136 с., ил.

В монографии рассмотрены теоретические основы проектирования программного обеспечения автоматизированных систем организационного управления технологическими процессами налогообложения граждан, а также предлагается методика краткосрочного прогнозирования доходов граждан на основе автоматизированного построения моделей временных рядов.

Монография предназначена для широкого круга инженерно-технических работников, занимающихся вопросами разработки автоматизированных систем организационного управления.

11. Тутубалин П.И., Моисеев В.С. Вероятностные модели обеспечения информационной безопасности автоматизированных систем обработки информации и управления: монография. – Казань: РИЦ «Школа», 2008. – 151 с.

В монографии рассмотрены теоретические и практические основы создания максимально информационно безопасных, с точки зрения вероятностных критериев, автоматизированных систем обработки информации и управления, а так же разработаны подходы и методы повышения эффективности использования средств информационной безопасности.

Монография предназначена для широкого круга инженерно-технических работников, занимающихся вопросами разработки автоматизированных систем специального назначения.

12. Зиновьев П.А., Мейко А.В., Моисеев В.С. Инженерные методы расчета функциональной надежности и живучести корпоративных информационных систем: монография. Казань: Отечество, 2009. – 256 с.

В монографии рассматриваются состав, структура и характеристики корпоративных информационных систем (КИС), обсуждаются их основные показатели надежности и живучести, формулируется постановка задач оценки функциональной надежности и живучести таких систем. Предлагаются математические модели и инженерные методы расчета этих критически важных показателей функционирования КИС.

Монография предназначена для широкого круга специалистов-разработчиков и инженерно-технических работников, занимающихся вопросами проектирования, внедрения и эксплуатации информационных систем корпоративного масштаба, а также оптимизацией режимов их функционирования на всех этапах жизненного цикла. Она может быть полезна также студентам старших курсов ВУЗов, бакалаврам, магистрам и аспирантам соответствующих специальностей.

13. Красильников В.Н., Козар А.Н., Моисеев В.С., Красильников О.В. Переносные комплексы автоматизированного управления огнем артиллерии тактического звена: монография. Казань, Отечество, 2009. – 108 с.

В книге проведен анализ и сравнительная оценка отечественных и зарубежных комплексов автоматизированного управления огнем тактического звена управления. Предложена методика построения перспективного переносного комплекса автоматизированного управления огнем. Дан обзор современных средств управления огнем в тактическом звене, в том числе и компонентов двойного назначения. Представлена методика разработки математического, программного, информационного и методического обеспечения переносного комплекса автоматизированного управления огнем. Рассмотрены пер-

спективы включения переносного комплекса в интегрированную АСУ артиллерии тактического звена. Приведено расчетно-экспериментальное обоснование результатов проведенной работы.

Книга может быть полезна как для слушателей и курсантов высших военных учебных заведений, так и для работников научно-исследовательских институтов Министерства обороны Российской Федерации, занимающихся вопросами разработок и применения АСУ.

14. Борзов Г.Е., Козар А.Н., Моисеев В.С. Применение беспилотных разведывательно-корректировочных вертолетов в перспективных комплексах автоматизированного управления огнем артиллерии тактического звена. Научное издание. Казанское высшее военное командное училище (военный институт), 2009. – 148 с.

В монографии проведен анализ существующих и перспективных разведывательно-огневых комплексов (РОК) артиллерии тактического звена. Приведен анализ существующих и перспективных БЛА вертолетного типа. Предложена общая структура, функции и принципы построения на базе АСУ садн перспективного РОК с применением БРКВ. Описан процесс функционирования РОК. Предложены математические модели и методы разведки, целеуказания и выбора начальных параметров стрельбы управляемых артиллерийских снарядов (УАС) с применением БРКВ. Предложены математические модели и методы управления БРКВ, целеуказания и выбора начальных параметров стрельбы УАС в вертикальной плоскости с использованием БРКВ в режимах «висения», вертикального подъема/снижения и горизонтального полета. Рассмотрены основные принципы, направления и рекомендации по созданию перспективной АСУ садн как среды для применения РОК. Предложена общая ИТ разведки, целеуказания и применения УАС в составе РОК перспективной АСУ садн. Предложена вероятностная оценка эффективности РОК для стрельбы УАС с использованием БРКВ.

Монография может быть использована как для слушателей и курсантов высших военных учебных заведений, так и для работников

научно-исследовательских институтов Министерства обороны Российской Федерации, занимающихся вопросами разработок и применения беспилотных летательных аппаратов.

15. Новикова С.В., Роднищев Н.Е. Основы идентификации динамических систем: монография. Казань: РИЦ «Школа», 2009. – 192 с.

В монографии рассмотрены теоретические и практические основы создания эффективных методов и процедур адаптивной коррекции параметрической динамической системы в условиях неоднородности и неопределенности ее параметров при наличии внешних возмущающих факторов. Приводится разработка методов и процедур идентификации и коррекции управляемых стохастических систем с ограничениями на вектор состояния и параметры.

Монография предназначена для широкого круга инженерно-технических работников, занимающихся вопросами разработки и доводки автоматизированных технических систем.

16. Альмухаметова А.Ф., Моисеев В.С. Математические модели и методы комплексного управления запасами и спросом в территориально-распределенной торговой корпорации: монография. Казань: РИЦ «Школа», 2010. – 170с.

В монографии рассмотрена проблема управления основной деятельностью территориально-распределенной торговой корпорации, сформулированы основные задачи комплексного управления запасами и спросом. Разработаны математические модели, методы, алгоритмы и прикладная информационная технология, обеспечивающие решение и реализацию представленных в работе задач.

Монография предназначена для широкого круга инженерно-технических работников, занимающихся вопросами математического моделирования процессов оптимального управления запасами и спросом в логистике, а также разработкой и развитием корпоративных информационных систем в крупных торговых корпорациях. Книга может быть полезна студентам и аспирантам соответствующих специальностей.

17. Моисеев В.С., Гущина Д.С., Моисеев Г.В. Основы теории создания и применения информационных беспилотных авиационных комплексов: монография. – Казань: РИЦ «Школа», 2010. - 189с., ил.

В монографии рассмотрены основы прикладной теории создания на этапе аналитического проектирования и применения беспилотных авиационных комплексов, решающих задачи информационного обеспечения. Приводится научно-методический аппарат для выбора оптимальных проектных и эксплуатационных параметров таких комплексов.

Монография рассчитана на широкий круг специалистов, связанных с разработкой и эксплуатацией беспилотных авиационных комплексов, а также для студентов и аспирантов, специализирующихся в этой области.

18. Ризаев И.С., Рахал Я. Интеллектуальный анализ данных для поддержки принятия решений: монография. – Казань: РИЦ «Школа», 2011. - 170с.

Рассматриваются модели и алгоритмы в области интеллектуального анализа данных с использованием технологии Data Mining: классификация, кластеризация, поиск ассоциативных правил, прогнозирование. Методы проектирования хранилищ данных различной архитектуры. Разработка программного комплекса системы поддержки принятия решений.

Монография предназначена для широкого круга научных и инженерно-технических работников, преподавателей и студентов, занимающихся вопросами интеллектуального анализа данных на основе баз и хранилищ данных.

19. Моисеев В.С., Матвеев И.В., Нестерова Л.Е. Модели и методы создания перспективных учебно-тренировочных вертолетов: монография. – Казань: РИЦ «Школа», 2011. - 160с., ил.

В монографии рассмотрены теоретические и практические основы создания перспективных учебно-тренировочных вертолетов на базе существующих образцов, разработан научно-методический аппарат выбора оптимального для модернизации вертолета, и решения

круга задач его модернизации в учебно-тренировочный вариант применения.

Монография предназначена для широкого круга специалистов, занимающихся исследованиями в области разработки цифровых систем управления современных пилотируемых и беспилотных летательных аппаратов вертолетной схемы.

20. Бутузова А.В., Моисеев В.С., Тутубалин П.И. Теоретические основы информатизации службы скорой медицинской помощи: монография. – Казань: РИЦ «Школа», 2011. - 242с., ил.

В монографии изложены результаты оригинальных научных исследований и практические реализации, связанные с актуальной задачей разработки математических моделей и методов информатизации лечебно-профилактических учреждений и защиты персональных данных в них, в частности в работе рассмотрены подходы к информатизации деятельности такой жизненно важной структуры как служба скорой медицинской помощи.

Монография предназначена для широкого круга инженерно-технических работников, занимающихся вопросами разработки автоматизированных систем специального назначения.

21. Горбунов Д.А., Моисеев В.С. Основы прикладной теории неявных математических моделей и методов: монография. – Казань: РЦ МКО, 2012. – 172 с.

В монографии изложены результаты оригинальных научных исследований и практические реализации, связанные с актуальной задачей разработки математических моделей и методов построения и оптимизации неявно заданных функциональных моделей в задачах анализа и синтеза реальных технических систем.

Монография предназначена для широкого круга инженерно-технических работников, занимающихся вопросами разработки автоматизированных систем специального назначения.

22. Иванов К.В., Тутубалин П.И. Марковские модели защиты автоматизированных систем управления специального назначения: монография. – Казань: РЦ МКО, 2012. – 216 с., ил.

В монографии изложены результаты оригинальных научных исследований и практические реализации, связанные с актуальной задачей разработки математических моделей и методов обеспечения информационной безопасности автоматизированных систем управления специального назначения.

В работе рассмотрены подходы по информатизации таких особо важных структур как военные и полевые мобильные автоматизированные системы управления на основе предложенных новых образцов информационного оружия. Анализ защищённости систем, оснащённых новыми образцами информационного оружия, проводится с применением теории вероятностей и марковских процессов.

Монография предназначена для широкого круга инженерно-технических работников, занимающихся вопросами разработки автоматизированных систем специального назначения.

23. Медведев В.И. .NET компонентно-ориентированное программирование. – Казань: РЦ МКО, 2012 – 276 с.: ил

Книга посвящена компонентам. Являясь особыми объектами объектно-ориентированного программирования, объекты компонентов обладают дополнительными свойствами и поведением, позволяющими построение из них надежных программ.

Компонентно-ориентированное программирование рассматривает особенности поведения и взаимосвязи компонентов, предлагая общие правила их построения и использования при разработке надежных и безопасных многокомпонентных программ.

В книге излагаются основы программирования .NET компонентов совместно с контейнерами, существенно облегчающих их совместное применение. Уделено внимание базовым интерфейсам и классам компонентов и контейнеров, а также активно используемым компонентам и асинхронными вызовам и событиям, потокам и их синхронизации, освобождению ресурсов, сериализации объектов, удаленным компонентам.

Изложение сопровождается многочисленными примерами законченных консольных программ и Windows приложений на языках объектно-ориентированного программирования C++/CLI и C#.

Книга завершается разработкой распределенных многокомпонентных приложений с объектами компонентов, объединенных в объекте контейнера на сервере и управляемых клиентом через удаленный компонент. Программы поясняются диаграммами языка UML.

Для студентов и преподавателей вузов по направлению вычислительной техники и информатики. Представляет интерес для всех, знакомым с объектно-ориентированным программированием на языках C# и C++/CLI и желающих овладеть основами технологии .NET компонентно-ориентированного программирования.

24. Козар А.Н., Моисеев В.С. Информационные технологии оптимального применения управляемых артиллерийских снарядов: монография. – РЦ МКО, 2012. – 348 с.

В книге рассмотрена теория применения управляемых артиллерийских снарядов, даны модели и методы их оптимального планирования. Особое внимание уделяется методам преодоления управляемыми артиллерийскими снарядами зон активной защиты целей и планированию одновременного удара по цели неуправляемыми и управляемыми артиллерийскими снарядами. Излагаются модели и методы организации подсвета целей с беспилотных летательных аппаратов. Сделан обзор опубликованных исследований ряда авторов, работающих в области применения управляемых артиллерийских снарядов. Приводится описание перспективного бортового оборудования управляемых артиллерийских снарядов и рассмотрены информационные технологии и их применения.

Книга может быть полезна как для слушателей и курсантов высших военных учебных заведений, так и для работников научно-исследовательских институтов Министерства обороны Российской Федерации, занимающихся вопросами применения управляемых артиллерийских снарядов.

25. Моисеев Г.В., Моисеев В.С. Основы теории создания и применения имитационных беспилотных авиационных комплексов: монография. – Казань: РЦ МКО, 2013. – 207 с., ил.

В монографии рассмотрены основы прикладной теории создания и применения имитационных беспилотных авиационных комплексов.

На основе результатов системного анализа предметной области определены роль и место, особенности проектирования и типовые эпизоды применения комплексов авиационных ложных целей воздушного старта. Рассмотрен типовой состав и функции воздушного пункта управления авиационными ложными целями.

Предложен комплекс математических моделей и методов определения оптимального состава смешанных авиационных группировок, продолжительности их применения, оценки потерь и требуемого количества воздушных пунктов управления. Предложен оригинальный метод формирования законов управления авиационной ложной целью на основе бортовых полетных данных самолета-имитатора.

Приводятся постановки и методы решения основных задач создания авиационных ложных целей, обеспечивающих формирование оптимальных проектных и управленческих решений в процессе их разработки, в том числе при определении проектных параметров системы «самолет-носитель – авиационные ложные цели».

Монография рассчитана на широкий круг специалистов, связанных с разработкой и эксплуатацией беспилотных авиационных комплексов, а также на студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

26. Медведев В.И. Особенности объектно-ориентированного программирования на C++/CLI, C# и Java: 4-е изд., испр. и доп. - Казань: РЦ МКО, 2013. 450 с.: ил.

Излагаются основные понятия и методика разработки объектно-ориентированных программ на языках C++/CLI, C# и Java (J#) с применением пакетов языка Java и библиотеки .NET Framework языков C++/CLI и C#.

Изложение сопровождается многочисленными примерами законченных программ. Программы поясняются диаграммами языка UML.

Особое внимание акцентировано на наиболее сложных для понимания делегатах, событиях уведомлениях, потоках и их синхронизации, преобразовании данных.

Параллельное изложение схожих основных языковых конструкций позволит лучше выявить не только близость и различие языков C++/CLI, C# и Java, но и лучше понять особенности этих языков.

В четвертом издании книги добавлен раздел о данных и их преобразовании, расширены ряд разделов, заменена поэтапно разрабатываемая много объектная программа на более интересную, также содержащую абстрактный класс, множество потоков, событий и уведомлений, наглядно иллюстрирующих особенности написания программ на языках C++/CLI, C# и Java.

Для студентов и преподавателей вузов и специалистов по направлению вычислительной техники и информатики. представляет интерес для всех, знающих язык C и изучающих объектно-ориентированное программирование, а также для тех, кто, овладев языком C++, интересуется особенностями и отличиями программирования на языках C++/CLI, Java и C#.

27. Моисеев Г.В. Методы параллельных вычислений: учебное пособие. Казань: РЦ МКО, 2013. 117 с.

Приводятся принципы построения параллельных вычислительных систем, модели и методы анализа параллельных вычислений, методы оценки коммуникационной трудоемкости параллельных алгоритмов и принципы их разработки.

Предназначено для бакалавров техники и технологии по направлению 230100.62 – «Информатика и вычислительная техника».

28. Гимадеев Р.Г., Моисеев В.С., Арутюнова Н.К. Обратные задачи управления беспилотными летательными аппаратами артиллерийской разведки: монография. – Казань: РЦ МКО, 2013. – 245 с.

На основе результатов системного анализа предметной области определены требования, предъявляемые к беспилотным летательным аппаратам артиллерийской разведки, и разработана их классификация. Предложена структура и функции беспилотных авиационных комплексов ближней, средней и дальней артиллерийской разведки. Рассмотрены вопросы эксплуатации таких комплексов.

Предложены методы расчета характеристик областей обзора наземной поверхности средствами воздушной артиллерийской разведки

– бортовыми оптико-электронными системами и радиолокационными станциями. Сформированы типовые траектории полетов беспилотных летательных аппаратов артиллерийской разведки.

Разработаны методы решения обратных задач управления динамическими системами при наличии ограничений на управления и для случаев, когда число управляющих воздействий больше числа фазовых координат объектов.

Эти методы предложено использовать совместно с типовыми траекториями полетов беспилотных летательных аппаратов артиллерийской разведки для формирования программного управления их реализацией.

Приведены примеры решения задач формирования управлений для поиска и обнаружения различных видов объектов артиллерийской разведки.

Монография рассчитана на широкий круг специалистов, связанных с разработкой и эксплуатацией беспилотных авиационных комплексов, а также на студентов (курсантов) и аспирантов (адъюнктов) соответствующих специальностей.

29. Моисеев В.С. Прикладная теория управления беспилотными летательными аппаратами: монография. – Казань: РЦ МКО, 2013. – 768 с.

Предлагаются определения и классификация существующих и перспективных образцов беспилотной авиационной техники. Рассматриваются основные вопросы организации ее применения. Формулируются базовые положения прикладной теории управления БЛА, ориентированной на ее использование персоналом беспилотных авиационных комплексов различного назначения. Приводятся краткие сведения по математическим основам этой теории и численным методам, применяемым при формировании программного управления БЛА. Предлагаются общие и частные модели управляемого движения БЛА самолетной и вертолетной конструктивных схем.

Для формирования управления БЛА используются методы теории обратных задач динамики управляемого движения, вариационного исчисления и оптимального управления.

Рассматриваются основные подходы к реализации перспективных задач интеллектуального управления БЛА.

Книга предназначена для специалистов по эксплуатации БЛА, разработчиков и испытателей БЛА, а также для студентов, курсантов, аспирантов и докторантов, специализирующихся по направлениям, связанным с управлением различными видами беспилотной авиационной техники.

30. Катасев А.С. Математическое и программное обеспечение формирования мягких экспертных систем диагностики состояния сложных объектов: монография. – Казань: РЦ МКО, 2013. – 200 с.

Рассмотрена проблема формирования баз знаний экспертных систем диагностики сложных объектов. Предложена технология автоматизированного формирования баз знаний на основе мягких вычислений. Разработано математическое и программное обеспечение, эффективность которого показана на примере решения ряда практических задач.

Монография предназначена для широкого круга научных и инженерно-технических работников, занимающихся вопросами формирования баз знаний мягких экспертных диагностических систем.

31. Моисеева Л.Т. Статистические методы в машиностроении: учебное пособие. – Казань: РЦ МКО, 2014. – 103 с.

Приводятся основные понятия классической теории вероятности и математической статистики, основные положения теории малой выборки статистических данных, статистические методы в проектировании, производстве и эксплуатации изделий машиностроения.

Предназначено для студентов технических специальностей.

32. Моисеев В.С. Дискретные линейные математические модели динамических процессов в банковских накоплениях, рыночной экономике, медицине, биологии, здравоохранении и технике: учебное пособие. – Казань: РЦ МКО, 2014. – 146 с.

Приводятся определение и современная классификация математических моделей процессов (объектов). Отмечается слабая распространенность на практике моделей дискретных динамических процессов. Дается краткая характеристика теории разностных уравнений

как математического аппарата построения и использования таких моделей. Подробно рассматриваются свойства и методы решения разностных уравнений 1-го и 2-го порядков. Приводятся примеры их применения при моделировании разнообразных динамических процессов (объектов).

Предназначено для магистрантов и аспирантов соответствующих направлений подготовки и специальностей.

33. Моисеева Л.Т. Применение современных математических методов в технологии машиностроения: монография – Казань: РИЦ «Школа», 2014. – 216 с.

Предлагаются методы оптимизации геометрических параметров, режимов обработки, набора инструментов для обработки изделий машиностроения. Рассматривается двухкритериальная оптимизация механической обработки корпусного изделия. Предлагается применение метода условной оптимизации в технологических процессах. Используются статистические методы для уменьшения доли бракованных изделий в машиностроительном производстве. Используется метод решения задачи коммивояжера в технологии машиностроительных производств.

Книга предназначена для студентов, магистрантов, аспирантов и специалистов по технологии машиностроения.

34. Моисеева Л.Т. Microsoft Office 2007: учебное пособие для лабораторных работ по информатике. – Казань: РИЦ «Школа», 2014. – 66 с.

Приводятся основные отличительные особенности Microsoft Office 2007 в сравнении с Microsoft Office 2003 на примере Word 2007 и Excel 2007.

Предназначено для студентов технических специальностей.

35. Медведева С.В. Проектирование информационных технологий обучения в профессиональной математической подготовке в инженерном образовании: монография. – Казань: РИЦ «Школа». 2014. – 264 с.

Предлагаются методы проектирования компьютерных технологий обучения для математических дисциплин, основным содержанием которых являются математические методы, имеющие сложную

логическую структуру. В основу этих методов полагается подход, использующий многократное применение инвариантов – дидактических, алгоритмических и программных этапов проектирования. Обсуждаются методики применения разработанных технологий обучения.

Книга предназначена для студентов, магистрантов, аспирантов и специалистов по разработке электронных обучающих ресурсов.

36. Моисеев В.С. Основы теории эффективного применения беспилотных летательных аппаратов: монография. – Казань: РИЦ «Школа», 2015. 444 с.

В книге с использованием системного подхода предлагаются основные положения теории эффективного применения БЛА различного назначения. Формулируются и решаются такие задачи теории как оптимизация потребного числа БЛА, организации процессов их эффективного применения, оптимизация основных режимов полетов БЛА, оптимальное размещение наземных компонентов беспилотных авиационных комплексов (БАК) и оптимизация процессов их перебазирования.

Заключительные главы посвящены задачам управления запасами расходуемых материалов БАК, расчетам числа запасных БЛА и вопросам информатизации процессов применения БЛА.

Представленные в работе задачи сопровождаются значительным числом примеров.

Книга предназначена для специалистов по эксплуатации БЛА, а также для студентов, аспирантов и докторантов соответствующих специальностей.

37. Медведев В.И. Особенности объектно-ориентированного программирования на C++/CLI, C# и Java. 5-е изд., испр. Казань: РИЦ «Школа», 2015. 472.

Излагаются основные понятия и методика разработки объектно-ориентированных программ на языках C++/CLI, C# и Java (J#) с применением пакетов языка Java и библиотеки .NET Framework языков C++/CLI, C#. Изложение сопровождается многочисленными примерами законченных программ. Программы поясняются диаграммами языка UML. Используются среды разработки программ Visual Studio .NET и Eclipse. Особое внимание акцентировано на наиболее сложных для понимания делегатах, событиях, уведомлениях, потоках и их

синхронизации, преобразовании данных. Параллельное изложение схожих основных языковых конструкций позволит выявить не только близость и различие языков C++/CLI, C# и Java, но и лучше понять особенности этих языков. В конце книги разрабатывается многообъектная программа, содержащая абстрактный класс, множество потоков, событий и уведомлений, наглядно иллюстрирующих особенности написания программ на языках C++/CLI, C# и Java.

Для студентов и преподавателей вузов и специалистов по направлению вычислительной техники и информатики.

38. Аникин И.В. Методы оценки и управления рисками информационной безопасности в корпоративных информационных сетях: монография. – РИЦ «Школа», 2015. – 224 с.

Рассмотрена проблема оценки и управления рисками информационной безопасности в корпоративных информационных сетях. Предложены методы решения соответствующих задач на основе экспертных оценок и методов теории нечетких множеств. Рассмотрены примеры решения данных задач.

Монография предназначена для широкого круга научных и инженерно-технических работников, занимающихся вопросами информационной безопасности.

39. Моисеева Л.Т. Математическое моделирование и оптимизация: Лабораторный практикум. Часть 1. РИЦ «Школа», 2015. 36 с.

Приводятся основные методы и средства программирования в пакете MathCad. Все объяснения сопровождаются примерами и заданиями для самостоятельного выполнения.

Предназначено для студентов технических специальностей.

40. Моисеева Л.Т., Полянкина З.Ш. Математическое и компьютерное моделирование динамики банковских накоплений: монография. – Казань: РИЦ «Школа». 2016. – 248 с.

Книга содержит обзор существующих методов расчета банковских накоплений и оригинальные математические модели описания динамики размера вклада при различных условиях накопления средств.

Предложен диалоговый программный комплекс моделирования, ориентированный на широкие круги населения. Применение этого комплекса позволит проанализировать различные варианты накопленных и сделать правильный выбор в пользу конкретного вклада и банка.

41. Моисеев В.С. Групповое применение беспилотных летательных аппаратов: монография. – Казань: Редакционно-издательский центр «Школа», 2017. 572 с.

Монография посвящена комплексному решению актуальной и перспективной организационно-технической проблемы группового применения беспилотных летательных аппаратов (БЛА) при решении широкого круга военных и гражданских задач.

В рамках решения этой проблемы приводятся постановки и методы решения следующих основных задач: организация беспилотных подразделений различного назначения; определение потребной численности БЛА в группировке при проведении различных операций; расчеты требуемого количества операторов управления БЛА при их групповом применении; задачи логистики беспилотных подразделений при эксплуатации группировки БЛА в полевых условиях; организация и выполнение групповых полетов БЛА; формирование управления БЛА при их групповых полетах.

Представленные в работе задачи сопровождаются значительным числом примеров с расчетным и графическим материалом.

Книга предназначена для специалистов по эксплуатации БЛА, а также для студентов, аспирантов, адъюнктов и докторантов соответствующих специальностей.

42. Моисеева Л.Т., Белобородова Н.В. Оптимизация фрезерных операций при ремонте лопаток газотурбинных двигателей: монография. – Казань: Редакционно-издательский центр «Школа», 2017. 144 с.

В книге приведены особенности технологического процесса механической обработки лопаток компрессора газотурбинных двигателей. Предложены математические модели и методы оптимизации технологического процесса фрезерования ремонтируемых лопаток.

Применение оптимальных режимов позволит снизить время ремонта лопаток в полтора раза.

Книга предназначена для студентов, магистрантов, аспирантов и специалистов по технологии машиностроения.

Авторами опубликованных в серии «Современная прикладная математика и информатика» монографий и учебников являются сотрудники кафедр «Прикладная математика и информатика», «Автоматизированные системы обработки информации и управления», «Компьютерные системы» Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева (КНИТУ-КАИ), преподаватели Казанского высшего военного командного артиллерийского училища (ныне КВВКУ), ученые Института проблем информатики АН РТ, специалисты ОАО ICL-КПОВС и ОАО НПО им. А.М. Симонова (бывшее ОКБ «Сокол»).

Многие из полученных научных и прикладных результатов внедрены в практику работы предприятий и организаций г. Казани и получили положительные оценки военных специалистов, ученых и IT-специалистов РФ. Материалы, опубликованных монографий активно использовались в учебном процессе и научной работе студентами, аспирантами и докторантами КНИТУ-КАИ и других вузов г. Казани.

Редактор серии благодарит руководство ОАО ICL-КПО ВС за долголетнее спонсорское содействие в издании книг серии «Современная прикладная математика и информатика».

*Заслуженный деятель науки и техники РТ,
доктор технических наук,
профессор В.С. Моисеев*

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее время характерно бурным развитием беспилотной авиационной техники у нас в стране и за рубежом. По оценкам специалистов в 2016 г. в армиях различных стран мира имелось порядка 100 тыс. единиц беспилотных летательных аппаратов (БЛА) различного назначения.

При этом следует отметить отсутствие в мировой практике общепринятой теории БЛА, как это имеет место в области пилотируемых ЛА.

В 60-70 г.г. XX века в СССР был отмечен значительный объем работ по БЛА, под которыми повсеместно понимались изделия ракетной и космической техники одноразового применения. Из наиболее известных работ того времени можно выделить следующие книги: *Беспилотные летательные аппараты. Под ред. Л.С. Чернобровкина. М.: Машиностроение, 1967. 440 с.*; *Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1973. 616 с.*; *Летов А.М. Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 360 с.* и др.

Конец прошлого и начало нынешнего века характеризовался тем, что многоразовые БЛА самолетных и вертолетных схем начали применяться при решении значительного круга военных и гражданских задач. Одной из первых работ, отражающих особенности применения и управления многоразовыми БЛА была монография *Новоселова А.С., Болнокина В.Е., Чинаева П.И., Юрьева А.Н. Системы адаптивного управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1987. 378 с.*

Практика показывает, что создание новых образцов таких БЛА осуществляется в настоящее время эмпирическим путем

с использованием методик проектно-конструкторских работ, применяемых для пилотируемых самолетов и вертолетов.

Одной из первых работ в области методического проектно-конструкторского обеспечения создания и производства БЛА является учебник *Основы проектирования, конструирования и производства летательных аппаратов (дистанционно пилотируемые летательные аппараты)*. Под ред. И.С. Голубева и Ю.И. Янкевича. М.: Изд-во МАИ, 2006. 528 с.

Современные БЛА имеют ряд важных отличительных особенностей, которые требуют разработки и широкого применения отличных от существующих методик их проектирования. Такие же самостоятельные подходы требуются в области динамики полета и управления современными БЛА.

В динамике полета и управлении пилотируемых ЛА рассматривались громоздкие нелинейные системы уравнений их движения и практически не рассматривались задачи автоматического программного управления полетами ЛА по требуемым траекториям, отличным от прямолинейных траекторий.

Существующие к настоящему времени работы по динамике полета и управлению БЛА в основном ориентированы на разработчиков их конструкции и систем управления.

Целью данной работы, ориентированной на специалистов, осуществляющих на практике управление БЛА при решении ими различных задач, является краткое и систематическое изложение необходимых теоретических сведений для эффективной эксплуатации программно-математического обеспечения перспективных подходов к описанию различных видов движения БЛА и формированию управлений при их движении по заданным траекториям. Все поставленные в ней задачи решаются для наиболее распространенных в настоящее время БЛА самолетных схем (БЛА СС) и беспилотных вертолетов (БВ) одновинтовой схемы.

Следует отметить полное отсутствие работ по программному управлению БВ. В книге в задачах, общих для рассматриваемых видов беспилотной авиационной техники, используется общее обозначение «БЛА», а в специфических задачах – обозначение «БЛА СС» и «БВ».

Изложение материала в предлагаемой монографии сопровождается значительным числом иллюстративных примеров, реализованных с помощью пакета Mathcad. Отметим, что все примеры основаны на условных исходных данных, не относящихся к конкретным БЛА и задачам их применения.

Автор выражает глубокую благодарность к.т.н. Моисеевой Л.Т. за большой труд по выполненным расчетам и подготовке рукописи книги к печати.

Скачать эту и другие работы автора по беспилотной авиационной технике, а также высказать свои замечания и предложения можно на сайте: **Моисеев-бпла.рф**.

Глава 1. СОВРЕМЕННЫЕ БЕСПИЛОТНЫЕ ЛЕТАТЕЛЬНЫЕ АППАРАТЫ

Беспилотные летательные аппараты (БЛА) являются уникальным, бурно развивающимся во всём мире видом авиационной техники [43], предназначенным в основном для применения в условиях, когда применение пилотируемых ЛА невозможно либо нецелесообразно [1-3].

Основными преимуществами БЛА самолётного и вертолётного типов, выгодно отличающими их от пилотируемых самолётов и вертолётов, являются:

- возможность их взлёта и посадки без проведения подготовительных инженерных работ на местности;
- способность пребывания в высокой степени готовности практически неограниченное время;
- более высокая выживаемость БЛА в условиях противодействия средств ПВО противника вследствие их меньшей заметности во всех диапазонах длин радиоволн;
- более короткие сроки и меньшая стоимость обучения операторов пунктов управления БЛА по сравнению с подготовкой экипажей пилотируемых ЛА;
- значительно меньшая стоимость (на один-два порядка в зависимости от целевого назначения и параметров БЛА) [2] и сроки развёртывания их серийного производства;
- возможность обмена бортовой информацией с ее потребителями практически в реальном масштабе времени;
- способность функционировать в условиях высокого радиоактивного, химического и бактериологического заражения воздуха и местности, а также при неблагоприятных метеоусловиях;

В настоящее время у нас в стране и за рубежом БЛА в основном используются в задачах ведения воздушной разведки и доразведки выявленных целей.

Одним из перспективных направлений в области беспилотной авиации является создание боевых БЛА, основным предназначением которых будет обнаружение, идентификация и поражение наземных стационарных и мобильных целей, огневое подавление средств системы ПВО противника, а в отдаленной перспективе – и борьба с воздушными целями. Основными требованиями к таким БЛА являются сравнительно невысокая стоимость производства, простота технического обслуживания и эксплуатации.

На современном этапе развития БЛА планируется существенно расширить зону возможного применения таких БЛА, включив в состав их функций задачи ведения радиоэлектронной борьбы (РЭБ) и выполнения ряда задач обеспечения действий сухопутных войск и флота.

В частности предлагаются подходы, связанные с разведкой погоды в районе боевых действий, с применением БЛА, оборудованных специальной метеорологической аппаратурой [9]. Кроме того, с использованием БЛА изучается возможность выполнения лазерного подсвета наземных целей для применения высокоточного оружия (ВТО) наземного или воздушного базирования [2, 34]. При этом следует заметить, что основным видом существующих БЛА в настоящее время являются БЛА самолетных схем при активной тенденции развития и применения БЛА вертолетных схем [43].

Анализ состояния современных БЛА показывает, что к настоящему времени отсутствует единый общепринятый подход к разработке и применению беспилотной авиационной

техники в военной и гражданской областях. Этим, на наш взгляд, вызвано значительное многообразие используемой терминологии, понятий и видов классификаций беспилотных ЛА и комплексов различного назначения.

Для разработки и успешного использования беспилотных средств авиационной техники необходима единая терминология и классификация, отражающие их состав, назначение и область применения [2, 3, 9].

На базе такой терминологии, единой классификации и создания методов описания движения и управления БЛА должны быть разработаны математические модели и методы программирования их полетов, пригодные для использования персоналом беспилотных комплексов в его повседневной деятельности.

1.1. Определение и классификация беспилотных ЛА

Беспилотным летательным аппаратом (БЛА) будем называть ЛА многоразового применения, не имеющий на борту экипажа, использующий силу тяги двигателей и аэродинамические силы для движения в атмосфере, имеющий целевую нагрузку, определяющую его назначение, и осуществляющий полет как по заранее заданной программе, так и, при необходимости, с использованием дистанционного (радиокомандного) управления [4].

Это определение включает в себя применяемые в настоящее время понятия «БПЛА», «ДПЛА» и др. Кроме этого, оно отделяет этот вид ЛА от ракет и космических аппаратов, для обозначения которых в нашей стране была принята аббревиатура «БЛА» [5-8 и др.]. Типовой состав современного БЛА [9] приведен на Рис. 1.1.

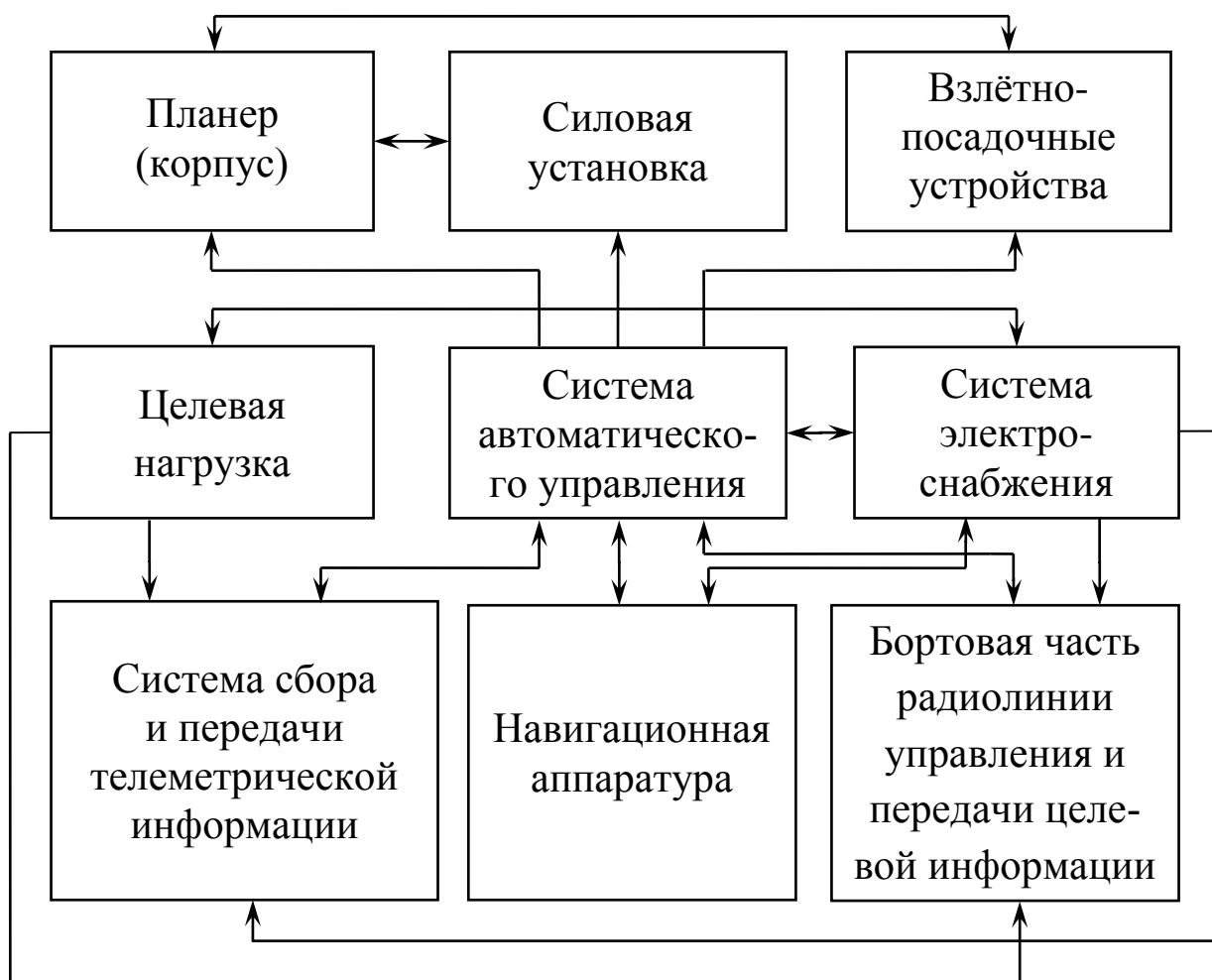


Рис. 1.1

Приведем классификацию современных БЛА по основным конструкционным и функциональным признакам.

По **конструкционным признакам** существующие и перспективные БЛА разбиваются на следующие виды, представленные на Рис. 1.2.

Примеры применяемых в настоящее время конструктивных схем БЛА приведены на Рис. 1.3 и Рис. 1.4. На них представлены аппараты первого вида классической схемы (Рис. 1.3,*а*), схемы «утка» с толкающим винтом (Рис. 1.3,*б*), схемы «бесхвостка» (Рис. 1.3,*в*), схемы «летающее крыло» (Рис. 1.3,*г*).

Особенности конструкции и управления БЛА неклассических самолетных схем приведены в работе [22].

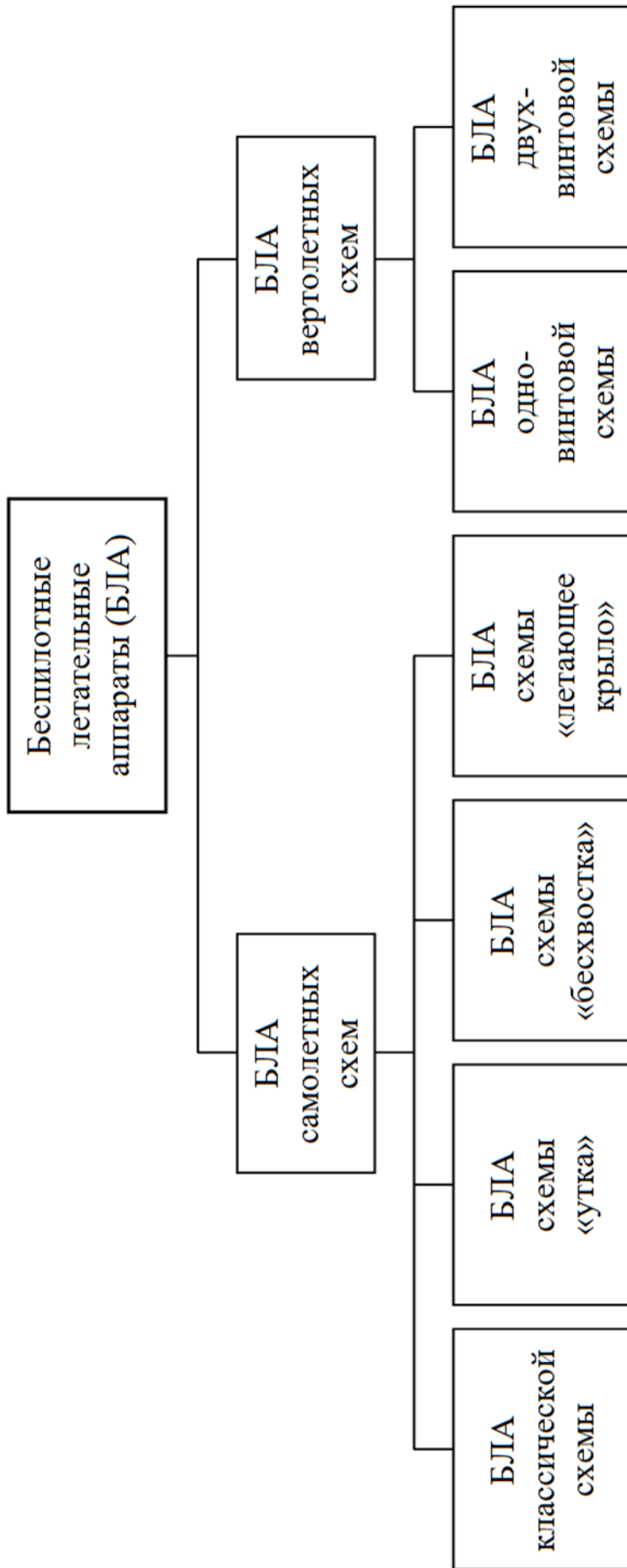


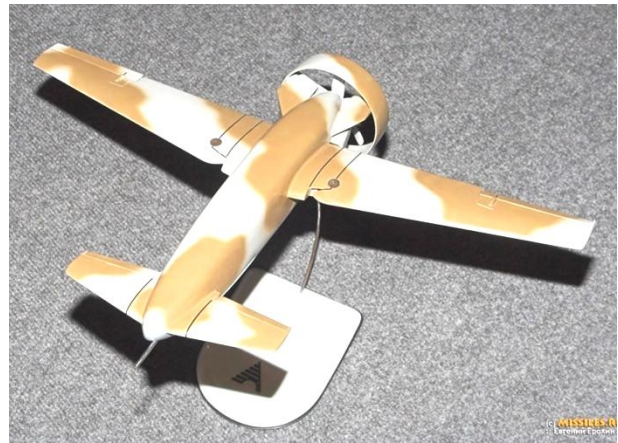
Рис. 1.2

На Рис. 1.4 приведены примеры существующих БЛА вертолетных схем в одновинтовом (Рис. 1.4,*а*) и двухвинтовом (Рис. 1.4,*б*) вариантах.

Отметим, что в данной работе будут рассматриваться только наиболее распространенные на практике БЛА классической самолетной схемы и БЛА одновинтовой вертолетной схемы [43].



а



б



в



г

Рис. 1.3



а



б

Рис. 1.4

По *видам базирования* существующие и перспективные БЛА классифицируются согласно схеме, представленной на Рис. 1.5.

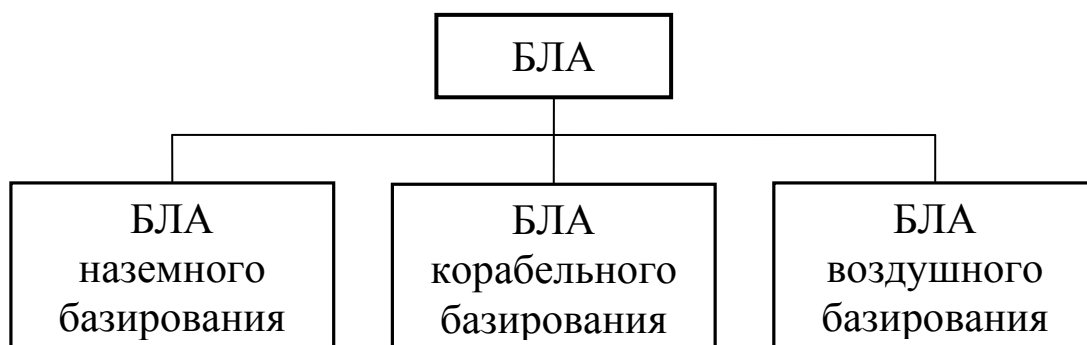


Рис. 1.5

Отметим, что два последних класса БЛА в настоящее время находятся в стадиях разработки.

БЛА нетрадиционных схем (квадрокоптеры, конвертопланы и др.) и микро БЛА [2] в данной работе не рассматриваются.

По способам взлета и посадки БЛА самолетных схем делятся на БЛА, совершающие эти действия с помощью шасси (Рис. 1.6,*а*), стартующие «с руки» (Рис. 1.6,*б*), а также с помощью специальных устройств (пусковая установка и воздушный старт) и приземляющиеся с помощью парашютов.

На Рис. 1.6,*в* представлен старт БЛА с пусковой установки, оснащенной катапультной. На Рис. 1.6,*г* изображен взлет БЛА со стартовым ускорителем. Парашютный способ посадки БЛА иллюстрирует Рис. 1.6,*е*.

По типу силовых установок, использованных в составе БЛА, выделяются (Рис. 1.7):

- БЛА с электродвигателем (ЭД);
- БЛА с поршневым двигателем (ПД);
- БЛА с турбореактивным двигателем (ТРД).



а



б



в



г



д



е

Рис. 1.6



Рис. 1.7

Краткое описание этих видов силовых установок БЛА приведено в работах [2, 6].

По возможностям решения целевых задач БЛА подразделяются на следующие типы [4]:

- **БЛА ближнего действия** (БЛА БД) с длительностью полета 1-2 часа;

- **БЛА среднего действия** (БЛА СД) с полетным временем 6-12 часов;

- **БЛА дальнего действия** (БЛА ДД) с продолжительностью полетов 24-48 часов.

Первый тип БЛА составляют аппараты, оснащённые в основном ЭД. При этом БЛА БД осуществляют старт «с руки» или катапульты и парашютную посадку в заданном районе.

Для БЛА СД применяются силовые установки на базе ПД и ТРД. Такие БЛА производят взлет и посадку с помощью пусковых установок и парашютов, а также шасси с использованием специально подготовленных площадок.

В состав БЛА ДД обычно входят БЛА, оснащённые ПД и ТРД, осуществляющие взлет и посадку с помощью шасси.

По дополнительным признакам классификации конкретный образец БЛА можно отнести [4]:

- а) **по взлетной массе** – к *сверхлегким* (до 5 кг), *легким* (до 200 кг), *средним* (до 1000 кг) и *тяжелым* (свыше 1000 кг) БЛА;

- б) **по продолжительности полета** – к *малой* (до 1 ч.), *средней* (до 10 ч.) и *большой* (свыше 10 ч.) длительности нахождения БЛА в воздухе;

- в) **по высоте полета** – к *низковысотным* (до 1000 м), *средневысотным* (до 10000 м) и *высотным* (до 15000-20000 м) БЛА.

По скорости полета практически все существующие БЛА можно отнести к *дозвуковым* ЛА с числом Маха $M < 1$. Вместе с тем, в мировой практике ведутся исследования и разработки по созданию *сверхзвуковых* и *гиперзвуковых* БЛА.

Функциональная классификация современных и перспективных БЛА представлена на Рис. 1.8 [9].



Рис. 1.8

Назначение, состав и функции наиболее распространенных в настоящее время **информационных БЛА** (ИнБЛА), кроме БЛА радиотехнической разведки и БЛА-ретрансляторов, описаны в монографии [4].

Имитационные БЛА, воспроизводящие летно-технические и отражательные характеристики реальных воздушных

целей, представлены в предлагаемой классификации как авиационные ложные цели (АЛЦ) [10] и исследовательские БЛА. Отметим, что понятие «АЛЦ» является обобщением и развитием используемого ранее и в настоящее время понятия «воздушная мишень» [10].

При этом учебно-испытательные АЛЦ (УИАЛЦ), применяемые для обучения персонала ПВО и испытаний новых образцов средств борьбы с воздушными целями, должны имитировать образцы зарубежных ЛА, а боевые АЛЦ, используемые в операциях ВКС, – образцы отечественных самолетов и вертолетов.

Исследовательские БЛА используются при разработках пилотируемых ЛА для исследования их летно-технических характеристик на критических режимах их полетов.

Относительно новым, но бурно развивающимся видом беспилотной авиационной техники являются боевые БЛА. Обобщая имеющийся в этой области опыт и перспективы их развития [9], предлагается выделить в составе боевых БЛА следующие типы:

- **Ударные БЛА**, предназначенные для борьбы с наземными целями с использованием авиационных средств поражения;
- **БЛА радиоэлектронной борьбы (БЛА-РЭБ)**, применяемые для вывода из строя наземных и воздушных средств связи и управления противника;
- **БЛА-истребители (БЛА-И)** для борьбы с беспилотными и пилотируемыми ЛА;
- **Вспомогательные БЛА**, предназначенные для выполнения определенных функций по обеспечению боевых действий подразделений сухопутных войск.

В состав вспомогательных БЛА в работе [9] предлагается включить БЛА оперативной постановки дымовых и аэрозольных завес, минирования и разминирования местности, а также доставки войсковым подразделениям разнообразных грузов. В состав таких БЛА включаются Метео-БЛА для разведки погоды в районах планируемых боевых действий артиллерийских и беспилотных подразделений [9].

Отметим, что **БЛА гражданского назначения (БЛА-ГН)** как вид беспилотной авиационной техники в настоящее время в силу ряда причин [3, 9] находится в стадии становления.

К основным задачам таких БЛА предлагается относить [9, 11]:

- 1) мониторинг (контроль) подстилающей поверхности, атмосферы, объектов инфраструктуры и других объектов;
- 2) ретрансляцию радиосигналов;
- 3) доставку и сброс грузов.

Из приведенного перечня задач видно, что в основном они являются частными случаями более широкого класса задач, решаемых БЛА военного назначения.

1.2. Общая характеристика траекторного подхода в задачах динамики полета и управления БЛА

Динамикой полета БЛА называется раздел авиационной науки, использующий методы теоретической механики [24] и аэродинамики [27, 48 и др.], осуществляющий формальное (математическое) описание различных видов движений БЛА и изучение характеристик поведения БЛА в воздухе.

Для пилотируемых ЛА ранее использовались термины «Аэромеханика» [14] и «Механика полета» [38].

Первыми работами в этом направлении были книги [8, 12, 13], в которых под БЛА подразумевались изделия ракетной и космической техники.

В этих и других работах движение БЛА в каждый момент времени представляется как поступательное движение его центра масс (ЦМ) и вращательное движение БЛА как твердого тела вокруг ЦМ.

При этом можно констатировать практически полное отсутствие работ, в которых рассматриваются не только уравнения полета БЛА самолетных схем, но и описания процессов их старта (взлета) с пусковых установок и с постоянных и временных площадок (аэродромов), а также посадки с помощью парашютных систем и по «самолетному». Полное отсутствие работ можно отметить и в области динамики полета образцов беспилотной вертолетной техники.

Приведем основные определения, используемые в современной динамике полета БЛА.

Комплекс применяемых в динамике полета БЛА математических выражений (уравнений) будем называть *математическими моделями движения БЛА* на различных этапах (режимах) его полета.

Одним из главных требований к таким моделям, кроме их адекватности и достаточной для практического применения точности, будем считать простоту и понятность моделей практическим специалистам по управлению БЛА. Выполнение этого требования обуславливается необходимостью их активного участия в выработке на основе этих моделей требуемых для решения целевых задач законов управления БЛА.

Кроме этого, как показала практика, простота применяемых моделей движения БЛА подразумевает, относительно

небольшую трудоемкость используемых при формировании таких законов математических методов и алгоритмов. Последнее влечет за собой простоту их программной реализации в среде автоматизированных рабочих мест (АРМ) специалистов по управлению БЛА. Для этих целей предлагается использовать упрощенные уравнения управляемого полета БЛА самолетных и вертолетных схем, описывающие движение в пространстве только их центра масс (ЦМ). Следуя работе [14], такое движение будем называть *опорным движением БЛА*. Кроме этого имеется движение БЛА вокруг его ЦМ, которое вызывается взаимодействием его органов управления, а также внутренними и внешними возмущениями. Недопущение его значительных отклонений от опорного движения должно обеспечиваться работой подсистемы стабилизации (автопилотом) системы автоматического управления полетом (САУ) БЛА (см. Рис. 1.1) или корректирующими радиокomандами оператора управления БЛА.

На Рис. 1.9 представлены траектории движения ЦМ (опорное движение) БЛА в вертикальной плоскости некоторой системы координат и движения БЛА вокруг этого центра (возмущенное движение). Там же приведена схема работы автопилота САУ БЛА.

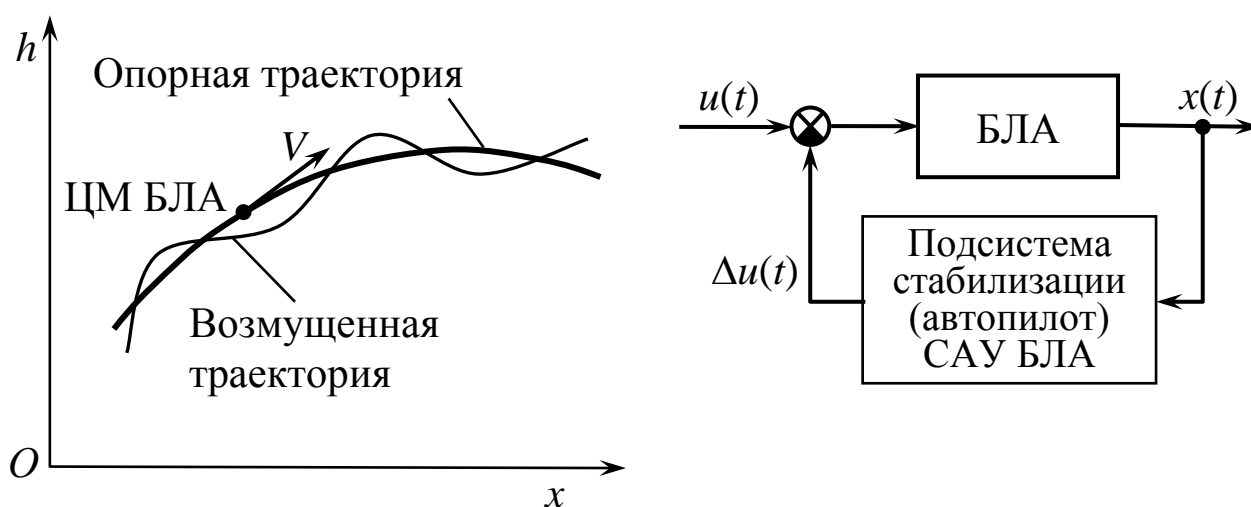


Рис. 1.9

В прикладной теории управления БЛА [9] рассматриваются следующие виды их опорного движения:

1. Программное движение БЛА.
2. Радиокомандное движение БЛА.
3. Движение БЛА в режиме самонаведения.

Первые два вида движений используют практически все виды БЛА, представленные на Рис. 1.2.

Отметим, что программное управление является основным для средних и тяжелых БЛА с достаточно большой продолжительностью полетов.

Для сверхлегких и легких БЛА в основном применяется дистанционное (радиокомандное) управление, которое осуществляется оператором пункта управления [2]. Основные подходы к реализации такого вида управления рассмотрены в работе [22].

Третий вид движения характерен для перспективных АЛЦ в режимах их уклонения от перехватчиков и для БЛА-истребителей в процессе перехвата воздушных целей.

При решении задач управления БЛА будем использовать общепринятую модель управляемого движения ЛА, которая в векторной форме записывается как [9, 15]:

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad t \in [t_0, t_k]; \quad x(t_0) = x_0. \quad (1.2.1)$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектор состояния ЛА, называемый вектором фазовых координат БЛА; $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ – управляющий вектор, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ – вектор-функция своих аргументов; $[t_0, t_k]$ – интервал времени t , на котором выполняется полет БЛА.

На управления БЛА накладываются ограничения вида:

$$u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}, \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (1.2.2)$$

Для снижения трудоемкости решения задач выбора вектора $u(t)$ при формировании программного движения БЛА предлагается использовать модели движения центра масс (ЦМ) БЛА, которые в общем случае представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= f_1(V, \theta, \Psi, y, u); \quad t \in [t_0, t_k]; \\ \dot{\theta} &= f_2(V, \theta, \Psi, y, u); \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} &= f_3(V, \theta, \Psi, y, u); \\ \dot{x} &= f_4(V, \theta, \Psi); \\ \dot{y} &= f_5(V, \theta, \Psi); \\ \dot{z} &= f_6(V, \theta, \Psi). \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Здесь $V = V(t)$ – скорость БЛА в момент времени $t \in [t_0, t_k]$; $\theta = \theta(t)$ и $\Psi = \Psi(t)$ – углы наклона и поворота траектории БЛА в этот момент времени; $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ – координаты БЛА в соответствующей земной системе координат. При сопоставлении уравнений (1.2.1) и (1.2.3), (1.2.4) имеем, что фазовый вектор БЛА состоит из координат V, θ, Ψ, x, y, z .

Начальные условия для системы дифференциальных уравнений (1.2.3), (1.2.4) имеют вид:

$$V(t_0) = V_0; \quad \theta(t_0) = \theta_0; \quad \Psi(t_0) = \Psi_0; \quad (1.2.5)$$

$$x(t_0) = x_0; \quad y(t_0) = y_0; \quad z(t_0) = z_0. \quad (1.2.6)$$

Заметим, что правые части динамических уравнений (1.2.3) движения БЛА конкретизируются применительно к различным этапам (режимам) их движения.

При практическом решении задач управления в полетах всех видов БЛА на интервале времени $[t_0, t_k]$ предлагается выделить следующие типовые этапы:

1. Взлет и набор заданной высоты полета в течение времени $[t_0, t_1]$.

2. Горизонтальный полет на интервале времени $[t_1, t_2]$ в зону выполнения полетного задания (ПЗ).

3. Выполнение ПЗ в течение запланированного времени $[t_2, t_3]$.

4. Полет в зону посадки на интервале времени $t \in [t_3, t_4]$.

5. Снижение и посадка БЛА в интервале времени $[t_4, t_5]$.

Основной задачей реализации программного управления БЛА является формирование законов изменения состояния органов его управления, обеспечивающих выполнение полетов БЛА на заданном интервале времени $[t_0, t_5]$. При программировании каждого этапа полета БЛА с помощью соответствующих численных и аналитических методов [9] решаются следующие задачи:

а) выбор или формирование вида требуемой траектории полета БЛА;

б) формирование косвенного и прямого управления, обеспечивающего движение БЛА по такой траектории.

Реализацию траекторного подхода к формированию программного управления БЛА, который рассматривается на общем интервале времени $[t_0, t_k]$, предлагается проводить в три этапа:

1. Формирование требуемых для выполнения ПЗ траекторий движения БЛА (см. Главу 4).

2. Определение *вектора* $u(t)$ *косвенного управления* БЛА с использованием модели (1.2.3)-(1.2.6) и концепции обратных задач управления [9, 16, 17].

3. Формирование *вектора* $\Delta(t)$ *прямого управления* БЛА, описывающего законы изменения положения его органов управления, которые вычисляются с использованием значений вектора $u(t)$, вектора фазовых координат $V(t)$, $\theta(t)$, $\Psi(t)$, $x(t)$, $y(t)$,

$z(t)$, моментных и конструктивных характеристик конкретного образца БЛА.

Для самолетных схем БЛА (см. Рис. 1.2) вектор косвенного управления, который не зависит от их конструктивных схем, в общем случае имеет следующий вид [9]:

$$u(t) = (P(t), \alpha(t), \beta(t), \gamma(t)), \quad t \in [t_0, t_k], \quad (1.2.7)$$

где $P(t)$ – сила тяги двигателей БЛА; $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ – углы атаки, скольжения и крена БЛА в момент времени $t \in [t_0, t_k]$.

Методы формирования векторов вида (1.2.7) для требуемых характеристик плоских и пространственных траекторий движения БЛА самолетных схем при $\beta(t) = 0$ предложены в Разд. 5.1.

Вектор прямого управления БЛА классической самолетной схемы представляется как:

$$\Delta(t) = (\delta_P(t), \delta_B(t), \delta_H(t), \delta_\Omega(t)), \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (1.2.8)$$

Здесь $\delta_P(t)$ – закон изменения положения управляющего органа силовой установки БЛА (автомата тяги); $\delta_B(t)$, $\delta_H(t)$, $\delta_\Omega(t)$ – законы отклонения рулей высоты, направления и элеронов БЛА в момент времени $t \in [t_0, t_k]$.

Компоненты вектора (1.2.8) предлагается вычислять с использованием зависимостей вида:

$$\begin{aligned} \delta_P(t) &= \psi_1(P(t), V_{\text{зад}}(t), y_{\text{тр}}(t)); \\ \delta_B(t) &= \psi_2(\alpha(t), \gamma(t), \theta_{\text{тр}}(t), \Psi_{\text{тр}}(t), V_{\text{зад}}(t), m, p); \\ \delta_H(t) &= \psi_3(\alpha(t), \gamma(t), \theta_{\text{тр}}(t), \Psi_{\text{тр}}(t), V_{\text{зад}}(t), m, p); \\ \delta_\Omega(t) &= \psi_4(\alpha(t), \gamma(t), \theta_{\text{тр}}(t), \Psi_{\text{тр}}(t), V_{\text{зад}}(t), m, p), \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

где $V_{\text{зад}}(t)$ – заданная скорость БЛА; $y_{\text{тр}}(t)$ – требуемая высота полета; $\theta_{\text{тр}}(t)$, $\Psi(t)$ – требуемые углы наклона и поворота траектории БЛА; m – вектор моментных коэффициентов и их

производных конкретного образца БЛА; p – вектор конструктивных характеристик этого образца.

Методы построения законов управления вида (1.2.9) будет рассмотрен в Разд. 6.1 и 6.2. Для БЛА неклассических типов компоновок («утка», «бесхвостка», «летающее крыло» и др.) применяется вектор косвенного управления $u(t)$ вида (1.2.7) и векторы $\Delta(t)$ с соответствующими компонентами, описывающими законы отклонения их органов аэродинамического управления.

Отметим, что сформированный с использованием определенных методов вектор $u(t)$ оценивается путем подстановки в систему уравнений (1.2.3), (1.2.4) и моделирования движения БЛА путем ее численного интегрирования [9] при заданных начальных условиях (1.2.5), (1.2.6).

После принятия решения о его полном соответствии программируемому полетному заданию вычисляются компоненты вектора $\Delta(t)$ прямого управления БЛА, которые записываются в вычислительный комплекс (ВК) САУ на этапе предполетной подготовки БЛА.

Для БЛА вертолетной схемы, рассматриваемой в данной работе, в системе уравнений (1.2.3) применяются другие правые части, учитывающие силы, действующие в полете на одновинтовой вертолет [35, 45, 48, 49]. В этом случае вектор косвенного управления будет иметь вид:

$$u(t) = \left(T_{\text{НВ}}(t), \chi(t), T_{\text{РВ}}(t) \right), \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (1.2.10)$$

Здесь $T_{\text{НВ}}(t)$ – сила тяги несущего винта (НВ) вертолета; $\chi(t)$ – угол наклона плоскости вращения НВ; $T_{\text{РВ}}(t)$ – сила тяги рулевого винта (РВ) вертолета.

Метод формирования компонент вектора (1.2.10) по заданной скорости полета и требуемой траектории движения беспилотного вертолета рассматривается в Разд. 5.2.

Вектор прямого управления рассматриваемым беспилотным вертолетом представляется как:

$$\Delta(t) = \left(\bar{n}_{\text{дв}}(t), \varphi_{\text{нв}}(t), \varphi_{\text{ст}}(t), \delta_{\text{ап}}(t), \varphi_{\text{рв}}(t) \right), t \in [t_0, t_k]. \quad (1.2.11)$$

где $\bar{n}_{\text{дв}}^{\text{др}}(t)$ – относительное число оборотов вала двигателя БВ; $\varphi_{\text{нв}}(t)$ – общий шаг НВ вертолета; $\varphi_{\text{ст}}(t)$ – угол отклонения его управляемого стабилизатора; $\delta_{\text{ап}}(t)$ – угол наклона автомата перекоса; $\varphi_{\text{рв}}(t)$ – шаг рулевого винта вертолета.

Компоненты этого вектора определяются с использованием вектора (1.2.10) методами, описанными в Разд. 6.3.

Здесь также полученные компоненты записываются в САУ беспилотного вертолета для последующего использования при выполнении полетного задания.

1.3. Основные факторы, учитываемые в задачах динамики полета и управления БЛА

Современные БЛА предназначены для выполнения полетов в интервале высот от нескольких десятков метров до нескольких тысяч метров [2].

Естественно считать, что на характеристики БЛА существенное влияние будут оказывать параметры атмосферы Земли. В работах [5, 6, 27, 31] выделены такие основные параметры воздуха как давление p , плотность ρ и абсолютная температура T по шкале Кельвина.

В задачах динамики полета ЛА используются следующие нормальные параметры стандартной атмосферы (СА) на уровне Земли:

$$p_H = 760 \text{ мм. рт. ст.}; \quad \rho_H = 1,225 \text{ кг/м}^3; \quad (1.3.1)$$

$$T_H = 288,15^\circ\text{К} = 15^\circ\text{С}.$$

Изменения этих параметров с высотой обычно представляются в форме таблицы СА [8, 27, 31].

На важность учета изменения параметров атмосферы указывают результаты многолетних метеорологических наблюдений на территории России, которые установили колебания температуры от -80°С (Якутия) до $+47,5^\circ\text{С}$ (Новгородская обл.) и изменения атмосферного давления от 727,5 мм.рт.ст. до 821,25 мм.рт.ст. (Баренцево и Охотское моря).

Важность учета состояния атмосферы иллюстрируется примером, приведенным в работе [27], в котором показано, что максимальная скорость полета самолета зимой (-40°С) и летом ($+40^\circ\text{С}$) различается в 1,2 раза.

Как будет показано в Главе 2, все аэродинамические силы, входящие в уравнения движения БЛА (1.2.3), (1.2.4), зависят от плотности воздуха ρ , которая связана с другими параметрами атмосферы зависимостью вида [27]:

$$\rho = \frac{p}{RT}, \quad (1.3.2)$$

где p – давление (н/м^2); R – удельная газовая постоянная ($\text{м}^2/\text{с}^2 \cdot ^\circ\text{К}$); T – температура ($^\circ\text{К}$).

Из этого выражения следует, что плотность воздуха ρ возрастает с ростом атмосферного давления p и убывает с ростом температуры T .

Из таблицы СА видно, что все параметры атмосферы зависят от высоты u от уровня моря.

Обобщая формулу для относительной плотности воздуха из работы [31], имеем:

$$\frac{\rho(y)}{\rho_0} = \frac{p(y)}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T(y)}, \quad (1.3.3)$$

где индекс «0» соответствует параметрам атмосферы при $y = 0$ м, то есть на стартовой позиции БЛА.

В работе [27] предлагаются следующие зависимости, входящие в эту формулу:

$$T(y) = T_0 - \mu y; \quad (1.3.4)$$

$$\frac{p(y)}{p_0} = \left(1 - \frac{\mu}{T_0} y\right)^{\frac{1}{\mu R}}; \quad (1.3.5)$$

$$\frac{\rho(y)}{\rho_0} = \left(1 - \frac{\mu}{T_0} y\right)^{\frac{1}{\mu R} - 1}, \quad y \in [0; 11000] \text{ м.}$$

где μ – градиент температуры ($^{\circ}\text{K}/\text{м}$).

При $\mu = 0,0065^{\circ}\text{K}/\text{м}$ и $R = 287,14$ Дж/кг $\cdot^{\circ}\text{K}$ показатели в выражениях (1.3.5) будут соответственно равны 5,256 и 4,256.

Заметим, что расчеты с использованием формул (1.3.5) при изменениях высоты y полета БЛА являются затруднительными из-за входящих в них дробных степеней. Поэтому для описания изменения относительного давления будем использовать экспоненциальную аппроксимацию данных СА вида:

$$p(y) = p_0 e^{-cy}, \quad (1.3.6)$$

где c – эмпирический коэффициент.

Подставляя в выражение (1.3.3) соотношения (1.3.4) и (1.3.6), имеем:

$$\frac{\rho(y)}{\rho_0} = \frac{T_0}{T_0 - \mu y} e^{-cy}. \quad (1.3.7)$$

Входящую в эту формулу плотность воздуха на уровне Земли с использованием зависимости (1.3.2) конкретизируем как:

$$\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0}. \quad (1.3.8)$$

Преобразуем выражение (1.3.7) к виду:

$$\rho(y) = \rho_0 \frac{T_0}{T_0 - \mu y} e^{-cy}.$$

Подставляя в это выражение формулу (1.3.8), получим:

$$\rho(y) = \frac{p_0}{R(T_0 - \mu y)} e^{-cy}. \quad (1.3.9)$$

Естественно предположить, что измерение значений давления и температуры воздуха на стартовой позиции БЛА должно производиться в мм.рт.ст. и в градусах по шкале Цельсия. Используя коэффициент перевода атмосферного давления, равный $133,322 \text{ Н/м}^2 \cdot \text{мм.рт.ст}$, приведенное выше значение постоянной R и формулу связи температурных шкал Кельвина и Цельсия, перепишем выражение (1.3.9) в следующей окончательной форме:

$$\rho = \rho(p_0, \tau_0, y) = \frac{0,46431 p_0}{273,15 + \tau_0 - \mu y} e^{-cy}, \quad (1.3.10)$$

где p_0 – атмосферное давление в мм.рт.ст; τ_0 – температура воздуха в градусах Цельсия.

Будем считать, что в формуле (1.3.6), преобразованной к виду:

$$p = p(y) = p_0 e^{-cy} \quad (1.3.11)$$

начальное давление p_0 также задается в мм.рт.ст.

Эта зависимость и формула (1.3.4) будут использованы в Разд. 6.1 и 6.3 при расчетах сил тяги силовых установок БЛА СС и БВ на базе наиболее распространенных в настоящее время поршневых двигателей.

Для решения систем уравнений (1.2.3), (1.2.4) в литературе предлагается для нормальных атмосферных условий использовать приближенную формулу вида [8, 18]:

$$\rho(y) = \rho_0 e^{-ky}, \quad y \geq 0, \quad (1.3.12)$$

где $\rho_0 = 1,225 \text{ кг/м}^3$; $k = 0,0001$ – эмпирический коэффициент.

Кроме отмеченных выше параметров атмосферы важной ее характеристикой, оценивающей сжимаемость воздуха, является скорость звука a , которая описывается зависимостью вида [27, 31]:

$$a = \sqrt{kRT}.$$

Учитывая, что для воздуха показатель адиабаты $k = 1,4$, удельная газовая постоянная $R = 287,14 \text{ Дж}\cdot\text{кг}^{-1}\cdot\text{°K}^{-1}$, получаем формулу вида:

$$a = 20,048\sqrt{T}. \quad (1.3.13)$$

Из выражений (1.3.1) следует, что начальное нормальное значение скорости звука на уровне Земли будет равно:

$$a_n = 340,314 \text{ м/с}.$$

Подставляя в выражение (1.3.13) формулу (1.3.4), получаем следующую зависимость скорости звука от высоты:

$$a(y) = 20,048\sqrt{T_0 - \mu y}. \quad (1.3.14)$$

Заметим, что при $T_0 = 288^\circ\text{K}$ и $y = 0$ из этой формулы получаем приведенное выше значение a_n .

Для определения изменения значения скорости звука a от высоты y в работах [9, 18] предлагается использовать приближенную формулу вида:

$$a = a_0 - a_1 y, \quad y \geq 0, \quad (1.3.15)$$

где значение a_0 при температуре воздуха $T^\circ\text{K}$ вычисляется по формуле (1.3.13); $a_1 = 0,004$ – эмпирический коэффициент.

Преобразуем формулу (1.3.13) к шкале Цельсия:

$$a_0(\tau_0) = 20,048\sqrt{273,15 + \tau_0} \quad (1.3.16)$$

Тогда с использованием выражений (1.3.15) и (1.3.16) зависимость скорости звука от температуры воздуха τ_0 на уровне Земли и высоты y примет следующий вид:

$$a = a(\tau_0, y) = 20,048\sqrt{273,15 + \tau_0} - 0,004y. \quad (1.3.17)$$

Пример 1.1.

Как показал анализ современного состояния отечественной и зарубежной беспилотной авиационной техники [43], существующие образцы БЛА эксплуатируются в интервале высот от 0 до 10000 м. Определим для этого интервала значение параметра c , входящего в выражение (1.3.6). Для этого будем использовать Табл. 1.1, сформированную с использованием данных по СА из работ [8, 27, 31].

Таблица 1.1

Высота y , м	Давление p , мм.рт.ст.	Относительное давление \bar{p}	Плотность ρ , кг/м ³	Относительная плотность $\bar{\rho}$	Температура T , °К	Скорость звука a , м/с
0	760,0	1	1,2250	1	288,15	340,28
1000	674,0	0,8868	1,1117	0,9075	281,65	336,43
2000	596,1	0,7843	1,0066	0,8271	275,14	332,52
3000	525,7	0,6917	0,9094	0,7424	268,64	328,56
4000	462,2	0,6082	0,8194	0,6689	262,13	324,56
5000	404,8	0,5326	0,7365	0,6012	255,63	320,51
6000	353,7	0,4654	0,6602	0,5389	249,13	316,41
7000	307,8	0,4050	0,5901	0,4871	242,63	312,25
8000	266,8	0,3511	0,5259	0,4293	236,14	308,05
9000	230,4	0,3032	0,4671	0,3813	229,64	303,78
10000	198,1	0,2607	0,4136	0,3376	223,15	299,45

Из анализа этой таблицы следует, что с увеличением высоты атмосферное давление уменьшается в 3,84 раза, а плотность воздуха – в 2,96 раза.

Значение коэффициента аппроксимации c будем определять для относительного давления $\bar{p}(y) = \frac{p(y)}{p_0}$ из Табл. 1.1 с применением известного метода наименьших квадратов [21], используя нелинейную регрессионную зависимость вида:

$$\bar{p}(y) = e^{-cy}.$$

Целевая функция этого метода в нашем случае конкретизируется как:

$$J(c) = \sum_{j=0}^{10} (\bar{p}_j - e^{-cy_j})^2 \rightarrow \min_c,$$

где \bar{p}_j и y_j – данные из 3-го и 1-го столбцов Табл. 1.1, $j = \overline{(0; 10)}$.

Используя необходимое условие экстремума [19] функции $J(c)$:

$$\frac{dJ}{dc} = 0,$$

получаем следующее уравнение для определения значения искомого параметра a :

$$\sum_{j=0}^{10} (\bar{p}_j - e^{-cy_j}) ce^{-cy_j} = 0$$

Решая это нелинейное уравнение численным методом Ньютона [9], получаем значение:

$$c = 0,0001286.$$

Установлено, что максимальное относительное значение погрешности аппроксимации, равное 6,06%, достигается при $y = 10000$ м.

С использованием найденного значения коэффициента c и коэффициента $\mu = 0,0065$ формулы (1.3.10) и (1.3.11) для значений $y \in [0; 10000]$ м. примут вид:

$$\rho = \rho(p_0, \tau_0, y) = \frac{0,46431 p_0}{273,15 + \tau_0 - 0,0065 y} e^{-0,0001286 y}; \quad (1.3.18)$$

$$p = p(y) = p_0 e^{-0,0001286 y} \quad (1.3.19)$$

Оценим влияния на эти параметры стартовых условий и высоты полета БЛА.

Пусть некоторый БЛА, осуществляющий полеты в диапазоне высот от 0 м до 10000 м, эксплуатируется в регионе, в котором температура воздуха и атмосферное давление на уровне Земли могут изменяться в следующих пределах:

$$-50^\circ\text{C} \leq \tau_0 \leq +50^\circ\text{C};$$

$$720 \text{ мм.рт.ст.} \leq p_0 \leq 770 \text{ мм.рт.ст.}$$

Оценим изменения значений плотности воздуха и скорости звука при таких значениях параметров внешней среды.

Расчет по формуле (1.3.17) при $y = 0$ м. приведен в Табл. 1.2.

Из этой таблицы следует, что:

$$\rho_{0,\min} = 1,034 \text{ кг/м}^3; \quad \rho_{0,\max} = 1,601 \text{ кг/м}^3.$$

Относительные отклонения плотности воздуха от нормального значения $\rho_0 = 1,225 \text{ кг/м}^3$, при котором проводятся в настоящее время все расчеты в динамике полета ЛА, составляют соответственно $-15,6\%$ при $\tau = -50^\circ\text{C}$, $p = 720 \text{ мм.рт.ст.}$ и $+30,7\%$ и для $\tau = +50^\circ\text{C}$, $p = 770 \text{ мм.рт.ст.}$ При этом величина ρ изменяется в 1,55 раза.

Зависимость $\rho(p_0, \tau_0, 0)$ представлена на Рис. 1.9.

Аналогичный расчет по этой формуле при $y = 10000$ м. приведен в Табл. 1.3.

Зависимость (1.3.16) скорости звука от температуры на уровне Земли и высоты приведены на Рис. 1.10 и в Табл. 1.4.

Из этой таблицы следует, что значения:

$a_{\min} = a(-50, 0) = 259,481 \text{ м/с}; \quad a_{\max} = a(+50, 0) = 360,390 \text{ м/с}$
достигаются при высоте $y = 0$.

Таблица 1.2

ρ , мм.рт.ст $\tau^{\circ}\text{C}$	720	725	730	735	740	745	750	755	760	765	770
-50	1,497	1,508	1,518	1,528	1,539	1,549	1,559	1,570	1,580	1,591	1,601
-40	1,433	1,443	1,453	1,463	1,473	1,483	1,493	1,503	1,513	1,522	1,523
-30	1,374	1,384	1,393	1,403	1,412	1,422	1,431	1,441	1,450	1,460	1,469
-20	1,320	1,329	1,338	1,347	1,356	1,366	1,375	1,384	1,393	1,402	1,411
-10	1,270	1,278	1,287	1,296	1,305	1,314	1,322	1,331	1,340	1,349	1,358
0	1,223	1,232	1,240	1,249	1,257	1,266	1,274	1,283	1,291	1,300	1,308
+10	1,180	1,188	1,196	1,204	1,213	1,221	1,229	1,237	1,245	1,254	1,262
+20	1,140	1,148	1,155	1,163	1,171	1,179	1,187	1,195	1,203	1,211	1,219
+30	1,102	1,110	1,117	1,125	1,133	1,140	1,148	1,156	1,163	1,171	1,179
+40	1,067	1,074	1,082	1,089	1,096	1,104	1,111	1,119	1,126	1,134	1,141
+50	1,034	1,041	1,048	1,055	1,063	1,070	1,077	1,084	1,091	1,098	1,106

Таблица 1.3

ρ , мм.рт.ст $t^{\circ}\text{C}$	720	725	730	735	740	745	750	755	760	765	770
-50	0,584	0,588	0,592	0,596	0,600	0,604	0,608	0,612	0,616	0,620	0,624
-40	0,549	0,553	0,557	0,561	0,564	0,568	0,572	0,576	0,580	0,584	0,587
-30	0,518	0,522	0,526	0,529	0,533	0,536	0,540	0,544	0,547	0,551	0,554
-20	0,491	0,494	0,498	0,501	0,504	0,508	0,511	0,515	0,518	0,522	0,525
-10	0,466	0,469	0,473	0,476	0,479	0,482	0,485	0,489	0,492	0,495	0,498
0	0,444	0,447	0,450	0,453	0,456	0,459	0,462	0,465	0,468	0,471	0,474
+10	0,423	0,426	0,429	0,432	0,435	0,438	0,441	0,444	0,447	0,450	0,453
+20	0,405	0,408	0,410	0,413	0,416	0,419	0,422	0,424	0,427	0,430	0,433
+30	0,388	0,390	0,393	0,396	0,399	0,401	0,404	0,407	0,409	0,412	0,415
+40	0,372	0,375	0,377	0,380	0,382	0,385	0,388	0,390	0,393	0,395	0,398
+50	0,358	0,360	0,363	0,365	0,368	0,370	0,373	0,375	0,378	0,380	0,383

Таблица 1.4

$\gamma, \text{ км}$ $t^{\circ}\text{C}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-50	299,481	259,481	291,481	287,481	283,481	279,481	275,481	271,481	267,481	263,481	259,481
-40	306,118	302,118	298,118	294,118	290,118	286,118	282,118	278,188	274,118	270,118	266,118
-30	312,614	308,614	304,614	300,614	296,614	292,614	288,614	284,614	280,614	276,614	272,614
-20	318,977	314,977	310,977	306,977	302,977	298,977	294,977	290,977	286,977	282,977	278,977
-10	325,217	321,217	317,217	313,217	309,217	305,217	301,217	279,217	293,217	289,217	285,217
0	331,338	327,338	323,338	319,338	315,338	311,338	307,338	303,338	299,338	295,338	291,338
+10	337,349	333,349	329,349	325,349	321,349	317,349	313,349	309,349	305,349	301,349	297,349
+20	343,254	339,254	335,254	331,254	327,254	323,254	319,254	315,254	311,254	307,254	303,254
+30	349,060	345,060	341,060	337,060	333,060	329,060	325,060	321,060	317,060	313,060	309,060
+40	354,770	350,770	346,770	342,770	338,770	334,770	330,770	326,770	322,770	318,770	314,770
+50	360,390	356,390	352,390	348,390	344,390	340,390	336,390	332,390	328,390	324,390	320,390

Сравнения этих значений с широко используемым в динамике полета ЛА значением $a_0 = 340,314$ м/с дает следующие показатели относительных отклонений:

$$\Delta a(-50, 0) = -23,8\%; \quad \Delta a(+50, 0) = 5,9\%.$$

Расчет зависимости $a(\tau_0, y)$ по теоретической формуле (1.3.14) приведен в Табл. 1.5.

Из полученных результатов имеем, что:

$$\rho_{\min} = 0,383 \text{ кг/м}^3; \quad \rho_{\max} = 0,624 \text{ кг/м}^3.$$

Отсюда следует значение перепада плотности воздуха, равное 1,74 раза.

Сравнивая данные таблиц 1.4 и 1.5, можно сделать вывод о приемлемой точности приближенной формулы (1.3.16).

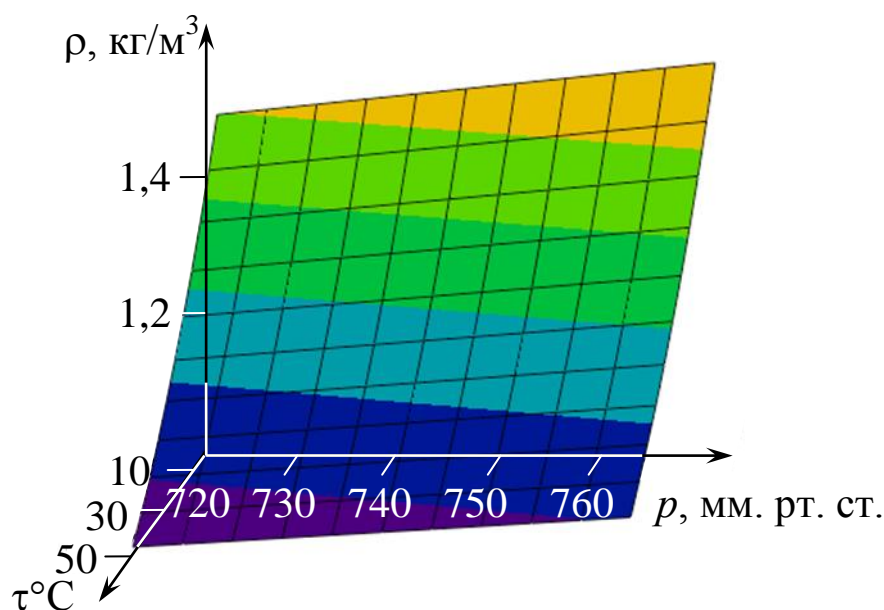


Рис. 1.9

Рассмотренный пример указывает на значительное влияние параметров внешней среды, что требует использования зависимостей вида (1.3.10), (1.3.11) и (1.3.17) в расчетах динамики полетов современных БЛА.

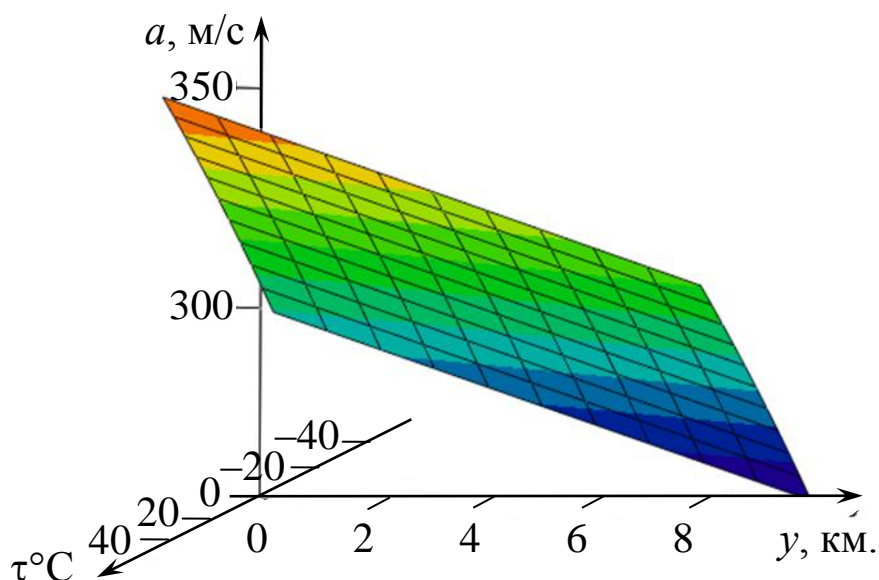


Рис. 1.10

Существенное значение в задачах динамики полета БЛА имеет учет влияния воздушных потоков в атмосфере. Следует отметить практическое отсутствие в настоящее время работ, отражающих влияние ветровых возмущений на фазовые координаты БЛА, кроме монографий [9] и [41], в которых рассматриваются основные вопросы действия этого важного фактора.

Существенное значение для практического решения задач динамики полета и управления БЛА имеют применяемые в них системы координат, в которых описываются требуемые траектории их движения. Используемые в существующих работах [5, 6, 8, 14 и др.] связанная, полусвязанная, скоростная и другие виды систем координат не применяются при непосредственной эксплуатации БЛА.

При реализации траекторного подхода в задачах динамики полета и управления современных БЛА предлагается использовать следующие *специальные системы координат* (СК), представленные на Рис. 1.11:

Таблица 1.5

$y, \text{ км}$ $\tau^{\circ}\text{C}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-50	299,481	295,087	290,627	286,097	281,494	276,815	272,055	267,211	262,277	257,248	252,119
-40	306,118	301,821	297,461	293,037	288,545	283,982	279,344	274,628	269,830	264,945	259,968
-30	312,614	308,407	304,142	299,816	295,428	290,972	286,448	281,851	277,178	272,424	267,586
-20	318,977	314,856	310,679	306,446	302,153	297,799	293,380	288,893	284,335	279,704	274,994
-10	325,217	321,175	317,082	312,935	308,733	304,472	300,151	295,767	291,318	286,799	282,207
0	331,338	327,372	323,358	319,292	315,175	311,003	306,774	302,486	298,136	293,722	289,241
+10	337,349	333,454	329,514	325,525	321,488	317,399	313,256	309,058	304,802	300,486	296,107
+20	343,254	339,428	335,557	331,641	327,679	323,668	319,607	315,493	311,325	307,101	302,818
+30	349,060	345,297	341,493	337,647	33,756	329,819	325,834	321,800	317,715	313,577	309,383
+40	354,770	351,069	347,328	343,547	339,723	335,856	331,944	327,986	323,978	319,921	315,812
+50	360,390	356,747	353,067	349,348	345,588	341,788	337,944	334,056	330,123	326,142	322,112

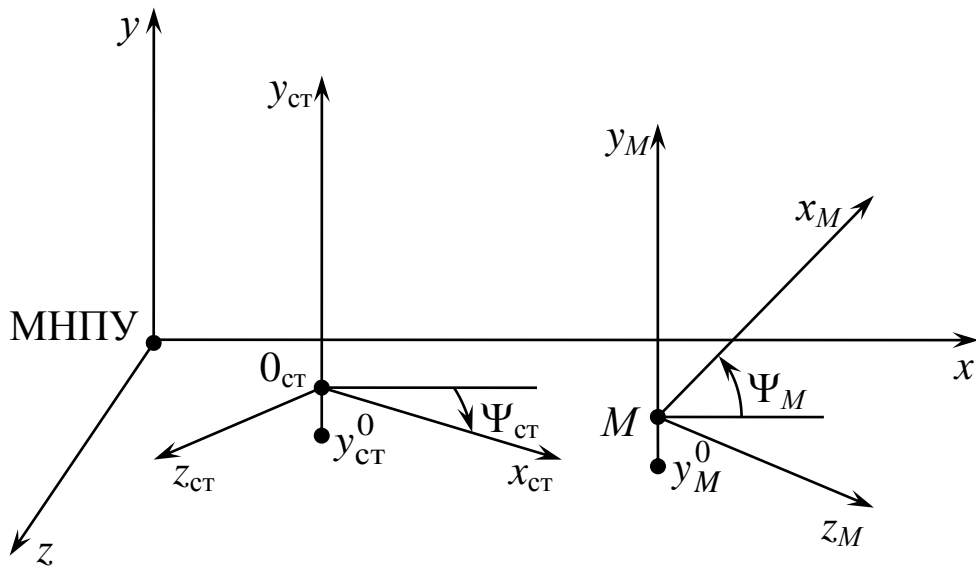


Рис. 1.11

- **базовая СК** с началом в точке расположения мобильного наземного пункта управления (МНПУ) БЛА;
- **стартовая СК** с началом в точке старта (взлета) БЛА;
- **маневренная СК**, заданная в окрестности требуемой траектории полета БЛА.

Положение *стартовой* СК относительно *базовой* земной системы МНПУ $x_0y_0z_0$ определяется углом поворота $\Psi_{ст}$, определяющим направление полета при старте БЛА с пусковой установки [12] или осью площадки (аэродрома) взлета и посадки БЛА. В этом случае ось $0_{ст}x_{ст}$ направлена под углом $\Psi_{ст}$ к оси МНПУ x . На тот же угол повернута и ось $0_{ст}z_{ст}$ относительно оси МНПУ z . Оси МНПУ y и $0_{ст}y_{ст}$ совпадают. При этом точка $0_{ст}$ может находиться на высоте $y_{ст}^0$ относительно высоты размещения МНПУ БЛА.

Положение *маневренной* СК с началом в заданной точке M , выбирается специалистом по управлению БЛА с точки зрения удобства и простоты программирования движения БЛА на рассматриваемом этапе (режиме) его полета. Ось Mx_M

этой системы повернута на угол Ψ_M относительно оси МНПУ x , а направления осей Mu_M и МНПУ y совпадают.

При переходе от одной СК к другой СК будем использовать известные методы преобразования декартовых координат [19].

Если обозначить через $(x_{ст}^0, y_{ст}^0, z_{ст}^0)$ координаты точки $O_{ст}$ в базовой СК МНПУ xuz , то формулы пересчета значений координат БЛА, полученных в стартовой СК, в базовую СК имеют вид:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{ст}^0 + x_{ст}(t) \cos \Psi_{ст} - z_{ст}(t) \sin \Psi_{ст}; \\ y(t) &= y_{ст}^0 + y_{ст}(t); \\ z(t) &= z_{ст}^0 + x_{ст}(t) \sin \Psi_{ст} + z_{ст}(t) \cos \Psi_{ст}, \end{aligned} \quad (1.3.20)$$

где $x_{ст}(t)$, $y_{ст}(t)$, $z_{ст}(t)$ – координаты БЛА в момент времени $t \in [t_0, t_1]$.

Аналогичные формулы перевода координат БЛА $x_M(t)$, $y_M(t)$, $z_M(t)$ из маневренной СК с началом в точке M с координатами (x_M^0, y_M^0, z_M^0) в базовую СК записываются как:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_M^0 + x_M(t) \cos \Psi_M - z_M(t) \sin \Psi_M; \\ y(t) &= y_M^0 + y_M(t); \\ z(t) &= z_M^0 + x_M(t) \sin \Psi_M + z_M(t) \cos \Psi_M. \end{aligned} \quad (1.3.21)$$

Перевод координат БЛА из базовой СК в некоторую маневренную СК производится по формулам вида:

$$\begin{aligned} x_M(t) &= (x(t) - x_M^0) \cos \Psi_M + (z(t) - z_M^0) \sin \Psi_M; \\ y_M(t) &= y(t) - y_M^0; \\ z_M(t) &= -(x(t) - x_M^0) \sin \Psi_M + (z(t) - z_M^0) \cos \Psi_M, \end{aligned} \quad (1.3.22)$$

где (x_M^0, y_M^0, z_M^0) – координаты СК $Mxuz$ в базовой СК $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – координаты БЛА в базовой СК в момент времени t .

При переводе значений координат из стартовой СК в первую из применяемых при программировании полетов БЛА

маневренных СК предлагается выполнить перевод из стартовой СК в базовую СК с использованием выражений (1.3.20) и из базовой в маневренную СК – с привлечением формул (1.3.22).

Проиллюстрируем этот подход на следующем примере.

Пример 1.2.

Пусть в стартовой СК с параметрами:

$$(x_{\text{СТ}}^0, y_{\text{СТ}}^0, z_{\text{СТ}}^0) = (1000; 100; 2000) \text{ м}; \quad \Psi_{\text{СТ}} = 45^\circ$$

получены следующие взлетные характеристики БЛА (см. Разд. 3.2):

$$t_{\text{ВЗЛ}} = 20 \text{ с}; \quad x_{\text{ВЗЛ}} = 1500 \text{ м}; \quad y_{\text{ВЗЛ}} = 800 \text{ м}; \quad z_{\text{ВЗЛ}} = 0.$$

Определим по формулам (1.3.20) значения этих координат в базовой СК:

$$x(20) = 1000 + 1500 \cos 45^\circ - 0 \sin 45^\circ = 2060,66 \text{ м};$$

$$y(20) = 100 + 800 = 900 \text{ м};$$

$$z(20) = 2000 + 1500 \sin 45^\circ + 0 \cos 45^\circ = 3060,66 \text{ м}.$$

Будем считать, что выбранная маневренная СК имеет следующие параметры:

$$(x_{\text{М}}^0, y_{\text{М}}^0, z_{\text{М}}^0) = (4000; 40; 3000) \text{ м}; \quad \Psi_{\text{М}} = 60^\circ.$$

Координаты точки завершения взлета БЛА в этой СК вычислим из выражений (1.3.22):

$$x_{\text{М}}(20) = (2060,66 - 4000) \cos 60^\circ + (3060,66 - 3000) \sin 60^\circ = \\ = -1008,93 \text{ м};$$

$$y_{\text{М}}(20) = 800 - 40 = 760 \text{ м};$$

$$z_{\text{М}}(20) = -(2060,66 - 4000) \sin 60^\circ + (3060,66 - 3000) \cos 60^\circ = \\ = 1707,65 \text{ м}.$$

Рассмотрим пример перевода координат БЛА из маневренной СК в базовую СК.

Пример 1.3.

Пусть в маневренной СК с координатами начала $(x_M^0, y_M^0, z_M^0) = (1000; 40; 2000)$ м. заданы три поворотных пункта маршрута (ППМ) БЛА со следующими моментами времени t и координатами их реализации:

$$\text{ППМ1: } (t_1, x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}) = (100; 2000; 1000; 3000);$$

$$\text{ППМ2: } (t_2, x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)}) = (120; 4000; 1000; 5000);$$

$$\text{ППМ3: } (t_3, x^{(3)}, y^{(3)}, z^{(3)}) = (160; 6000; 1000; 7000).$$

Будем считать, что применяемая маневренная СК повернута относительно базовой СК на угол $\Psi_M = 30^\circ$.

Определим с использованием выражений (1.3.21) координаты ППМ в базовой СК.

Координаты ППМ1 в момент времени $t_1 = 100$ с. будут равны:

$$x^{(1)}(100) = 1000 + 2000 \cos 30^\circ - 3000 \sin 30^\circ = 1232,05 \text{ м};$$

$$y^{(1)}(100) = 40 + 1000 = 1040 \text{ м};$$

$$z^{(1)}(100) = 2000 + 2000 \sin 30^\circ + 3000 \cos 30^\circ = 5598,08 \text{ м}.$$

Координаты ППМ2 при $t_2 = 120$ с. имеют вид:

$$x^{(2)}(120) = 1000 + 4000 \cos 30^\circ - 5000 \sin 30^\circ = 1964,10 \text{ м};$$

$$y^{(2)}(120) = 40 + 1000 = 1040 \text{ м};$$

$$z^{(2)}(120) = 2000 + 4000 \sin 30^\circ + 5000 \cos 30^\circ = 8330,13 \text{ м}.$$

Третий ППМ характеризуется следующими значениями:

$$x^{(3)}(160) = 1000 + 6000 \cos 30^\circ - 7000 \sin 30^\circ = 2696,15 \text{ м};$$

$$y^{(3)}(160) = 1040 \text{ м};$$

$$z^{(3)}(160) = 2000 + 6000 \sin 30^\circ + 7000 \cos 30^\circ = 11062,18 \text{ м}.$$

Для ориентации базовой СК будем использовать направления местной геодезической СК [9, 28]. В этом случае ось

МНПУ x имеет направление на *север*, ось МНПУ z – на *восток*, а ось МНПУ y – по местной вертикали вверх.

Координаты начальных точек стартовой и применяемых маневренных СК определяются с использованием топографических карт региона полетов БЛА по существующим геодезическим методикам [28].

Аналогичным образом задается местоположение базовой СК, которое необходимо для организации взаимодействия с командованием беспилотной авиационной эскадрильи [29].

В связи с тем, что в составе современной навигационной аппаратуры БЛА (см. Рис. 1.1) широко применяются приемники спутниковых навигационных систем ГЛОНАСС/GPS [20], для определения начальных координат базовой СК предлагается использовать современную геодезическую систему координат СК-95 с начальной точкой в Пулковской астрономической обсерватории (Ленинградская обл.) [9]. Эти координаты оперативно определяются с помощью наземных приемников систем ГЛОНАСС/GPS, входящих в состав аппаратуры топопривязки МНПУ БЛА.

В заключение главы отметим особую важность и актуальность проблемы динамики полета и управления для БЛА среднего и тяжелого классов, которые решают бóльшую часть существующих и перспективных задач, поставленных мировой практикой перед беспилотной авиационной техникой.

Глава 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ПОЛЕТА БЛА

Важнейшей задачей применения БЛА [29] является задача формирования программ их полета, которая должна решаться с привлечением математических моделей движения БЛА.

В данной главе, в соответствии с Разд. 1.2, конкретизируются применительно к самолетным и вертолетной схемам БЛА уравнения движения вида (1.2.3), (1.2.4).

На основе сформированных моделей пространственного управляемого полета БЛА строятся традиционные частные модели движения в вертикальной и горизонтальной плоскостях и приводятся используемые в них конкретизации векторов косвенного управления $u(t)$.

2.1. Уравнения управляемых пространственных и плоских движений БЛА самолетных схем в геодезических (прямоугольных) координатах

В существующей литературе по динамике полета [8, 12, 14, 18, 23, 35 и др.] ЛА рассматривается как твердое тело, имеющее 6 степеней свободы, при которых реализуются 3 вида поступательных движений его ЦМ и 3 вида вращательных движений относительно ЦМ.

В скоростной системе координат (СК) динамические уравнения движения ЦМ БЛА имеют вид [9]:

$$m\dot{V} = \sum F_x; \quad (2.1.1)$$

$$mV\omega_z = \sum F_y; \quad (2.1.2)$$

$$mV \cos \theta \omega_y = \sum F_z. \quad (2.1.3)$$

Динамические уравнения вращения БЛА вокруг его ЦМ в связанной СК в общем случае записываются как [9]:

$$\begin{aligned}
J_x \dot{\omega}_x + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z &= M_x; \\
J_y \dot{\omega}_y + (J_x - J_z) \omega_x \omega_z &= M_y; \\
J_z \dot{\omega}_z + (J_y - J_x) \omega_y \omega_x &= M_z.
\end{aligned}
\tag{2.1.4}$$

В этих уравнениях использованы следующие обозначения: m – масса БЛА; $V = V(t)$ – скорость БЛА в момент времени t ; $\dot{V} = \dot{V}(t)$ – производная по времени скорости БЛА (ускорение БЛА в момент времени t); $\theta = \theta(t)$ – угол наклона траектории БЛА; $\sum F_x$, $\sum F_y$, $\sum F_z$ – суммы проекций всех сил, действующих на БЛА на оси (ЦМ x), (ЦМ y) и (ЦМ z) скоростной СК; ω_x , ω_y , ω_z – угловые скорости вращения БЛА относительно соответствующих осей связанной СК; M_x , M_y , M_z – суммы проекций моментов на эти оси всех действующих на БЛА сил относительно его ЦМ; J_x , J_y , J_z – главные центральные моменты инерции БЛА относительно осей связанной СК.

Для согласования применяемых при описании движения БЛА систем координат используются следующие уравнения [9]:

$$\begin{aligned}
\dot{\psi} &= \frac{1}{\cos \vartheta} (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma); \\
\dot{\vartheta} &= \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma; \\
\dot{\gamma} &= \omega_x - \operatorname{tg} \vartheta (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma);
\end{aligned}
\tag{2.1.5}$$

$$\begin{aligned}
\sin \theta &= \cos \alpha \cos \beta \sin \vartheta - (\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma) \cos \vartheta; \\
\sin \Psi \cos \theta &= \cos \alpha \cos \beta \sin \psi \cos \vartheta + \\
&+ \sin \alpha \cos \beta (\cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma) - \\
&- \sin \beta (\cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma);
\end{aligned}
\tag{2.1.6}$$

$$\begin{aligned}
\sin \gamma_c \cos \theta &= \cos \alpha \sin \beta \sin \vartheta - \\
&- \cos \vartheta (\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \beta \sin \gamma); \\
\dot{x} &= V \cos \theta \cos \Psi; \\
\dot{y} &= V \sin \theta; \\
\dot{z} &= V \cos \theta \sin \Psi.
\end{aligned}
\tag{2.1.7}$$

Здесь ψ , ϑ , γ – соответственно углы рыскания, тангажа и крена БЛА; Ψ – угол поворота траектории (угол курса) БЛА; α , β – углы атаки и скольжения БЛА; x , y , z – координаты БЛА в одной из земных СК, представленных на Рис. 1.11.

Система уравнений (2.1.1)-(2.1.7), включающая в себя 15 уравнений, описывает пространственное движение неуправляемого полета БЛА относительно земных осей координат.

Для описания управляемого полета БЛА в этих уравнениях необходимо использовать вектор управления $u(t)$, с помощью которого осуществляется изменение значений правых частей уравнений (2.1.1)-(2.1.7) и, следовательно, положения БЛА в пространстве.

Модель вида (2.1.1)-(2.1.7) представляет весьма трудоемкую для решения систему нелинейных дифференциальных и трансцендентных уравнений 15-го порядка, которая является практически непригодной для оперативного программирования полетов БЛА в полевых условиях их применения.

Для практической реализации таких процессов проведем упрощение указанной выше модели.

Как было отмечено в Разд. 1.2, для решения траекторных задач будем рассматривать БЛА как материальную точку массы m , движение которой описывается уравнениями (2.1.1)-(2.1.3) и (2.1.7).

Будем считать, что отмеченные выше угловые скорости $\omega_z = \dot{\theta}$ и $\omega_y = \dot{\Psi}$. Тогда уравнения (2.1.1)-(2.1.3) примут вид:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= \sum F_x; \\ mV\dot{\theta} &= \sum F_y; \\ mV \cos \theta \cdot \dot{\Psi} &= \sum F_z. \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Конкретизируем согласно правилам теоретической механики [24] правые части полученных уравнений. Известно, что на БЛА в полете действуют следующие силы, приложенные к ЦМ БЛА: $G = mg$ – сила тяжести БЛА; P – сила тяги двигателей БЛА; X – сила лобового сопротивления; Y – подъёмная сила; Z – боковая сила [9].

На Рис. 2.1 приведено расположение этих сил в плоскостях скоростной (ЦМ $x_{ск}y_{ск}$), связанной (ЦМ $x_{св}y_{св}$) и земной (ЦМ $xу$) систем координат.

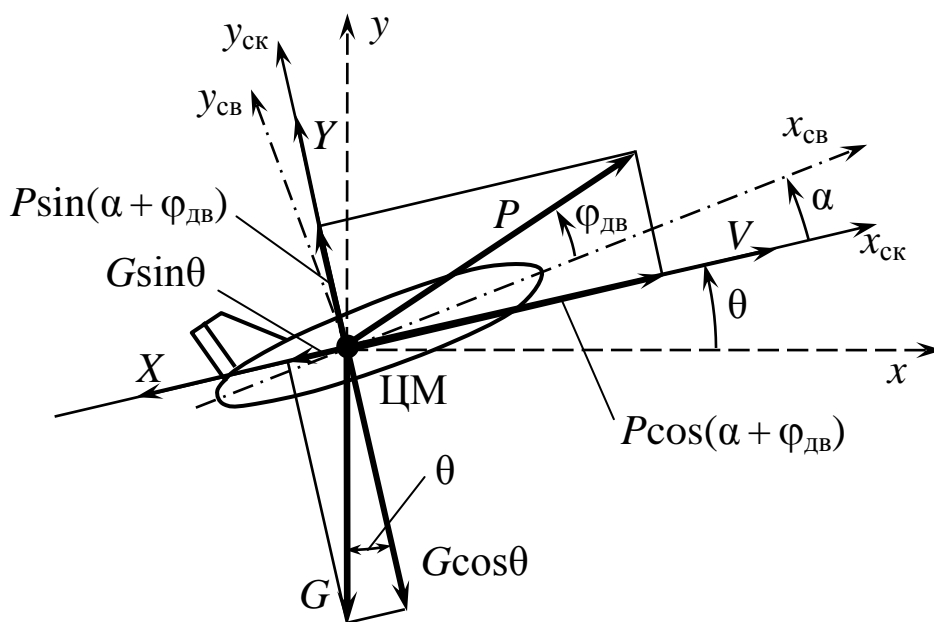


Рис. 2.1

Из этого рисунка следует, что сумма проекций сил на ось (ЦМ $x_{ск}$) имеет вид:

$$\sum F_x = P \cos(\alpha + \varphi_{дв}) - X - G \sin \theta, \quad (2.1.9)$$

где $\varphi_{дв}$ – угол установки двигателя в фюзеляже БЛА.

Соответственно сумма проекций сил на ось (ЦМ $y_{ск}$) вычисляется как:

$$\sum F_y = P \sin(\alpha + \varphi_{дв}) + Y - G \cos \theta. \quad (2.1.10)$$

Сумма сил (2.1.9) обеспечивает изменение значения вектора скорости $V(t)$ полета БЛА. В свою очередь вторая сумма

сил (2.1.10) поворачивает вектор скорости $V(t)$ вокруг ЦМ на угол θ между земной и скоростной СК.

Рассмотрим состав сил, входящих в сумму $\sum F_z$, которая обеспечивает поворот вектора скорости $V(t)$ вокруг оси (ЦМ $y_{ск}$) на угол Ψ между осями (ЦМ x) и (ЦМ $x_{ск}$). Основной способ обеспечения такого поворота, применяемый практически во всех существующих БЛА, показан на Рис. 2.2.

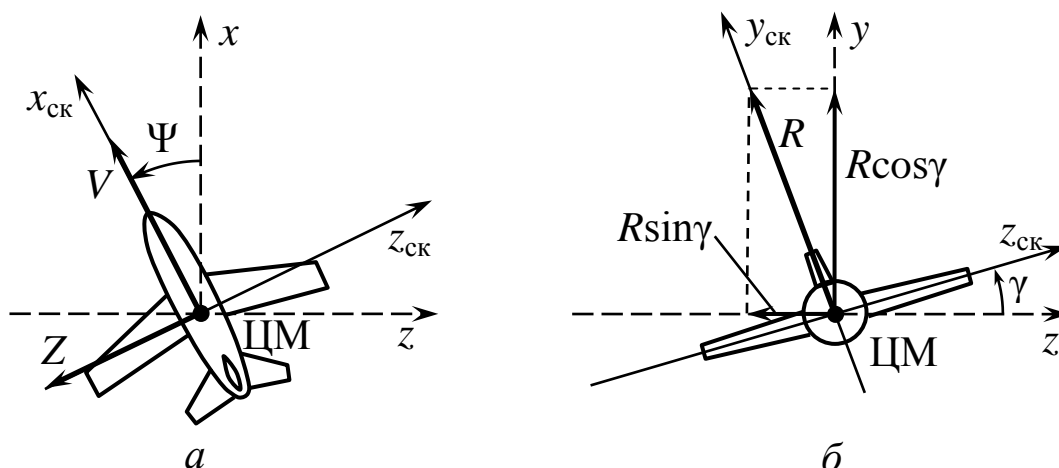


Рис. 2.2

При этом способе боковое движение БЛА осуществляет за счет угла крена γ (см. Рис. 2.2,б), возникающего при наличии соответствующего угла δ_e отклонения элеронов.

Считается, что угол скольжения β , возникающий при крене БЛА, ликвидируется соответствующим законом управления, реализуемым в составе его САУ [40].

Сила R , показанная на Рис. 2.2,б, является равнодействующей всех сил, лежащих на положительной полуоси (ЦМ $y_{ск}$) (см. Рис. 2.1) и вычисляется как:

$$R = Y + P \sin \alpha.$$

В этом случае поворот вектора скорости $V(t)$ на угол Ψ будет происходить под действием боковой силы:

$$Z = (Y + P \sin \alpha) \sin \gamma = \sum F_z. \quad (2.1.11)$$

Таким образом, уравнения (2.1.8) после подстановки в них выражений (2.1.9)-(2.1.11) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= P \cos(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) - X - mg \sin \theta; \\ mV\dot{\theta} &= (P \sin(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y) \cos \gamma - mg \cos \theta; \\ mV \cos \theta \cdot \dot{\Psi} &= (P \sin(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y) \sin \gamma. \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Упростим полученные выражения. В уравнения (2.1.12) входят углы α и β , которые, как показала практика реальных полетов БЛА, не превышают в сумме 20° ($0,349$ рад).

В связи с тем, что $\sin 20^\circ = 0,342$, $\cos 20^\circ = 0,940$, можно считать, что:

$$\sin(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) \approx \alpha + \varphi_{\text{дв}},$$

с ошибкой, не превышающей 2%.

Замена вида:

$$\cos(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) \approx 1$$

дает ошибку не более 6%.

Такие значения ошибок являются допустимыми в инженерных расчётах, поэтому систему уравнений (2.1.12) можно представить в следующем упрощенном виде:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= P - X - mg \sin \theta; \\ mV\dot{\theta} &= (P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y) \cos \gamma - mg \cos \theta; \\ mV \cos \theta \cdot \dot{\Psi} &= (P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y) \sin \gamma. \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

В нормальной форме записи, принятой в теории обыкновенных дифференциальных уравнений [9], эта система уравнений записывается как:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{P - X}{m} - g \sin \theta, \quad t \in [t_0, t_k]; \\ \dot{\theta} &= \frac{(P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y) \cos \gamma}{mV} - \frac{g}{V} \cos \theta; \\ \dot{\Psi} &= \frac{(P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y) \sin \gamma}{mV \cos \theta}. \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

Для получения полных моделей пространственного движения БЛА к динамическим уравнениям (2.1.14) должны быть добавлены кинематические уравнения вида (2.1.7).

Используя это дополнение, получаем модель **пространственного движения БЛА** на интервале времени $[t_0, t_k]$ вида:

$$\dot{V} = \frac{P - X}{m} - g \sin \theta, \quad t \in [t_0, t_k]; \quad (2.1.15)$$

$$\dot{\theta} = \frac{(P(\alpha + \varphi_{дв}) + Y) \cos \gamma}{mV} - \frac{g}{V} \cos \theta; \quad (2.1.16)$$

$$\dot{\Psi} = \frac{(P(\alpha + \varphi_{дв}) + Y) \sin \gamma}{mV \cos \theta}; \quad (2.1.17)$$

$$\dot{x} = V \cos \theta \cos \Psi; \quad (2.1.18)$$

$$\dot{y} = V \sin \theta; \quad (2.1.19)$$

$$\dot{z} = V \cos \theta \sin \Psi, \quad (2.1.20)$$

которая в основном будет использована как базовая при формировании программного управления БЛА.

Начальные условия для этой системы дифференциальных уравнений, которые задают характеристики исходного положения БЛА в пространстве, имеют вид:

$$V(t_0) = V_0; \quad \theta(t_0) = \theta_0; \quad \Psi(t_0) = \Psi_0; \quad (2.1.21)$$

$$x(t_0) = x_0; \quad y(t_0) = y_0; \quad z(t_0) = z_0. \quad (2.1.22)$$

Система (2.1.15)-(2.1.20) включает в себя 6 уравнений и 9 неизвестных функций: $V(t)$, $\theta(t)$, $\Psi(t)$, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $P(t)$, $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$.

Движение БЛА по требуемой траектории обеспечивается выбором соответствующих законов управления тягой $P = P(t)$, углом атаки $\alpha = \alpha(t)$ и углом крена $\gamma = \gamma(t)$, $t \in [t_0, t_k]$.

Эти функции подставляются в правые части уравнений (2.1.15)-(2.1.17), и полученная замкнутая система уравнений (2.1.15)-(2.1.20) может быть проинтегрирована при начальных

условиях (2.1.21), (2.1.22) одним из численных методов, описанных в работе [9].

Процесс решения задачи Коши (2.1.15)-(2.1.22) при заданном векторе управления:

$$u(t) = (P(t), \alpha(t), \gamma(t)),$$

удовлетворяющем соответствующим ограничениям, будем называть моделированием управляемого движения БЛА на интервале времени $[t_0, t_k]$.

Аэродинамические силы X , Y , и Z представляются в динамике полета БЛА следующими выражениями [9]:

$$\begin{aligned} X &= 0,5c_x \rho V^2 S; \\ Y &= 0,5c_y \rho V^2 S; \\ Z &= 0,5c_z \rho V^2 S. \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

Здесь c_x , c_y , c_z – безразмерные коэффициенты лобового сопротивления, подъемной и боковой сил БЛА; $\rho = \rho(y)$ – плотность воздуха на соответствующей высоте y полета БЛА. Значения ρ вычисляются в зависимости от учитываемых внешних условий по формулам (1.3.12) или (1.3.18).

Кроме этого, в выражения (2.1.23) входят текущая скорость полета V и площадь S крыла БЛА.

Конкретизируем вид зависимостей $c_x = c_x(\alpha, V, y)$, $c_y = c_y(\alpha, V, y)$, входящих в выражения (2.1.23).

Отметим, что в существующих работах (см. библиографию работы [9]), посвященных вопросам моделирования полета ЛА и БЛА, построение таких зависимостей применительно к конкретному образцу БЛА не рассматривались.

Приведем методику формирования этих зависимостей по результатам аэродинамических продувок конкретного образца БЛА [9].

Представим коэффициент подъемной силы БЛА выражением вида [9]:

$$c_y = c_y^\alpha (\alpha - \alpha_0), \quad (2.1.24)$$

где c_y^α – производная c_y по углу атаки α ; $\alpha_0 < 0$ – демпфирующее значение угла атаки.

При использовании конкретного значения угла α_0 из этой формулы следует, что:

$$c_y = c_y^\alpha \alpha_0 + c_y^\alpha \alpha. \quad (2.1.25)$$

Значение c_{y0} коэффициента c_y при $\alpha = 0$ определяется как:

$$c_{y0} = c_y^\alpha \alpha_0. \quad (2.1.26)$$

Пусть из результатов продувок БЛА в аэродинамической трубе получена экспериментальная зависимость производной c_y^α от числа Маха (M) в виде таблицы значений:

$$(M_i, c_{yi}^\alpha), \quad i = (\overline{1, k}).$$

Аппроксимируя эти данные линейной зависимостью, получим:

$$c_y^\alpha(M) = d_0 + d_1 M, \quad (2.1.27)$$

где d_1 и d_2 – коэффициенты определены методом наименьших квадратов [21].

Отметим, что для повышения точности аппроксимации могут быть использованы полиномы более высоких порядков [9].

В этом случае исходные выражения (2.1.25) и (2.1.26) конкретизируются как:

$$\begin{aligned} c_y(\alpha, M) &= (d_0 + d_1 M)(\alpha + \alpha_0); \\ c_{y0}(M) &= \alpha_0(d_0 + d_1 M) = b_0 + b_1 M. \end{aligned} \quad (2.1.28)$$

Будем определять коэффициент лобового сопротивления БЛА по формуле [9]:

$$c_x = c_{x0} + Ac_y^2, \quad (2.1.29)$$

где c_{x0} – значение этого коэффициента при нулевой подъемной силе; A – коэффициент, зависящий от геометрических характеристик крыла БЛА.

Экспериментальные значения зависимости $c_{x0}(M)$, полученные из графиков поляры БЛА при $c_y = 0$ и различных значениях числа M имеют вид следующего массива значений:

$$(M_j, c_{x0j}), \quad j = (\overline{1, r})$$

Линейная аппроксимация этих данных записывается как:

$$c_{x0}(M) = c_0 + c_1 M,$$

где c_0, c_1 – коэффициенты аппроксимации, определяемые указанным выше методом.

Следуя работе [9], коэффициент A будем вычислять по формуле:

$$A = \frac{1}{\pi \lambda_{\text{эф}}}, \quad (2.1.30)$$

где эффективное удлинение $\lambda_{\text{эф}}$ крыла БЛА определяется выражением вида:

$$\lambda_{\text{эф}} = \frac{1}{1 + (\pi \lambda / 100 \cos^2 \chi)}. \quad (2.1.31)$$

Геометрическое удлинение крыла БЛА, входящее в это выражение, вычисляется как:

$$\lambda = l / b_A. \quad (2.1.32)$$

В формулах (2.1.30)-(2.1.32) использованы следующие обозначения: χ – угол стреловидности крыла; b_A – средняя аэродинамическая хорда (САХ) крыла; l – размах крыльев БЛА.

С учетом зависимостей для коэффициентов c_{x0} , c_y и значения A выражение (2.1.29) приобретает вид:

$$c_x(\alpha, M) = (c_0 + c_1 M) + A(d_0 + d_1 M)^2 (\alpha + \alpha_0)^2. \quad (2.1.33)$$

Представим зависимости $c_x(\alpha, M)$ и $c_y(\alpha, M)$ как функции скорости полета V и высоты y . Известно, что $M = V/a$, где $a = a(y)$ – скорость звука на высоте y .

Тогда выражения для c_y и c_x , которые используются для конкретизации зависимостей (2.1.23), примут следующий вид:

$$\begin{aligned} c_y(\alpha, V, y) &= c_{y0}(V, y) + c_y^\alpha(V, y)\alpha = \\ &= \left(b_0 + \frac{b_1}{a(y)}V \right) + \left(d_0 + \frac{d_1}{a(y)}V \right)\alpha; \end{aligned} \quad (2.1.34)$$

$$\begin{aligned} c_x(\alpha, V, y) &= \left(c_0 + \frac{c_1}{a(y)}V \right) + \\ &+ A \left(d_0 + \frac{d_1}{a(y)}V \right)^2 (\alpha + \alpha_0)^2, \end{aligned} \quad (2.1.35)$$

где зависимость скорости звука от высоты $a = a(y)$ описывается при учете внешних условий эксплуатации БЛА формулами (1.3.14).

Пример 2.1

Сформируем аэродинамические характеристики одного из образцов БЛА среднего класса, оснащенного силовой установкой на базе ТРД, параметры которого представлены в Табл. 2.1.

При $\alpha_0 = -0,4^\circ = -0,007$ рад выражение (2.1.24) конкретизируется как:

$$c_y = 0,007c_y^\alpha + c_y^\alpha\alpha.$$

В этом случае формула (2.1.26) для вычисления значения c_{y0} принимает вид:

$$c_{y0} = 0,007c_y^\alpha.$$

Полученная в результате продувок БЛА экспериментальная зависимость производной c_y^α от числа Маха (M) представлена в Табл. 2.2.

Таблица 2.1

Параметры БЛА	Значения параметров
Масса БЛА	$m = 350$ кг
Площадь крыла	$S = 1,4$ м ²
Угол стреловидности крыла	$\chi = 0$ град.
Размах крыла	$l = 2,64$ м
Средняя аэродинамическая хорда (САХ) крыла	$b_A = 0,546$ м
Угол установки двигателя БЛА	$\varphi_{дв} = 3,5$ град.
Диапазон тяг маршевого двигателя	$P_{\min} = 58,86$ Н, $P_{\max} = 1208,65$ Н
Диапазон допустимых углов атаки	$\alpha_{\min} = -6$ град., $\alpha_{\max} = +14$ град.
Балансировочный угол атаки	$\alpha_0 = -0,4^\circ$
Диапазон изменения угла крена	± 65 град.
Диапазон изменения угла скольжения	± 10 град.
Максимальная эксплуатационная перегрузка	$n_y^{\max} = -3 \dots +9$
Диапазон скоростей полета	$V_{\min} = 80,55$ м/с. $V_{\max} = 200$ м/с.
Диапазон высот полета	$h_{\min} = 300$ м, $h_{\max} = 9000$ м.
Центральные моменты инерции	$J_x = 2,1$ кг м/с, $J_y = 31$ кг м/с, $J_z = 30$ кг м/с

Таблица 2.2

M	0,13	0,35	0,5	0,6	0,7	0,74	0,78	0,82
c_y^α , рад ⁻¹	4,5	4,75	4,92	5,02	5,23	5,43	5,43	5,18

Аппроксимируя эти данные при $M \in [0,13; 0,82]$ методом наименьших квадратов линейной зависимостью вида (2.1.27), имеем:

$$c_y^\alpha(M) = 4,312 + 1,291M.$$

Графическое представление этой зависимости и данных из Табл. 2.2 приведены на Рис. 2.3.

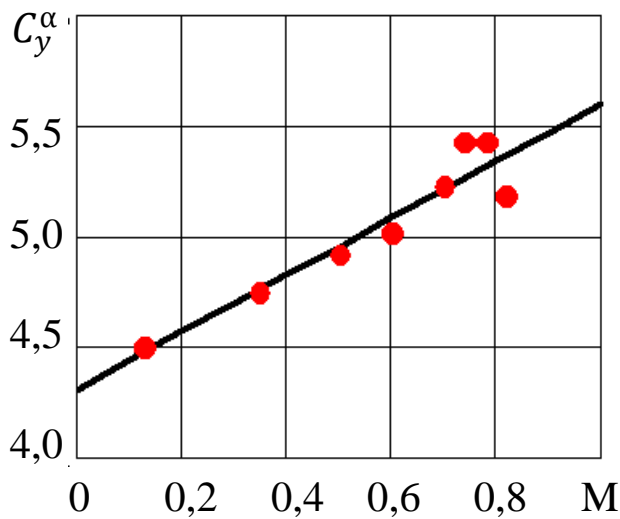


Рис. 2.3

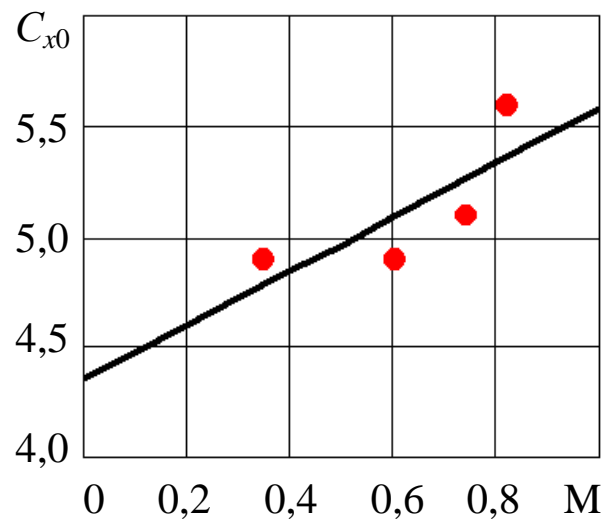


Рис. 2.4

В этом случае выражения (2.1.28) конкретизируются как:

$$\begin{aligned}
 c_{y0}(M) &= -0,007(4,312 + 1,291M) = \\
 &= -0,03018 - 0,009M; \\
 c_y(\alpha, M) &= (4,312 + 1,291M)(\alpha + 0,007).
 \end{aligned}
 \tag{2.1.36}$$

Экспериментальные значения входящей в выражение (2.1.29) зависимости $c_{x0}(M)$, полученные из графиков поляры БЛА при $c_y = 0$ и $M \in [0,35; 0,82]$, представлены в Табл. 2.3.

Таблица 2.3

M	0,35	0,6	0,74	0,82
c_{x0}	0,028	0,028	0,032	0,042

Линейная аппроксимация этих данных имеет вид (Рис. 2.4):

$$c_{x0}(M) = 0,017 + 0,025M.$$

Вычисления по формулам (2.1.30)-(2.1.32) с использованием данных из Табл. 2.1 дают значение параметра $A = 0,0759$.

С учетом полученных выше результатов выражение для коэффициента c_x определяется как:

$$\begin{aligned}
 c_x(\alpha, M) &= (0,017 + 0,025M) + \\
 &+ (1,188 + 0,356M)^2 (\alpha + 0,007)^2.
 \end{aligned}$$

Представим зависимости $c_x(\alpha, M)$ и $c_y(\alpha, M)$ как функции скорости полета V и скорости звука a . Будем считать, что скорость звука описывается выражением (1.3.15).

Тогда выражения (2.1.34) и (2.1.35) примут вид:

$$c_x(\alpha, V, y) = \left(0,017 + \frac{0,025V}{a_0 - a_1 y} \right) + \left(1,188 + \frac{0,356V}{a_0 - a_1 y} \right) (\alpha + 0,007)^2; \quad (2.1.37)$$

$$c_y(\alpha, V, y) = \left(4,312 + \frac{1,291V}{a_0 - a_1 y} \right) (\alpha + 0,007)^2.$$

Таким образом, использованные в выражениях (2.1.15)-(2.1.20) аэродинамические силы X, Y при моделировании управляемого движения БЛА должны рассматриваться как функции вида:

$$X = X(\alpha, V, y); \quad Y = Y(\alpha, V, y), \quad (2.1.38)$$

для конкретизации которых используются формулы (2.1.23), (1.3.15), (2.1.25)-(2.1.35).

Отметим, что для практического использования зависимостей (2.1.38) в моделях движения БЛА персонал БАК должен получить от разработчика БЛА готовые для применения зависимости $c_x(\alpha, V, y)$ и $c_y(\alpha, V, y)$.

Пример 2.2.

Проведем в некоторой маневренной СК (см. Рис. 1.11) моделирование пространственного движения БЛА на интервале времени $[t_0, t_k] = [0, 600]$ с. путем решения задачи (2.1.15)-(2.1.22).

Используя данные Табл. 2.1, а также зависимости (1.3.12), (1.3.15), (2.1.23), (2.1.37), решаемая система дифференциальных уравнений полета рассматриваемого БЛА конкретизируется как:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \frac{1}{350} \left(P(t) - 0,5 \left[\left(0,017 + \frac{0,025V}{340,192 - 0,004y} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(1,188 + \frac{0,356V}{340,192 - 0,004y} \right)^2 (\alpha(t) + 0,007)^2 \right] \times \right. \\ & \left. \times 1,225e^{-0,0001y} V^2 \cdot 1,4 \right) - 9,81 \sin \theta; \\ \dot{\theta} = & \frac{1}{350V} \left[P(t)(\alpha(t) + 0,061) + 0,5 \left(4,312 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1,291V}{340,192 - 0,004y} \right) (\alpha(t) + 0,007) \right] \times \\ & \left. \times 1,225e^{-0,0001y} V^2 \cdot 1,4 \right] \cos \gamma(t) - \frac{9,81 \cos \theta}{V}; \end{aligned} \quad (2.1.39)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} = & \frac{1}{350V \cos \theta} \left[P(t)(\alpha(t) + 0,061) + \right. \\ & \left. + 0,5 \left(4,312 + \frac{1,291V}{340,192 - 0,004y} \right) (\alpha(t) + 0,007) \times \right. \\ & \left. \times 1,225e^{-0,0001y} V^2 \cdot 1,4 \right] \sin \gamma(t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V \cos \theta \cos \Psi; \\ \dot{y} &= V \sin \theta; \\ \dot{z} &= V \cos \theta \sin \Psi. \end{aligned} \quad (2.1.40)$$

Будем решать эту систему уравнений при следующих значениях компонент вектора $u(t)$ косвенного управления БЛА:

$$\begin{aligned} P(t) &= 306,814 \text{ Н}; \quad \alpha(t) = 4,84^\circ = 0,084 \text{ рад}; \\ \gamma(t) &= 0^\circ = 0 \text{ рад}; \quad t \in [0, 600] \text{ с}. \end{aligned} \quad (2.1.41)$$

и начальных условиях вида (2.1.21), (2.1.22):

$$\begin{aligned} V(0) &= 105,683 \text{ м/с}; \quad \theta(0) = 0 \text{ рад} = 0^\circ; \\ \Psi(0) &= 0,908 \text{ рад} = 52,0255^\circ; \\ y(0) &= 2000 \text{ м}; \quad z(0) = 10000 \text{ м}. \end{aligned} \quad (2.1.42)$$

Результаты численного интегрирования системы (2.1.39), (2.1.40) представлены с шагом печати $\Delta t = 40$ с. в Табл. 2.4.

В этой таблице для удобства анализа значения углов наклона $\theta(t)$ и поворота $\Psi(t)$ траектории БЛА переведены в градусы.

Из проведенного вычислительного эксперимента следует, что рассматриваемый БЛА при реализации управления (2.1.41) осуществляет горизонтальный полет со скоростью $V(t) = 105,683$ м/с = 380,5 км/ч между точками с координатами:

$$(x_0, y_0, z_0) = (1000, 2000, 10000) \text{ м.}$$

$$(x_k, y_k, z_k) = (40000, 1983, 59970) \text{ м.}$$

При этом можно отметить, что незначительные отклонения (менее 1%) полученных значений от их постоянных величин являются следствием приближенно характера применяемого численного метода интегрирования системы уравнений (2.1.39), (2.1.40).

Таблица 2.4

t , с.	V , м/с	θ , град.	Ψ , град.	x , м	y , м	z , м
0	105,683	0	52,025	1000	2000	10000
40	105,690	-0,007	52,025	3601	1999	13330
80	105,686	-0,015	52,025	6202	1998	16660
120	105,676	-0,019	52,025	8803	1996	20000
160	105,666	-0,019	52,025	11400	1995	23330
200	105,658	-0,017	52,025	14000	1994	26660
240	105,652	-0,015	52,025	16610	1993	29990
280	105,647	-0,014	52,025	19210	1992	33320
320	105,643	-0,014	52,025	21810	1991	36650
360	105,638	-0,015	52,025	24410	1990	39980
400	105,632	-0,015	52,025	27010	1989	43320
440	105,626	-0,015	52,025	29610	1988	46650
480	105,620	-0,015	52,025	32210	1986	49980
520	105,615	-0,015	52,025	34800	1985	53310
560	105,609	-0,015	52,025	37400	1984	56640
600	105,604	-0,015	52,025	40000	1983	59970

Как показала практика, существующие БЛА в процессе решения ими целевых задач имеют траектории полета, находящиеся строго в вертикальной или горизонтальной плоскостях.

При программировании полетов БЛА в *вертикальной плоскости* от общей модели (2.1.15)-(2.1.22) можно перейти к более простой частной модели движения БЛА.

Полеты БЛА в вертикальной плоскости характерны тем, что углы $\gamma(t) \equiv 0$ и $\Psi(t) \equiv 0$. Из последнего следует, что угловая скорость $\dot{\Psi}(t) \equiv 0, t \in [t_0, t_k]$.

Подставляя эти значения в уравнения (2.1.15)-(2.1.20), получим модель продольного движения БЛА вида:

$$\dot{V} = \frac{P - X}{m} - g \sin \theta, \quad t \in [t_0, t_k]; \quad (2.1.43)$$

$$\dot{\theta} = \frac{P(\alpha + \varphi_{дв}) + Y}{mV} - \frac{g}{V} \cos \theta; \quad (2.1.44)$$

$$\dot{x} = V \cos \theta; \quad (2.1.45)$$

$$\dot{y} = V \sin \theta; \quad (2.1.46)$$

со следующими начальными условиями:

$$V(t_0) = V_0; \quad \theta(t_0) = \theta_0; \quad x(t_0) = x_0; \quad y(t_0) = y_0. \quad (2.1.47)$$

В связи с тем, что сила лобового сопротивления X и подъемная сила Y представляются в этих уравнениях функциями вида (2.1.38), то любая траектория БЛА самолетных схем (СС) в вертикальной плоскости может быть получена при выборе соответствующих векторов косвенного (инвариантного к их конструктивной реализации) управления:

$$u(t) = (P(t), \alpha(t)). \quad (2.1.48)$$

Пример 2.3.

Рассмотрим полет БЛА в вертикальной плоскости некоторой маневренной СК при следующих значениях вектора управления (2.1.48):

$$P(t) = 292,782 \text{ Н}; \quad \alpha(t) = 5,793^\circ = 0,101 \text{ рад.}, \quad t \in [0, 400] \text{ с.}$$

Система уравнений (2.1.43)-(2.1.46) с использованием данных и зависимостей из Примера 2.2 конкретизируется как:

$$\dot{V} = \frac{1}{350} \left(P(t) - 0,5 \left[\left(0,017 + \frac{0,025V}{340,192 - 0,004y} \right) + \left(1,188 + \frac{0,356V}{340,192 - 0,004y} \right)^2 (\alpha(t) + 0,007)^2 \right] \times \right. \\ \left. \times 1,225e^{-0,0001y} V^2 \cdot 1,4 \right) - 9,81 \sin \theta;$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{350V} \left[P(t)(\alpha(t) + 0,061) + 0,5 \left(4,312 + \frac{1,291V}{340,192 - 0,004y} \right) \times \right. \\ \left. \times (\alpha(t) + 0,007) \cdot 1,225e^{-0,0001y} V^2 \cdot 1,4 \right] - \frac{9,81}{V} \cos \theta;$$

$$\dot{x} = V \cos \theta;$$

$$\dot{y} = V \sin \theta.$$

Эту систему будем решать на интервале времени $[0, 400]$ с. при следующих начальных условиях вида (2.1.47):

$$V(0) = 97,5 \text{ м/с.}; \quad \theta(0) = 0^\circ; \quad x(0) = 1000 \text{ м}; \quad y(0) = 2000 \text{ м.}$$

Результаты ее численного интегрирования с шагом печати $\Delta t = 40$ с. приведены в Табл. 2.5.

Таблица 2.5

$t, \text{ с.}$	$V, \text{ м/с}$	$\theta, \text{ град.}$	$x, \text{ м}$	$y, \text{ м}$
0	97,5	0	1000	2000
40	97,502	0,001150	4900	2000
80	97,503	0,001519	8800	2000
120	97,504	0,001446	12700	2000
160	97,505	0,001183	16600	2000
200	97,505	0,000887	20500	2000
240	97,505	0,000637	24400	2000
280	97,505	0,000461	28300	2000
320	97,505	0,000355	32200	2000
360	97,506	0,000305	36100	2000
400	97,506	0,000290	40000	2000

Из этой таблицы следует, что рассматриваемый БЛА при указанном выше управлении осуществляет на интервале времени $[0, 400]$ с. прямолинейный горизонтальный полет на высоте $h = 2000$ м. с постоянной скоростью $V = 97,5$ м/с.

При моделировании полетов БЛА в *горизонтальной плоскости* на постоянной высоте h в интервале времени $[t_0, t_k]$ необходимо использовать общую модель вида (2.1.15)-(2.1.20) с начальными условиями:

$$\begin{aligned} V(t_0) = V_0; \quad \theta(t_0) = 0; \quad \Psi(t_0) = \Psi_0; \\ x(t_0) = x_0; \quad y(t_0) = h; \quad z(t_0) = z_0. \end{aligned} \quad (2.1.49)$$

При этом вектор косвенного управления БЛА СС имеет вид:

$$u(t) = (P(t), \alpha(t), \gamma(t)), \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (2.1.50)$$

Пример 2.4.

Пусть рассматриваемый БЛА должен осуществить полет в интервале времени $[0, 257,4]$ с. на постоянной высоте $h = 3000$ м. при следующих начальных условиях вида (2.1.49) и управлении (2.1.50):

$$\begin{aligned} V(0) = 100 \text{ м/с}; \quad \theta(0) = 0^\circ; \quad \Psi(0) = -45^\circ = -0,785 \text{ рад.} \\ x(0) = 56568 \text{ м}; \quad y(0) = 3000 \text{ м}; \quad z(0) = 56568 \text{ м}; \\ P(t) = 296,102 \text{ Н}; \quad \alpha(t) = 6,152^\circ = 0,107 \text{ рад.} \\ \gamma(t) = -0,730^\circ = -0,013 \text{ рад.}, \quad t \in [0, 257,4] \text{ с.} \end{aligned}$$

Проводя при этих значениях численное интегрирование системы уравнений (2.1.39), (2.1.40), получаем результаты с шагом печати $\Delta t = 25,739$ с., представленные в Табл. 2.6.

Из этой таблицы следует, что условие движения БЛА на постоянной высоте выполняется с погрешностью менее 1%.

Таблица 2.6

$t, c.$	$V, м/с$	$\theta, град.$	$\Psi, град.$	$x, м$	$y, м$	$z, м$
0	100	0	-44,977	56568,00	3000	56568,00
25,739	99,194	-0,083	-46,828	54718,97	3011	58358,44
51,478	99,680	0,268	-48,682	52813,30	3008	60088,47
77,217	99,569	-0,146	-50,530	50852,97	3012	61756,31
102,956	99,450	0,185	-52,384	48840,00	3015	63360,22
128,695	99,710	0,003	-54,233	46776,47	3015	64898,54
154,434	99,472	0,039	-56,084	44664,53	3020	66369,69
180,173	99,659	0,103	-57,935	42506,36	3021	67772,14
205,912	99,591	-0,004	-59,784	40304,18	3024	69104,44
231,651	99,599	0,098	-61,634	38060,29	3026	70365,20
257,390	99,664	0,028	-63,484	35777,00	3028	71553,13

2.2. Уравнения движения БЛА самолетных схем в географических координатах

В настоящее время можно отметить общемировую тенденцию применения в составе САУ современных и перспективных БЛА аппаратуры спутниковых навигационных систем ГЛОНАС/GPS [9, 20]. Эта аппаратура позволяет с достаточной для практики точностью определять текущие значения местоположения и компонент скорости БЛА в прямоугольных геодезических (x, y, z, V_x, V_y, V_z) и географических (долгота λ , широта φ , высота h , $V_\lambda, V_\varphi, V_h$) координатах. Последние в основном используются при программировании полетов БЛА дальнего действия и большой продолжительности полета, а также при организации полетов БЛА корабельного и прибрежного базирования над морскими и океанскими акваториями.

Достаточно подробно вывод уравнений управляемого полета БЛА в географических координатах приведен в работах [8, 9, 22]. При проведении расчетов в таких координатах фор-

ма Земли (геоид) описывается общим земным эллипсоидом, применяемым в глобальной СК WGS-84 с параметрами:

$a_{\text{общ}} = 6378137$ км – радиус экватора Земли;

$\alpha_{\text{общ}} = (a_{\text{общ}} - b_{\text{общ}}) / a_{\text{общ}} = 1/298,2572$ – сжатие эллипсоида,

где $b_{\text{общ}}$ – размер малой полуоси эллипсоида.

В глобальной СК ПЗ-90 на территории бывшего СССР применяется эллипсоид Красовского с параметрами

$a_{\text{К}} = 6378136$ км; $\alpha_{\text{К}} = 1/298,2578$.

Положение БЛА в географической СК описывается параметрами, представленными на Рис. 2.5.

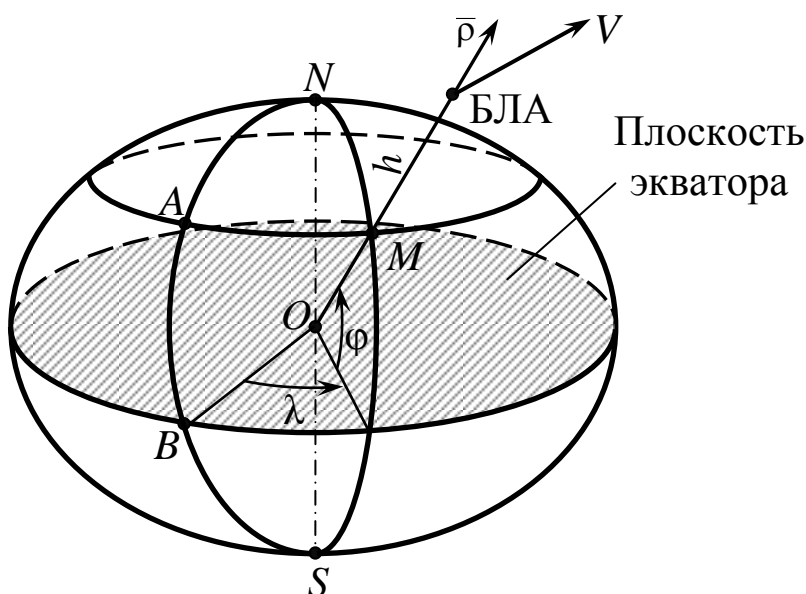


Рис. 2.5

На этом рисунке обозначены:

- *долгота* λ – двугранный угол между плоскостями Гринвичского меридиана NABS и местного меридиана, проходящего через точку M.

Долготы, лежащие восточнее Гринвичского меридиана, считаются положительными ($\lambda > 0$), а западнее – отрицательными ($\lambda < 0$);

- *широта* φ – угол между плоскостью экватора и радиус-вектором \bar{r} , проведенным из центра земного эллипсоида O

через точку M . При этом, $\varphi > 0$ для точек севернее экватора и $\varphi < 0$ – для южных точек;

- *высота* h – расстояние по радиус-вектору $\bar{\rho}$ от поверхности эллипсоида (от уровня моря) в точке M до местоположения БЛА.

В дальнейшем вместо параметра h будет использоваться параметр r – расстояние от точки O до ЦМ БЛА по радиус-вектору $\bar{\rho}$.

Кинематические дифференциальные уравнения, описывающие изменение координат λ , φ и r при движении ЦМ БЛА в геоцентрической СК, имеют вид [9]:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{V}{r} \cos \Psi \cos \theta; \\ \dot{\lambda} &= \frac{V \sin \Psi \cos \theta}{r \cos \varphi}; \\ \dot{r} &= V \sin \theta.\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

Динамические уравнения движения ЦМ БЛА в предположениях, что:

$$\sin(\alpha + \varphi_{\text{ДВ}}) \cong (\alpha + \varphi_{\text{ДВ}}); \quad \cos(\alpha + \varphi_{\text{ДВ}}) \cong 1, \quad \beta = 0; \quad Z = 0,$$

записываются как [9]:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{P - X(\alpha, V, h)}{m} - g \sin \theta; \\ \dot{\theta} &= \left(\frac{V}{r} - \frac{g}{V} \right) \cos \theta + \\ &+ \frac{1}{mV} [P(\alpha + \varphi_{\text{ДВ}}) + Y(\alpha, V, h)] \cos \gamma; \\ \dot{\Psi} &= \frac{V}{r} \operatorname{tg} \varphi \sin \Psi \cos \theta + \\ &+ \frac{1}{mV \cos \theta} [P(\alpha + \varphi_{\text{ДВ}}) + Y(\alpha, V, h)] \sin \gamma.\end{aligned}\tag{2.2.2}$$

Здесь углы $\theta = \theta(t)$ и $\Psi = \Psi(t)$ измеряются в выбранной маневренной СК ($Mx_r y_r z_r$).

Текущая высота полета БЛА, от которой зависят значения сил X , Y и P вычисляется по следующей формуле:

$$h(t) = r(t) - a \sqrt{\frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos \varphi(t)}}, \quad (2.2.3)$$

где $\varphi(t)$, $r(t)$ – результаты интегрирования системы (2.2.1); e – эксцентриситет земного эллипсоида, равный:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Вычисляя по данной формуле этот параметр с использованием приведенных выше характеристик общего эллипсоида и эллипсоида Красовского, имеем:

$$e_{\text{общ}}^2 = 9,5769 \cdot 10^{-3}; \quad e_{\text{К}}^2 = 6,6934 \cdot 10^{-3}.$$

Тогда из выражения (2.2.3) с учетом различных значений параметров a и e^2 для разных эллипсоидов следует, что высота $h(t)$ полетов БЛА будет принимать различные значения при их полетах над территорией бывшего СССР и вне этой территории.

Для эллипсоида Красовского выражение (2.2.3) конкретизируется как:

$$\begin{aligned} h(t) &= r(t) - 6378136 \sqrt{\frac{1 - 6,6934 \cdot 10^{-3}}{1 - 6,6934 \cdot 10^{-3} \cos \varphi(t)}} = \\ &= r(t) - \frac{6355984,536}{\sqrt{1 - 6,6934 \cdot 10^{-3} \cos \varphi(t)}}. \end{aligned}$$

Дифференцируя это выражение по t , получим:

$$\dot{h} = \dot{r} + \frac{22036,198 \sin \varphi}{\sqrt{(1 - 0,00693 \cos \varphi)^3}} \dot{\varphi}.$$

Подставляя в эту формулу правые части первого и третьего уравнений системы (2.2.1), получаем дифференциальное уравнение вида:

$$\dot{h} = V \sin \theta + \frac{22036,198 V \cos \Psi \cos \theta \sin \varphi}{r \sqrt{(1 - 0,00693 \cos \varphi)^3}}. \quad (2.2.4)$$

Аналогичным образом можно записать такое уравнение для общего эллипсоида.

Таким образом, математическая модель управляемого пространственного полета БЛА в географических координатах λ , φ , r для эллипсоида Красовского представляется системой дифференциальных уравнений (2.2.1), (2.2.2), (2.2.4), которые интегрируются на интервале времени $[t_0, t_k]$ при следующих начальных условиях:

$$\begin{aligned} \varphi(t_0) = \varphi_0; \quad \lambda(t_0) = \lambda_0; \quad r(t_0) = r_0; \\ h(t_0) = h_0; \quad V(t_0) = V_0; \quad \theta(t_0) = \theta_0; \quad \Psi(t_0) = \Psi_0. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

При этом вследствие выражения (2.2.3) значения λ_0 , φ_0 и r_0 связаны соотношением вида:

$$h_0 - r_0 + a_K \sqrt{\frac{1 - e_K^2}{1 - e_K^2 \cos \varphi_0}} = 0.$$

Одним из распространенных режимов полетов БЛА являются полеты на постоянной высоте $h(t) = h = \text{const}$. В этом случае из выражения (2.2.3) получаем зависимость вида:

$$r(\varphi) = h + a \sqrt{\frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos \varphi}}. \quad (2.2.6)$$

Тогда кинематические уравнения движения БЛА вида (2.2.1) конкретизируются как:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{V}{r(\varphi)} \cos \theta \cos \Psi; \\ \dot{\lambda} &= \frac{V \cos \theta \sin \Psi}{r(\varphi) \cos \varphi},\end{aligned}\tag{2.2.7}$$

где $r(\varphi)$ задается формулой (2.2.6).

Таким образом, частная модель управляемого полета БЛА над земным эллипсоидом на постоянной высоте h представляется системой уравнений (2.2.2), (2.2.7), в которые подставлена зависимость $r = r(\varphi)$ вида (2.2.6).

Отметим, что в предложенных в данном разделе моделях движения БЛА управлением является вектор:

$$u(t) = (P(t), \alpha(t), \gamma(t)), \quad t \in [t_0, t_k].\tag{2.2.8}$$

Пример 2.5.

Пусть рассматриваемый БЛА в течение 1 часа должен осуществить полет на постоянной высоте $h = 2000$ м из точки с начальными координатами: $\varphi_0 = 55^\circ 47'$ с.ш.; $\lambda_0 = 49^\circ 06'$ в.д.

Начальные параметры его движения, взятые из Примера 2.2, имеют вид:

$$V_0 = 105,683 \text{ м/с}; \quad \theta_0 = 0^\circ; \quad \Psi_0 = 52,025^\circ = 0,908 \text{ рад.}$$

Вектор управления (2.2.8) включает в себя следующие компоненты, использованные в Примере 2.2:

$$P(t) = 305,814 \text{ Н}; \quad \alpha(t) = 4,840^\circ = 0,084 \text{ рад.};$$

$$\gamma(t) = 0^\circ, \quad t \in [0; 3600] \text{ с.}$$

Сформируем с помощью выражений (2.2.2)-(2.2.6), (2.2.7) математическую модель полета БЛА.

Выражение (2.2.6) для $h = 2000$ м и эллипсоида Красовского конкретизируется как:

$$r = r(\varphi) = 2000 + 6378136 \sqrt{\frac{1 - 6,6934 \cdot 10^{-3}}{1 - 6,6934 \cdot 10^{-3} \cos \varphi}} = \quad (2.2.9)$$

$$= 2000 + \frac{6355984,536}{\sqrt{1 - 0,00693 \cos \varphi}}.$$

В связи с тем, что в уравнения (2.2.2), (2.2.7) входит величина, обратная переменной r , преобразуем это выражение в виду:

$$\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{1 - 0,00693 \cos \varphi}}{2000 \sqrt{1 - 0,00693 \cos \varphi} + 6355984,536}. \quad (2.2.10)$$

При формировании системы динамических уравнений (2.2.2) воспользуемся в качестве базовой системой уравнений (2.1.36), проводя в ней требуемые изменения. В этом случае первые три уравнения модели с учетом выражения (2.2.10) и $y = h$ примут следующий вид:

$$\dot{V} = \frac{1}{350} \left(P(t) - 0,5 \left[\left(0,017 + \frac{0,025V}{340,192 - 0,004h} \right) + \left(1,188 + \frac{0,356V}{340,192 - 0,004h} \right)^2 (\alpha(t) + 0,007)^2 \times \right. \right. \\ \left. \left. \times 1,225e^{-0,000h} V^2 \cdot 1,4 \right] - 9,81 \sin \theta; \right.$$

$$\dot{\theta} = \left(\frac{V \sqrt{1 - 0,00693 \cos \varphi}}{2000 \sqrt{1 - 0,00693 \cos \varphi} + 6355984,536} - \frac{9,81}{V} \right) \cos \theta + \frac{1}{350V} \left[P(t)(\alpha(t) + 0,061) + \right. \\ \left. + \left(4,312 + \frac{1,291V}{340,192 - 0,004h} \right) (\alpha(t) + 0,061) \times \right. \\ \left. \times 1,225e^{-0,0001h} V^2 \cdot 1,4 \right] \cos \gamma(t); \quad (2.2.11)$$

$$\dot{\Psi} = \frac{V\sqrt{1-0,00693\cos\varphi}\operatorname{tg}\varphi\sin\Psi\cos\theta}{2000\sqrt{1-0,00693\cos\varphi}+6355984,536} +$$

$$+ \frac{1}{350V\cos\theta} \left[P(t)(\alpha(t)+0,061) + 0,5 \left(4,312 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1,291V}{340,192-0,004h} \right) (\alpha(t)+0,007) \cdot 1,225 \times \right.$$

$$\left. \times e^{-0,0001h} V^2 \cdot 1,4 \right] \sin\gamma(t).$$

Кинематические уравнения (2.2.7) с учетом выражения (2.2.10) запишутся как:

$$\dot{\varphi} = \frac{V\sqrt{1-0,00693\cos\varphi}\cos\theta\cos\Psi}{2000\sqrt{1-0,00693\cos\varphi}+6355984,536}; \quad (2.2.12)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{V\sqrt{1-0,00693\cos\varphi}\cos\theta\sin\Psi}{\cos\varphi(2000\sqrt{1-0,00693\cos\varphi}+6355984,536)}.$$

Полученную систему дифференциальных уравнений (2.2.11), (2.2.12) будем интегрировать на интервале времени $[0, 3600]$ с. и приведенных выше значениях $P(t)$, $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ при следующих начальных условиях:

$$V(0) = 105,683 \text{ м/с}; \quad \theta(0) = 0 \text{ рад.}; \quad \Psi(0) = 0,908 \text{ рад.};$$

$$\varphi(0) = 55^\circ 47' = 0,9736 \text{ рад.}; \quad \lambda(0) = 49^\circ 06' = 0,8569 \text{ рад.} \quad (2.2.13)$$

Результаты решения задачи (2.2.11)-(2.2.13) приведены в Табл. 2.7 и на Рис. 2.6.

Из проведенного вычислительного эксперимента можно сделать следующие выводы:

1) в течение одного часа полета БЛА на заданной высоте скорость V и угол наклона траектории θ остаются практически постоянными,

2) угол курса БЛА Ψ изменяется от $52,025^\circ$ до $56,263^\circ$,

3) долгота φ и широта λ местоположения БЛА в конце его полета достигают значений $57^{\circ}47'$ с.ш. и $51^{\circ}52'$ в.д.

Таблица 2.7

$t, \text{с.}$	$V, \text{м/с}$	$\theta, \text{град.}$	$\Psi, \text{град.}$	$\varphi, \text{град.}$	$h, \text{м}$	$\lambda, \text{град.}$
0	105,683	0	52,025	$55^{\circ}47'$	2000	$49^{\circ}06'$
360	105,679	-0,016	52,424	$55^{\circ}60'$	2000	$49^{\circ}22'$
720	105,679	-0,015	52,828	$56^{\circ}12'$	2000	$49^{\circ}38'$
1080	105,679	-0,015	53,238	$56^{\circ}24'$	2000	$49^{\circ}55'$
1440	105,679	-0,015	53,654	$56^{\circ}36'$	2000	$50^{\circ}11'$
1800	105,679	-0,015	54,075	$56^{\circ}49'$	2000	$50^{\circ}28'$
2160	105,679	-0,015	54,501	$57^{\circ}01'$	2000	$50^{\circ}44'$
2520	105,679	-0,015	54,933	$57^{\circ}13'$	2000	$51^{\circ}01'$
2880	105,679	-0,015	55,371	$57^{\circ}24'$	2000	$51^{\circ}18'$
3240	105,679	-0,015	55,814	$57^{\circ}36'$	2000	$51^{\circ}35'$
3600	105,679	-0,015	56,263	$57^{\circ}47'$	2000	$51^{\circ}52'$

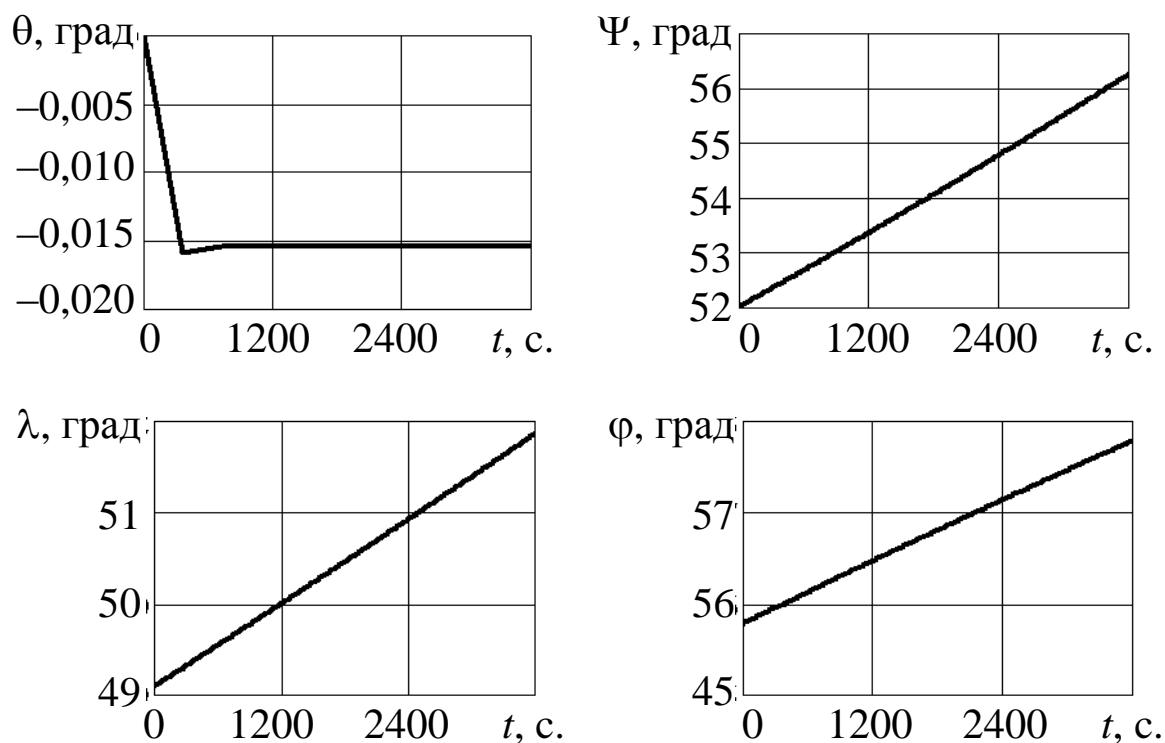


Рис. 2.6

Отметим, что с помощью общей модели движения БЛА в географических координатах (2.2.1), (2.2.2), (2.2.5) можно

описывать «квазиплоские» полеты БЛА по фиксированным меридианам и параллелям.

Для первого вида движений БЛА второе уравнение системы (2.2.1) преобразуется к виду:

$$\dot{\lambda} = 0.$$

Во втором случае первое уравнение системы (2.2.1) записывается как:

$$\dot{\phi} = 0.$$

2.3. Модели управляемых установившихся режимов полетов БЛА самолетных схем

Установившиеся (равновесные) режимы полетов пилотируемых самолетов широко используются в процессах их эксплуатации [12, 14, 15, 23]. К таким режимам относятся выполнения горизонтальных полетов с постоянной скоростью на заданной высоте, снижение и набор высоты по прямолинейным траекториям с фиксированным значением скорости, развороты и виражи и др.

Отметим, что в существующей литературе, посвященной динамике полета БЛА [2, 5, 8], установившиеся режимы их движения не рассматриваются.

В отличие от приведенных выше моделей неустановившихся режимов полета БЛА, в которых изменения фазовых координат V, θ, Ψ, x, y, z описывается соответствующими системами дифференциальных уравнений, модели установившихся режимов представляются системами трансцендентных уравнений и аналитических зависимостей, получаемых из первых с использованием определенных условий установившихся режимов их полетов.

Пусть БЛА осуществляет установившийся прямолинейный полет в вертикальной плоскости некоторой маневренной СК $Mxу$ на постоянной высоте. Индекс «м» у координатных осей этой СК здесь и ниже будем опускать.

Вектор управления БЛА (2.1.48) для этого режима будет иметь вид:

$$u = (P, \alpha), \quad (2.3.1)$$

где $P = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$.

Условия выполнения такого вида полетов БЛА на интервале времени $[t_0, t_k]$ имеют вид:

$$\begin{aligned} V(t) = V_{\text{зад}} = \text{const}; \quad \dot{V}(t) = 0; \\ \theta(t) = 0; \quad \dot{\theta}(t) = 0; \quad \Psi(t) = 0; \quad \dot{\Psi}(t) = 0, \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

где $V_{\text{зад}}$ – заданное значение скорости полета БЛА.

Используя эти условия в динамических уравнениях движения БЛА (2.1.43), (2.1.44), получаем следующую модель рассматриваемого режима полета:

$$\begin{aligned} P - X(\alpha, h, V_{\text{зад}}) = 0; \\ P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(\alpha, h, V_{\text{зад}}) - mg = 0. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

где h – заданная высота полета БЛА.

Схема равновесия сил, входящих в выражения (2.3.3), представлена на Рис. 2.7,а.

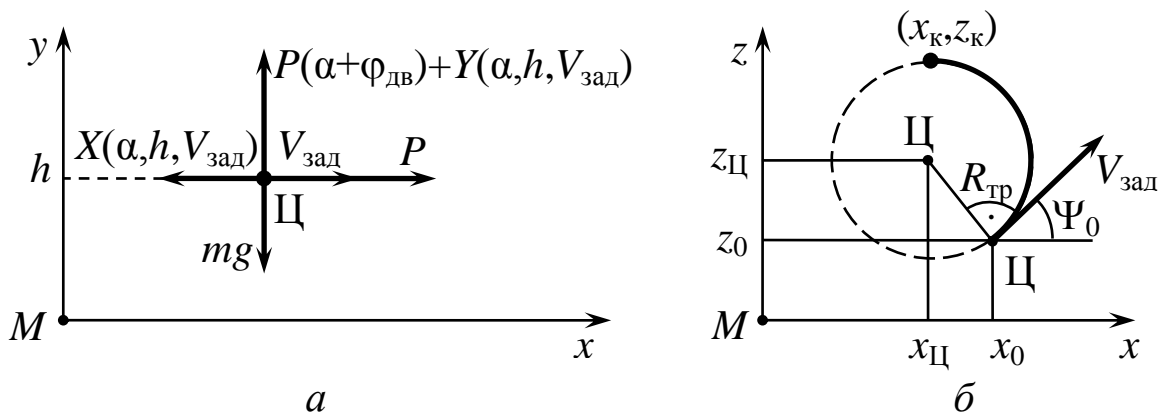


Рис. 2.7

Подставляя соответствующие значения из условий (2.3.2) в кинематические уравнения (2.1.45) и (2.1.46), получаем выражения вида:

$$\dot{x} = V_{\text{зад}}; \quad \dot{y} = 0.$$

Интегрируя эти простейшие дифференциальные уравнения при начальных условиях:

$$x(t_0) = x_0; \quad y(t_0) = h,$$

получаем расчетные формулы для определения значений дальности и высоты полета БЛА в момент времени $t \in [t_0, t_k]$:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + (t - t_0)V_{\text{зад}}; \\ y(t) &= h. \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Рассмотрим установившиеся режимы полета БЛА в горизонтальной плоскости на заданной высоте $y = h$. В этом случае траектории движения БЛА лежат в плоскости Mxz некоторой маневренной СК. При выполнении условий (2.3.2) и $\Psi(t) = \Psi_{\text{зад}} = \text{const}$ модель прямолинейного пространственного полета БЛА, получаемая из динамических уравнений (2.1.15)-(2.1.17), представляется следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} P - X(\alpha, h, V_{\text{зад}}) &= 0; \\ (P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(\alpha, h, V_{\text{зад}})) \cos \gamma - mg &= 0; \\ (P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(\alpha, h, V_{\text{зад}})) \sin \gamma &= 0. \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Вектор управления БЛА для этого режима полета имеет вид:

$$u(t) = (P, \alpha, \gamma), \quad t \in [t_0, t_k], \tag{2.3.6}$$

где $P = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$, $\gamma = 0$.

Кинематические уравнения (2.1.18)-(2.1.20) движения БЛА в пространстве при $V(t) = V_{\text{зад}}$; $\theta(t) = 0$; $\Psi(t) = \Psi_{\text{зад}}$ принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V_{\text{зад}} \cos \Psi_{\text{зад}}; \\ \dot{y} &= 0; \\ \dot{z} &= V_{\text{зад}} \sin \Psi_{\text{зад}}, \quad t \in [t_0, t_k].\end{aligned}$$

Интегрируя эти уравнения при начальных условиях:

$$x(t_0) = x_0; \quad y(t_0) = y_0; \quad z(t_0) = z_0.$$

получаем расчетные формулы для определения траектории движения БЛА на интервале времени $t \in [t_0, t_k]$:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + (t - t_0)V_{\text{зад}} \cos \Psi_{\text{зад}}; \\ y(t) &= h; \\ z(t) &= z_0 + (t - t_0)V_{\text{зад}} \sin \Psi_{\text{зад}}.\end{aligned}\tag{2.3.7}$$

Криволинейные установившиеся режимы полета БЛА в горизонтальной плоскости характеризуются условиями:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= 0; \quad V(t) = V_{\text{зад}} = \text{const}; \quad \dot{\theta}(t) = 0; \\ \dot{\theta}(t) &= 0; \quad \dot{\Psi}(t) = \text{const} \neq 0, \quad t \in [t_0, t_k].\end{aligned}\tag{2.3.8}$$

При движении БЛА с постоянной скоростью $V_{\text{зад}}$ по круговой траектории радиуса R угловая скорость $\dot{\Psi}$ вычисляется по следующей формуле [24]:

$$\dot{\Psi}(t) = \frac{V_{\text{зад}}}{R} = \text{const}.\tag{2.3.9}$$

Модель установившихся режимов полета БЛА по круговым траекториям (развороты, виражи), построенная с использованием выражений (2.1.15)-(2.1.17), (2.3.8) и (2.3.9), будет иметь вид:

$$\begin{aligned}P - X(\alpha, h, V) &= 0; \\ (P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(\alpha, h, V)) \cos \gamma - mg &= 0; \\ \frac{(P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y(\alpha, h, V)) \sin \gamma}{mV} - \frac{V}{R} &= 0,\end{aligned}\tag{2.3.10}$$

где $V = V_{\text{зад}}$ – заданное значение скорости БЛА.

Параметрическое представление траектории установившегося режима кругового полета БЛА получается путем решения задачи Коши:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V_{\text{зад}} \cos \Psi_{\text{тр}}(t); & \dot{y} &= 0; \\ \dot{z} &= V_{\text{зад}} \sin \Psi_{\text{тр}}(t), & t &\in [t_0, t_k]; \\ x(t_0) &= x_0; & y(t_0) &= h; & z(t_0) &= z_0, \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

сформированной с использованием выражений (2.1.18)-(2.1.20) и (2.3.8) при фиксированных скорости и законе изменения курса БЛА.

Требуемый закон $\Psi_{\text{тр}}(t)$ изменения угла поворота (курса) траектории БЛА на круговой траектории радиуса $R_{\text{тр}}$ определим путем интегрирования уравнения:

$$\dot{\Psi}_{\text{тр}} = \frac{V_{\text{зад}}}{R_{\text{тр}}}, \quad t \in [t_0, t_k]$$

с начальным условием вида:

$$\Psi_{\text{тр}}(t_0) = \Psi_0,$$

где Ψ_0 – угол выхода БЛА на круговую траекторию полета (см. Рис. 2.7,б).

Проводя интегрирование, имеем, что:

$$\Psi_{\text{тр}}(t) = \frac{V_{\text{зад}}}{R_{\text{тр}}}(t - t_0) + \Psi_0. \quad (2.3.12)$$

Решая задачу Коши (2.3.11) с использованием зависимости (2.3.12) и известных методов вычисления неопределенных интегралов [25], получаем параметрическое представление траектории полета БЛА на интервале времени $[t_0, t_k]$ вида:

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_0 - R_{\text{тр}} \sin \Psi_0 + R_{\text{тр}} \sin \left(\frac{V_{\text{зад}}}{R_{\text{тр}}} (t - t_0) + \Psi_0 \right); \\
y(t) &= h; \\
z(t) &= z_0 + R_{\text{тр}} \cos \Psi_0 - R_{\text{тр}} \cos \left(\frac{V_{\text{зад}}}{R_{\text{тр}}} (t - t_0) + \Psi_0 \right).
\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

Конечная точка траектории кругового полета БЛА получается путем подстановки в эти выражения значения $t = t_k$.

В работе [9] показано, что зависимости вида (2.3.13) действительно описывают установившееся движение БЛА по круговой траектории радиуса $R_{\text{тр}}$ на высоте h из начального состояния, заданного параметрами x_0 , h , z_0 и Ψ_0 .

Сформируем общую модель пространственного прямолинейного установившегося движения БЛА, которая включает в себя режимы горизонтального полета, набора высоты и снижения.

Условия реализации таких режимов полета БЛА при $t \in [t_0, t_k]$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
V(t) &= V_{\text{зад}} = \text{const}; & \dot{V}(t) &= 0; \\
\theta(t) &= \theta_{\text{зад}} = \text{const}; & \dot{\theta}(t) &= 0; \\
\Psi(t) &= \Psi_{\text{зад}} = \text{const}; & \dot{\Psi}(t) &= 0;
\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

Для выполнения набора высоты или снижения используется вектор управления:

$$u(t) = (P(t), \alpha(t), \gamma(t)), \quad t \in [t_0, t_k]. \tag{2.3.15}$$

Компоненты этого вектора определяются из системы нелинейных параметрических уравнений:

$$\frac{P(t) - 0,5c_x(t)\rho(t)V_{\text{зад}}^2 S}{m} - g \sin \theta_{\text{зад}} = 0; \tag{2.3.16}$$

$$\frac{(P(t)(\alpha(t) + \varphi_{\text{дв}}) + 0,5c_y(t)V_{\text{зад}}^2 S) \cos \gamma(t)}{mV_{\text{зад}}} \quad (2.3.17)$$

$$-\frac{g}{V_{\text{зад}}} \cos \theta_{\text{зад}} = 0;$$

$$(P(t)(\alpha(t) + \varphi_{\text{дв}}) + 0,5c_y(t)V_{\text{зад}}^2 S) \sin \gamma(t) = 0, \quad (2.3.18)$$

которая получается при подстановке условий (2.3.14) и выражений (2.1.23) в динамические уравнения движения БЛА (2.1.15)-(2.1.17).

В связи с тем, что сомножитель при $\sin \gamma(t)$ в выражении (2.3.18) по определению не равен нулю, имеем, что $\sin \gamma(t) = 0$, $t \in [t_0, t_k]$. Последнее означает, что в векторе управления (2.3.15) компонента $\gamma(t) = 0$, $t \in [t_0, t_k]$, то есть БЛА выполняет рассматриваемые режимы полета без крена.

Тогда компоненты $P(t)$ и $\alpha(t)$ определяются из уравнений (2.3.16) и (2.3.17).

Зависимость от времени t коэффициентов c_x , c_y и плотности воздуха ρ объясняется их зависимостью от значений $y(t)$, $t \in [t_0, t_k]$ текущей высоты полета БЛА.

Зависимости $c_x(t)$ и $c_y(t)$ описываются формулами (2.1.34) и (2.1.35), в которых $V = V_{\text{зад}}$, а скорость звука $a(y)$ представляется как:

$$a(t) = a_0 - a_1 y(t), \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (2.3.19)$$

Зависимость $\rho(t)$ имеет вид:

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-k y(t)}, \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (2.3.20)$$

При этом значения параметров a_0 , a_1 и ρ_0 определяются соответствующими зависимостями из Разд. 1.3.

Параметрическое представление траекторий пространственного установившегося движения БЛА при наборе высоты

и снижении получим путем подстановки в уравнения (2.1.18)-(2.1.20) переменных из условий (2.3.14). Интегрируя эти уравнения при начальных условиях (2.1.22), получаем следующие зависимости:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + (t - t_0)V_{\text{зад}} \cos \theta_{\text{зад}} \cos \Psi_{\text{зад}}; \\y(t) &= y_0 + (t - t_0)V_{\text{зад}} \sin \theta_{\text{зад}}; \\z(t) &= z_0 + (t - t_0)V_{\text{зад}} \cos \theta_{\text{зад}} \sin \Psi_{\text{зад}}, \quad t \in [t_0, t_k].\end{aligned}\tag{2.3.21}$$

Отметим, что в формулах (2.3.19) и (2.3.20) используется второе соотношение из состава выражений (2.3.21).

Таким образом, общая математическая модель установившегося прямолинейного полета БЛА включает в себя уравнения (2.3.16), (2.3.17) и описание требуемой траектории его движения в виде зависимостей (2.3.21).

Нетрудно показать, что из соотношений (2.3.21) получаются при соответствующих значениях $\theta_{\text{зад}}$ и $\Psi_{\text{зад}}$ описания прямолинейных траекторий установившихся движений БЛА в вертикальной (2.3.4) и горизонтальной (2.3.7) плоскостях.

Для формирования векторов $u(t)$ косвенного управления для БЛА самолетных схем используются методы, приведенные в Разд. 5.1.

2.4. Уравнения управляемого движения беспилотного вертолета

Впервые основные вопросы создания беспилотной вертолетной техники как вида дистанционно пилотируемых летательных аппаратов (ДПЛА) были рассмотрены в работах [2, 42].

В настоящее время в мировой практике [43] наибольшее распространение получили беспилотные вертолеты (БВ) одновинтовой схемы (см. Рис. 1.4,а). Это объясняется простотой

их конструкции по сравнению с БВ двухвинтовой (соосной) схемы, представленной на Рис. 1.4,б.

В Табл. 2.8 справочно приведены некоторые характеристики перспективных БВ легкого и среднего классов [43].

Таблица 2.8

Характеристика	Sceldar-200 (США)	Ми-34 БП (РФ)
Максимальная взлетная масса, кг	200	1450
Максимальная масса полезной нагрузки, кг	40	350
Габариты фюзеляжа, м	4,0×1,3×1,2	—
Взлетная мощность двигателя, л.с.	55	380
Диаметр несущего винта, м	4,7	—
Максимальная крейсерская скорость, км/ч	130/113	225/195
Практический потолок, м	4500	4200
Максимальная дальность полета, км	300	620
Продолжительность полета, ч	5	3,5-4

Математические модели движения одновинтового вертолета как материальной точки были предложены в работах [9, 34, 48, 49]. В первой из них режимы полета БВ описывались достаточно громоздкими системами дифференциальных и алгебраических уравнений, которые за счет большого объема исходных данных достаточно сложно реализуются на практике. Во второй монографии для решения специальных задач рассматривались простейшие модели движения БВ в режимах горизонтального полета в вертикальной плоскости и вертикального подъема/снижения. В работах [48, 49] рассматривались только модель движения вертолета в вертикальной плоскости.

Следует отметить работу [23], в которой была приведена модель движения центра масс одновинтового вертолета, но без соответствующих объяснений и приложений.

Задачей данного раздела является разработка достаточно простой и пригодной для эффективного программирования траекторий математической модели движения одновинтового БВ.

Как и в предыдущих разделах главы, будем описывать различные режимы полета БВ в основном как движения его центра масс (ЦМ). При этом будем считать решенными задачи по обеспечению устойчивости и управляемости БВ, то есть вертолет считается сбалансированным [48].

В связи с тем, что основным требованием к БЛА является минимальная стоимость их разработки и производства [2, 46], предлагается использовать БВ простейшей конструкции, в которой реализованы все виды управления, описанные в работах [9, 35 и др.], но со следующими особенностями:

- продольное управление БВ осуществляется путем наклона автомата перекоса (АП) кривошипного типа [47] только в вертикальной плоскости;
- поперечное управление БВ путем наклона кольца АП в поперечном направлении для создания угла крена БВ не реализуется из-за отсутствия требования высокой маневренности этого вида беспилотной авиационной техники;
- поперечное и путевое управление движением БВ производится путем изменения силы тяги рулевого винта.

Отметим, что тенденция создания более простых по сравнению с пилотируемыми вертолетами конструкций БВ отражена в работе [2], в которой предлагается осуществить более простое газодинамическое управление БВ.

Будем считать, что простейший БВ должен быть оснащен поршневым двигателем (ПД), который является более эффективным с точки зрения расхода топлива по сравнению с ТРД на малых высотах [45]. При этом отмечается тенденция снижения удельного веса ПД при увеличении их мощности.

Применение ПД для вертолетов с малыми взлетными массами объясняется следующими причинами [50]:

- отсутствием малогабаритных и недорогих серийных ТРД малой мощности до 250 л.с.;
- относительно меньшими потерями мощности в трансмиссии вертолетов с ПД;
- невысокой степенью требуемой редукции из-за небольших чисел оборотов вала ПД по сравнению с турбиной ТРД.

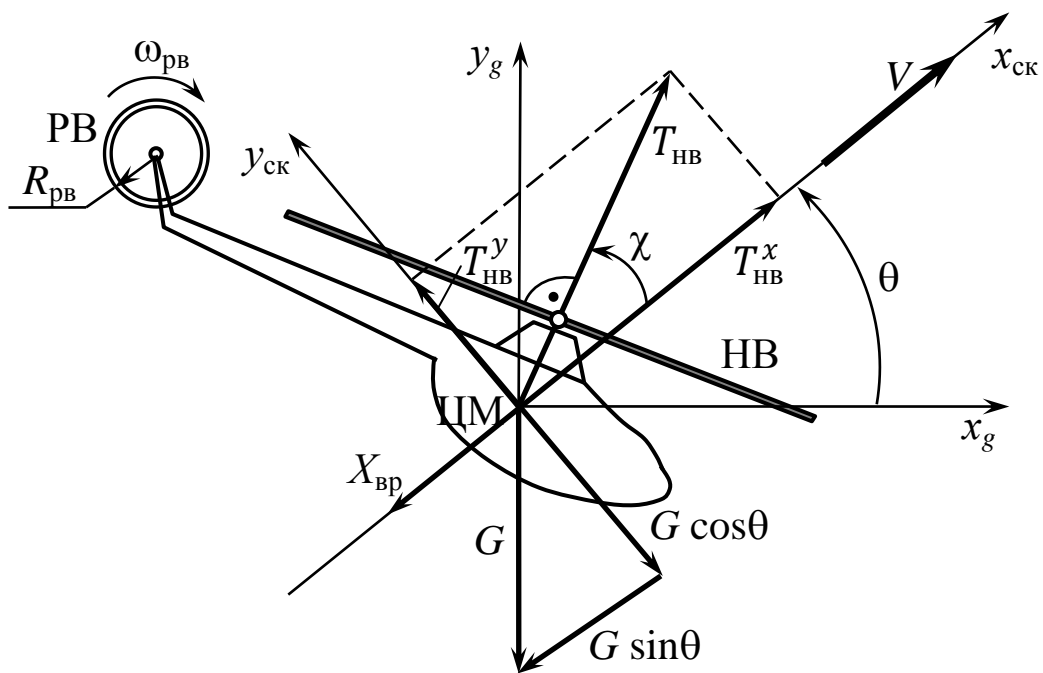
Дополнительно следует отметить, что по современным оценкам рыночные цены малогабаритных ТРД в 5-10 раз превышают цены отечественных и зарубежных ПД.

Как известно, масса трансмиссии современных вертолетов составляет порядка 8-10% их взлетной массы [46, 50]. Поэтому в простейшем БВ возможен отказ от трансмиссии путем установки дополнительного ПД для вращения его рулевого винта.

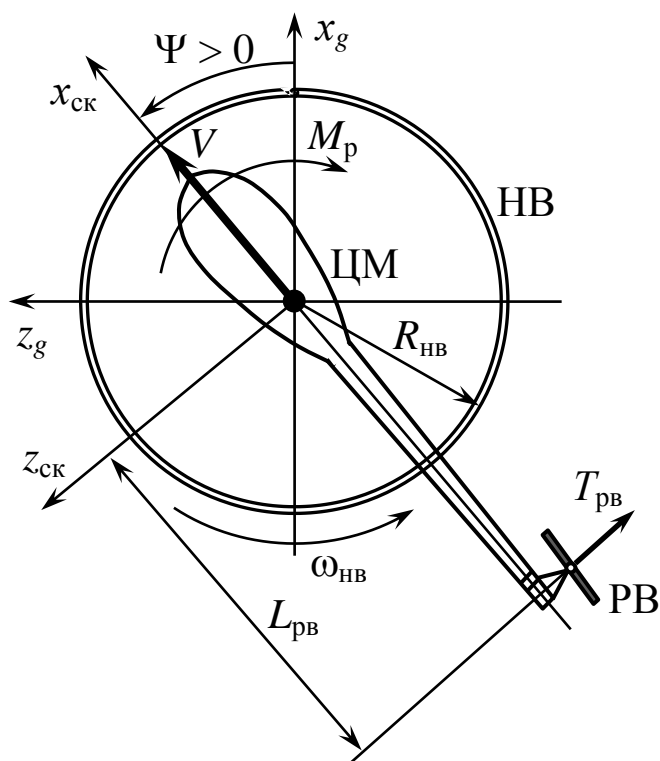
На наш взгляд отмеченные выше особенности позволяют резко сократить за счет упрощения конструкции стоимость разработки и производства современных БВ одновинтовой схемы.

Перейдем к формированию общей модели движения таких БВ.

На Рис. 2.9 приведены силы, действующие на БВ в полете со скоростью V при угле наклона его траектории θ и курсовом угле Ψ .



a



б

Рис. 2.9

На этом рисунке использованы следующие обозначения:
 $G = mg$ – сила веса БВ (Н); $T_{\text{НВ}}$ – сила тяги несущего винта (НВ) вертолета (Н); $X_{\text{вр}}$ – сила вредного сопротивления БВ (Н); $T_{\text{рв}}$ – сила тяги рулевого винта (РВ) вертолета (Н);

$L_{рв}$ – расстояние между ЦМ БВ и осью его РВ (м); $\omega_{нв}$, $\omega_{рв}$ – угловые скорости вращения НВ и РВ (c^{-1}); $2R_{нв}$, $2R_{рв}$ – диаметры НВ и РВ (м); M_p – реактивный момент НВ (Н·м).

Отметим, что на этом рисунке для простоты не показан конус лопастей НВ [9].

С точки зрения теории полета ЛА составляющие силы $T_{нв}$ при движении БВ выполняют роли силы тяги ($T_{нв}^x$) и подъемной силы ($T_{нв}^y$), а момент силы $T_{рв}$ осуществляет путем увеличения или уменьшения значения M_p поворот его вектора скорости V на требуемый курсовой угол Ψ .

При известных значениях силы $T_{нв}$ тяги НВ и угла наклона χ продольного отклонения плоскости вращения НВ имеем:

$$T_{нв}^x = T_{нв} \cos \chi; \quad T_{нв}^y = T_{нв} \sin \chi; \quad (2.4.1)$$

Сила $X_{вр}$ вычисляется по стандартной для вертолетной техники формуле вида [35, 45, 48, 49]:

$$X_{вр} = 0,5\bar{c}_x \rho V^2 F_{нв}, \quad (2.4.2)$$

где \bar{c}_x – приведенный коэффициент лобового сопротивления БВ; $F_{нв} = \pi R_{нв}^2$ – площадь, ометаемая НВ БВ (m^2).

Значения коэффициентов \bar{c}_x для различных режимов полета вертолетов определяются в процессах продувок в аэродинамических трубах и при летных испытаниях [45, 48, 49].

Для описания изменения скорости и угла наклона траектории БВ будем использовать первые два уравнения системы (2.1.8).

По аналогии с уравнениями (2.1.15), (2.1.16) при $\gamma = 0$ и $P(\alpha + \varphi_{дв}) = 0$ с использованием выражений (2.4.1), (2.4.2) и Рис. 2.9,а получаем первые два динамических уравнения общей модели движения БВ:

$$\dot{V} = \frac{T_{\text{НВ}} \cos \chi - 0,5 \bar{c}_x \rho V^2 F_{\text{НВ}}}{m} - g \sin \theta; \quad (2.4.3)$$

$$\dot{\theta} = \frac{T_{\text{НВ}} \sin \chi}{mV} - \frac{g}{V} \cos \theta, \quad (2.4.4)$$

Уравнение, описывающее изменение во времени значения угла Ψ поворота траектории БВ, получим из Рис. 2.9,б и из второго соотношения из состава выражений (2.1.4) в предположении, что $\omega_x = \omega_z = 0$, $\dot{\omega}_y = \dot{\Psi}$ в следующем виде:

$$\dot{\Psi} = -M_p + \frac{T_{\text{рв}} L_{\text{рв}}}{J_y}, \quad (2.4.5)$$

где J_y – главный центральный момент инерции БВ относительно вертикальной оси связанной СК ($\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$).

Использование уравнения (2.4.5) вместо третьего уравнения системы (2.1.8) объясняется необходимостью учета такого важного параметра динамики полета БВ как момент M_p .

Конкретизируем правую часть уравнения (2.4.5).

Реактивный момент НВ определяется как [35, 48, 50]:

$$M_p = \frac{75 N_e \eta_{\text{НВ}} g}{\omega_{\text{НВ}}}, \quad (2.4.6)$$

где $N_e = N_e(H)$ – мощность поршневого двигателя на высоте H (л.с.), $\eta_{\text{НВ}}$ – коэффициент полезного действия (к.п.д.) НВ.

Для ПД БВ будем использовать следующую эмпирическую формулу изменения его мощности с высотой [2, 39]:

$$N_e(H) = N_e(0) \left(\frac{0,0248 p_H - 0,11 T_H}{\sqrt{T_H}} \right), \quad (2.4.7)$$

где $N_e(0)$ – эффективная мощность ПД на уровне Земли (л.с.); p_H , T_H – давление в мм.рт.ст. и температура атмосферы по шкале Кельвина на высоте H (км).

Применяя соответствующие формулы из Разд. 1.3 при $H = y(t)$, имеем, что:

$$\begin{aligned} p(y(t)) &= 760 \exp \left[-0,129 \left(\frac{y(t)}{1000} \right) \right]; \\ T(y(t)) &= 288,15 - 6,50 \left(\frac{y(t)}{1000} \right). \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Используя формулы (2.4.8) в выражении (2.4.7) и проводя несложные преобразования, получим:

$$N_e(y(t)) = N_e(0) \frac{18,848e^{-0,129 \left(\frac{y(t)}{1000} \right)} - 31,696 - 0,715 \left(\frac{y(t)}{1000} \right)}{\sqrt{288,15 - 6,50 \left(\frac{y(t)}{1000} \right)}}, \quad (2.4.9)$$

где $y(t)$ – высота полета БВ в момент времени t (мин).

Тогда при подстановке выражения (2.4.9) в формулу (2.4.6) получаем зависимость вида:

$$M_p(y) = \frac{75N_e(0)\eta_{\text{НВ}}g \left(18,848e^{-0,129 \left(\frac{y(t)}{1000} \right)} - 31,696 - 0,715 \left(\frac{y(t)}{1000} \right) \right)}{\omega_{\text{НВ}} \sqrt{288,15 - 6,50 \left(\frac{y(t)}{1000} \right)}}. \quad (2.4.10)$$

В этом случае уравнение (2.4.5) конкретизируется как:

$$\dot{\Psi} = \frac{T_{\text{рв}}L_{\text{рв}} - M_p(y)}{J_y}, \quad (2.4.11)$$

где $M_p(y)$ определяется для ПД БВ по формуле (2.4.10).

Кинематические уравнения движения ЦМ БВ в пространстве, как и выражения (2.1.7), имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V \cos \theta \cos \Psi; \\ \dot{y} &= V \sin \theta; \\ \dot{z} &= V \cos \theta \sin \Psi. \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

Система дифференциальных уравнений (2.4.3), (2.4.4), (2.4.11), (2.4.12), описывающая пространственный полет БВ на интервале времени $[t_0, t_k]$, интегрируется при начальных условиях:

$$\begin{aligned} V(t_0) = V_0; \quad \theta(t_0) = \theta_0; \quad \Psi(t_0) = \Psi_0; \\ x(t_0) = x_0; \quad y(t_0) = y_0; \quad z(t_0) = z_0. \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

Для обеспечения движения БВ по требуемой траектории используется вектор косвенного управления вида:

$$u(t) = (T_{\text{НВ}}(t), \chi(t), T_{\text{РВ}}(t)), \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (2.4.14)$$

При описании движения БВ в **вертикальной плоскости**, то есть при $\dot{\Psi}(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, t_k]$ применяются уравнения (2.4.3), (2.4.4), (2.4.11) и кинематические уравнения:

$$\dot{x} = V \cos \theta; \quad \dot{y} = V \sin \theta \quad (2.4.15)$$

при следующих начальных условиях:

$$\begin{aligned} V(t_0) = V_0; \quad \theta(t_0) = \theta_0; \quad \psi(t_0) = 0; \\ x(t_0) = x_0; \quad y(t_0) = y_0. \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

Требуемое движение БВ обеспечивается управляющим вектором:

$$u(t) = (T_{\text{НВ}}(t), \chi(t), T_{\text{РВ}}(t)), \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (2.4.17)$$

Здесь сила тяги РВ используется только для компенсации реактивного момента НВ БВ. С помощью этой силы достигается нулевое значение угла поворота его траектории ($\Psi(t) = 0$) при $t \in [t_0, t_k]$.

Движение БВ в **горизонтальной плоскости**, которое реализуется при $\theta(t) \equiv 0$, $\dot{\theta}(t) \equiv 0$, $y(t) = h = \text{const}$, $t \in [t_0, t_k]$, описывается системой уравнений вида:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{T_{\text{НВ}} \cos \chi - 0,5 \bar{c}_x \rho V^2 F_{\text{НВ}}}{m}; \\ 0 &= T_{\text{НВ}} \sin \chi - mg; \end{aligned}$$

$$\dot{\Psi} = \frac{T_{\text{рв}} L_{\text{рв}} - M_{\text{р}}(h)}{J_y}; \quad (2.4.18)$$

$$\dot{x} = V \cos \Psi;$$

$$\dot{z} = V \sin \Psi, \quad t \in [t_0, t_k]$$

и начальными условиями:

$$V(t_0) = V_0; \quad \Psi(t_0) = \Psi_0; \quad x(t_0) = x_0; \quad z(t_0) = z_0. \quad (2.4.19)$$

При этом используется вектор управления (2.4.14), а момент $M_{\text{р}}$ вычисляется по формуле (2.4.10) при $y(t) = h$.

Приведенные выше модели движения БВ описывают неустановившиеся режимы их полетов, при которых скорость V и траекторные углы θ , Ψ являются функциями времени.

Отметим, что в существующей литературе по динамике полета вертолетов [23, 35, 45, 48, 49] рассматриваются только установившиеся режимы их движения.

Для описания таких режимов полета БВ предлагается использовать подходы, описанные в Разд. 2.3 с заменой силы тяги P и подъемной силы Y соответственно на составляющие $T_{\text{нв}}^x$ и $T_{\text{нв}}^y$ силы тяги НВ, которые определяются формулами (2.4.1). При этом описания траекторий установившихся режимов горизонтального полета, набора высоты и снижения БВ в пространстве представляются выражениями (2.3.21).

Приведем примеры реализации плоских и пространственных траекторий движения БВ, описываемых приведенными выше моделями.

Пример 2.6.

Будем рассматривать гипотетический транспортный скоростной БВ, который имеет следующие характеристики, представленные в Табл. 2.9. На важность такого перспективного направления применения грузовых БВ как вспомога-

тельных БЛА поддержки сухопутных войск (см. Рис. 1.8) указывается в работе [43].

Таблица 2.9

Наименование характеристики	Значение
Масса БВ	$m = 1962$ кг
Удельная нагрузка на несущий винт (НВ)	$P_{\text{ВД}} = 245,25$ Н/м ²
Радиус НВ	$R_{\text{НВ}} = 5,0$ м
Площадь, ометаемая НВ	$F_{\text{НВ}} = 78,5$ м ²
Радиус рулевого винта (РВ)	$R_{\text{РВ}} = 0,8$ м
Площадь, ометаемая РВ	$F_{\text{РВ}} = 2,01$ м ²
Коэффициент заполнения НВ	$\sigma_{\text{НВ}} = 0,053$
Коэффициент заполнения РВ	$\sigma_{\text{РВ}} = 0,106$
Коэффициент полезного действия НВ	$\eta = 0,675$
Плечо РВ	$L_{\text{РВ}} = 6,0$ м
Эффективная мощность двигателя на земле	$N_e(0) = 290$ л.с.
Максимальное число оборотов вала двигателя	$n_{\text{max}} = 2400$ об/мин
Средний коэффициент использования мощности двигателя	$\xi = 0,835$
Угол заклинивания двигателя	$\varepsilon_{\text{ДВ}} = 6$ град
Число оборотов НВ	$n_{\text{НВ}} = 300$ об/мин
Угловая скорость вращения НВ	$\omega_{\text{НВ}} = 31,4$ с ⁻¹
Число оборотов РВ	$n_{\text{РВ}} = 1672$ об/мин
Угловая скорость вращения РВ	$\omega_{\text{РВ}} = 175$ с ⁻¹
Относительные коэффициенты вредного сопротивления БВ: а) при вертикальном подъеме/спуске б) при остальных режимах полета БВ	$\bar{c}_x = 0,09554$ $\bar{c}_x = 0,03185$
Главный центральный момент инерции БВ относительно вертикальной оси	$J_y = 300$ кг·м ² ·с ⁻¹
Минимальная скорость	$V_{\text{min}} = 30$ м/с
Крейсерская скорость	$V_{\text{кр}} = 72,2$ м/с
Максимальная скорость	$V_{\text{max}} = 100$ м/с

Основными режимами полетов вертолетной техники являются прямолинейные полеты с постоянной скоростью [23, 35, 48, 49]. Такие полеты осуществляются по плоским и про-

странственным траекториям набора высоты, горизонтального полета на постоянной высоте и снижения вертолета.

Рассмотрим такие прямолинейные движения БВ при нормальных атмосферных условиях в вертикальной плоскости на интервале времени $[0;60]$ с. с постоянной скоростью $V_{зад} = 72,2$ м/с и с углами наклона их траекторий:

$$\theta_1 = -15^\circ; \quad \theta_2 = 0^\circ; \quad \theta_3 = +15^\circ.$$

Будем считать, что полет БВ при $\theta = -15^\circ$ начинается в точке с координатами $(x_0, y_0) = (500, 1500)$ м., а при остальных значениях углов θ – при $(x_0, y_0) = (500, 100)$ м. Для выполнения полетов используются следующие управления вида (2.4.17):

1) $T_{нв} = 18830$ Н; $\chi = 80,823^\circ$; $T_{рв}(t) = (2,407t + 774,75)$ Н – снижение БВ;

2) $T_{нв} = 20830$ Н; $\chi = 67,468^\circ$; $T_{рв} = 933,375$ Н – горизонтальный полет БВ;

3) $T_{нв} = 22669$ Н; $\chi = 55,106^\circ$; $T_{рв} = (-2,134t + 932,069)$ Н – набор высоты БВ.

Результаты решения трех систем уравнений вида (2.4.3), (2.4.4), (2.4.11), (2.4.15) при начальных условиях вида (2.4.16), которые конкретизируются как:

$V(0) = 72,2$ м/с; $\theta(0) = \{-15^\circ; 0^\circ; +15^\circ\}$; $y(0) = \{1500; 100; 100\}$ м, и исходных данных из Табл. 2.9 представлены в Табл. 2.10.

Полученные траектории движения БВ, построенные по данным из 5-го и 6-го столбцов этой таблицы, приведены на Рис. 2.10,а.

Из результатов выполненных вычислительных экспериментов следует, что приведенные выше законы $T_{рв}(t)$ изменения силы тяги РВ обеспечивают полеты БВ строго в вертикальной плоскости. При этом их зависимость от времени обусловливается зависимостью (2.4.9) мощности двигателя от высоты $y(t)$.

Таблица 2.10

Режимы полета	t , с	V , м/с	θ , град.	x , м	y , м	Ψ , град
1. Снижение БВ ($\theta_1 = -15^\circ$)	0	72,2	-15	500	1500	0
	6	72,2	-15	918	1388	0
	12	72,2	-15	1337	1276	0
	18	72,2	-15	1755	1164	0
	24	72,2	-15	2174	1052	0
	30	72,2	-15	2592	939	0
	36	72,2	-15	3011	827	0
	42	72,2	-15	3429	715	0
	48	72,2	-15	3848	603	0
	54	72,2	-15	4266	491	0
	60	72,2	-15	4684	379	0
2. Горизонтальный полет БВ ($\theta_2 = 0^\circ$)	0	72,2	0	500	100	0
	6	72,2	0	933	100	0
	12	72,2	0	1366	100	0
	18	72,2	0	1800	100	0
	24	72,2	0	2233	100	0
	30	72,2	0	2666	100	0
	36	72,2	0	3099	100	0
	42	72,2	0	3532	100	0
	48	72,2	0	3966	100	0
	54	72,2	0	4399	100	0
	60	72,2	0	4832	100	0
3. Набор высоты БВ ($\theta_1 = +15^\circ$)	0	72,2	15	500	100	0
	6	72,2	15	918	212	0
	12	72,2	15	1337	324	0
	18	72,2	15	1755	436	0
	24	72,2	15	2174	548	0
	30	72,2	15	2592	661	0
	36	72,2	15	3011	773	0
	42	72,2	15	3429	885	0
	48	72,2	15	3848	997	0
	54	72,2	15	4266	1109	0
	60	72,2	15	4684	1221	0

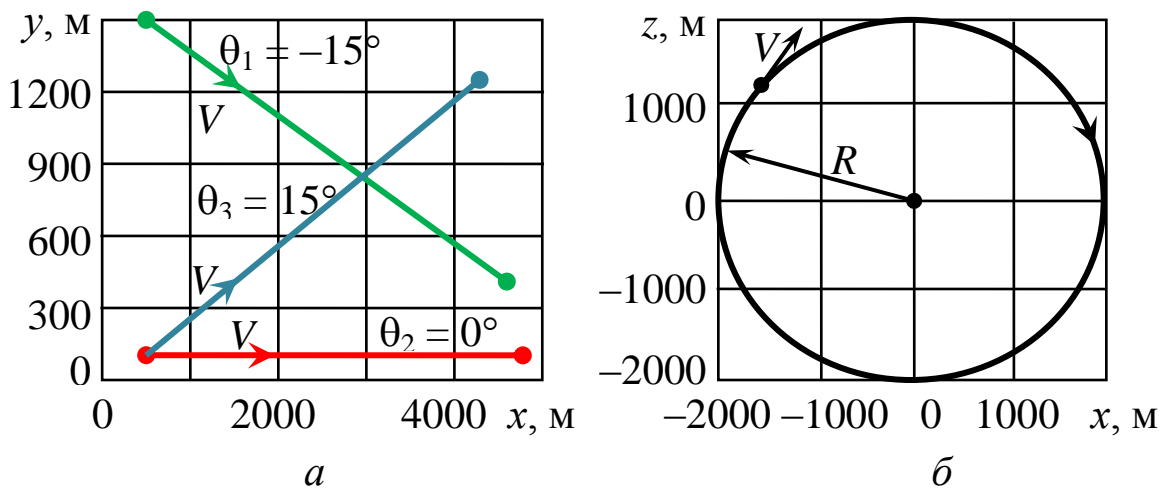


Рис. 2.10

Изменение направления (курса) движения вертолетов осуществляется с помощью их разворотов и виражей [48, 49].

Отметим, что вираж с радиусом R и скоростью $V_{\text{зад}}$ представляет собой замкнутую плоскую круговую траекторию, а разворот – траекторию радиуса R с курсовыми углами $\Psi_{\text{нач}}$ и $\Psi_{\text{кон}}$.

В существующих вертолетах с традиционным типом автомата перекоса эти маневры производятся с помощью соответствующих углов крена.

В предлагаемом типе простейшего БВ его развороты и виражи осуществляются только путем управления силой $T_{\text{рв}}$ тяги РВ. При этом требуемая угловая скорость виража/разворота БВ на интервале времени $[t_0, t_k]$ описывается выражением:

$$\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t) = \begin{cases} -\frac{V}{R}, & \text{для движения БВ «по часовой стрелке»;} \\ \frac{V}{R}, & \text{для движения БВ «против часовой стрелки»}. \end{cases}$$

Согласно Рис. 2.9,б первый вид движения производится в направлении действия реактивного момента $M_{\text{р}}$. Поэтому величина $T_{\text{рв}}$ уменьшает его значение для выполнения требуемого разворота БВ. Во втором виде движения сила $T_{\text{рв}}$ увеличивает действие момента $M_{\text{р}}$.

Моделирование полета БВ в горизонтальной плоскости в режиме виража с радиусом $R = 2000$ м. со скоростью $V = 72,2$ м/с на постоянной высоте $h = 100$ м. из точки $(x_0, y_0, z_0) = (0; 100; 2000)$ м. при начальном курсовом угле $\Psi_0 = 0^\circ$ проведем с использованием общей системы уравнений (2.4.3), (2.4.4) и (2.4.11) при управляющем векторе (2.4.14) со следующими компонентами:

$$u(t) = (T_{\text{нв}}; \chi; T_{\text{рв}}) = (20830 \text{ Н}; 67,568^\circ; 931,528 \text{ Н}), t \in [0, 60] \text{ с.}$$

Результаты моделирования виража БВ, выполняемого «по часовой стрелке», представлены в Табл. 2.11 и на Рис. 2.10,б.

Таблица 2.11

$t, \text{ с}$	$V, \text{ м/с}$	$\theta, \text{ град.}$	$\Psi, \text{ град.}$	$x, \text{ м}$	$y, \text{ м}$	$z, \text{ м}$
0	72,2	0	0	0	100	2000
17,405	72,2	0	-36	1176	100	1618
34,810	72,2	0	-72	1902	100	618
52,215	72,2	0	-108	1902	100	-618
69,620	72,2	0	-144	1176	100	-1618
87,025	72,2	0	-180	0	100	-2000
104,430	72,2	0	-216	-1176	100	-1618
121,835	72,2	0	-252	-1902	100	-618
139,240	72,2	0	-288	-1902	100	618
156,645	72,2	0	-324	-1176	100	1618
174,049	72,2	0	-360	0	100	2000

В качестве пространственной траектории движения БВ будем рассматривать траекторию вида «спираль», которая является основным режимом набора высоты вертолетами [35].

Пусть такая траектория БВ должна быть реализована при скорости $V_{\text{зад}} = 72,2$ м/с на интервале времени $[t_0, t_k] = [0; 348,1]$ с. при $R = 2000$ м. из точки с координатами $(x_0, y_0, z_0) = (500; 100; 5000)$ м. и с начальными значениями углов: $\theta_0 = +15^\circ$; $\Psi_0 = 0^\circ$.

Будем считать, что вектор управления БВ (2.4.14) имеет следующие компоненты:

$$T_{\text{нв}}(t) = 22658 \text{ Н}; \quad \chi(t) = 55,106^\circ;$$

$$T_{\text{рв}}(t) = (929,624 - 2,186t + 1,763 \cdot 10^{-3}t^2), \text{ Н} \quad t \in [0; 348,1] \text{ с.}$$

Выбор конечного значения t_k времени движения БВ проведен из требования выполнения вертолетом двух витков спирали.

Результаты моделирования пространственного набора высоты БВ с использованием соотношений (2.4.3), (2.4.4), (2.4.11), (2.4.15) и данных из Табл. 2.9 приведены в Табл. 2.12 и на Рис. 2.11.

Таблица 2.12

$t, \text{ с}$	$V, \text{ м/с}$	$\theta, \text{ град.}$	$\Psi, \text{ град.}$	$x, \text{ м}$	$y, \text{ м}$	$z, \text{ м}$
0	72,2	15	0	500	100	5000
34,810	72,2	15	-72	2337	750	3665
69,620	72,2	15	-144	1636	1401	1505
104,430	72,2	15	-216	-636	2051	1505
139,240	72,2	15	-288	-1337	2702	3665
174,049	72,2	15	-360	500	3352	5000
208,859	72,2	15	-432	2337	4003	3665
243,669	72,2	15	-504	1636	4653	1505
278,479	72,2	15	-576	-636	5304	1505
313,289	72,2	15	-648	-1337	5954	3665
348,099	72,2	15	-720	500	6605	5000

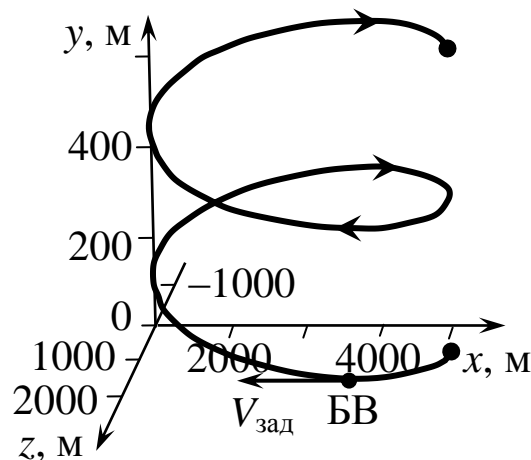


Рис. 2.11

Из таблицы следует, что БВ выполнил с постоянной скоростью два полных оборота «спирали», набрав при этом за $t_k = 5$ мин 48 с. высоту $y(t_k) = 6605$ м.

Рассмотрим модели **специальных режимов полетов БВ**, которые не могут быть реализованы БЛА самолетных схем [9, 35, 48, 49].

В режиме *торможения с зависанием* БВ, который выполняется на интервале времени $[t_0, t_k]$, его скорость является убывающей функцией времени, удовлетворяющей следующим требованиям:

$$V(t_0) > 0; \quad V(t_k) = 0; \quad \dot{V}(t_k) = 0. \quad (2.4.19)$$

Последнее означает, что компоненты $T_{\text{нв}}(t)$ и $\chi(t)$ вектора $u(t)$ управления БВ будут функциями времени такими, что:

$$T_{\text{нв}}(t_k) = G; \quad \chi(t_k) = \frac{\pi}{2}. \quad (2.4.20)$$

Компонента $T_{\text{рв}}(t)$ должна обеспечивать требуемое значение курсового угла $\Psi_{\text{тр}}(t)$, $t \in [t_0, t_k]$.

Пример 2.7.

Проиллюстрируем этот режим полета БВ с использованием исходных данных и уравнений движения из Примера 2.6 при $\theta = \theta_1 = 0^\circ$ и высоте полета, равной 100 м.

Пусть при $t_0 = 0$ с. скорость БВ составляет величину $V(0) = 72,2$ м/с. Управляющие функции режима его полета на интервале времени $[0; 60]$ с. приближенно представим полиномами вида:

$$\begin{aligned} T_{\text{нв}}(t) &= 1,951 \cdot 10^4 - 68,113t + 5,762t^2 - \\ &\quad - 0,196t^3 + 2,919 \cdot 10^{-3}t^4 - 1,593 \cdot 10^{-5}t^5; \\ \chi(t) &= 1,406 + 0,022t - 5,424 \cdot 10^{-4}t^2 + 3,798 \cdot 10^{-6}t^3; \\ T_{\text{рв}}(t) &= 933,375. \end{aligned} \quad (2.4.21)$$

Результаты моделирования движения БВ при этих управляющих воздействиях приведены в Табл. 2.12.

Таблица 2.12

t, c	$V, m/c$	$\theta, \text{град.}$	x, m	y, m
0	72,200	0	500	100
6	58,500	0,020	891	100,068
12	46,348	0,020	1205	100,187
18	35,557	0,002	1450	100,239
24	26,094	-0,012	1634	100,221
30	18,006	-0,016	1766	100,189
36	11,387	-0,031	1853	100,158
42	6,361	-0,106	1906	100,105
48	3,028	-0,212	1933	100,029
54	1,158	-0,179	1945	100,001
60	0	-1,032	1947	100,029

На Рис. 2.12 представлены графики изменения скорости и дальности полета БВ, построенные по данным этой таблицы.

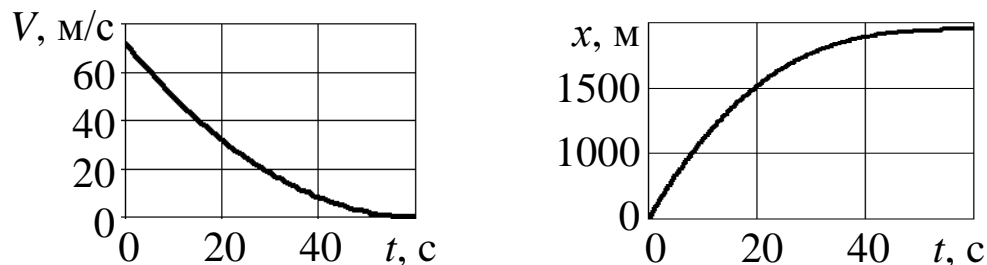


Рис. 2.12

Из полученных результатов следует, что условия (2.4.19) выполняются с точностью проводимых расчетов.

В конечной точке полета БВ при $t_k = 60$ с. выражения (2.4.21) принимают следующие значения:

$$T_{\text{нв}}(60) = 19247,220 \text{ Н}; \quad \chi(60) = 1,5708 \text{ рад};$$

$$T_{\text{рв}}(60) = 933,375 \text{ Н}.$$

Эти значения при $G = 19247,220$ Н и $\chi(60) = 1,5708 \cdot 180/\pi = 90,007^\circ$ полностью удовлетворяют требованиям вида (2.4.20).

Другим специальным режимом движения БВ является *режим обратного полета* по траектории ранее выполненного прямого полета.

Для реализации такого режима сила тяги T_{HB}^x , согласно Рис. 2.9,б, должна лежать на отрицательной части оси ЦМ $x_{\text{СК}}$ и значения скорости $V(t) < 0$, $t \in [t_0, t_k]$. В этом случае из выражений (2.4.1) следует, что:

$$T_{\text{HB}}^x = -T_{\text{HB}} \cos \chi.$$

Подставляя это значение в уравнения (2.4.3), (2.4.4) и используя уравнение (2.4.11), получаем динамические уравнения обратного полета БВ вида:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{-T_{\text{HB}} \cos \chi - 0,5 \bar{c}_x \rho V^2 F_{\text{HB}}}{m} - g \sin \theta; \\ \dot{\theta} &= \frac{T_{\text{HB}} \sin \chi}{mV} - \frac{g}{V} \cos \theta; \\ \dot{\Psi} &= \frac{T_{\text{PB}} L_{\text{PB}} - M_p(y)}{J_y}. \end{aligned} \quad (2.4.21)$$

При описании обратного движения БВ в вертикальной плоскости к выражениям (2.4.21) добавляются уравнения (2.4.15), а в горизонтальной плоскости – последние два уравнения системы (2.4.18).

Пример 2.8.

Рассмотрим обратный полет БВ в условиях Примера 2.6 при $\theta = 0^\circ$ из точки с координатами (4832; 100) м. на интервале времени [0; 60 с.] со скоростью $V = -72,2$ м/с.

Результаты решения системы уравнений (2.4.21), (2.4.15) при управлениях $T_{\text{HB}}(t) = 20836,75$ Н, $\chi(t) = 112,524^\circ$ и $T_{\text{PB}}(t) = 933,375$ Н приведены в Табл. 2.13.

Таблица 2.13

t, c	$V, m/c$	$\theta, \text{град.}$	$\Psi, \text{град.}$	x, m	y, m
0	-72,2	0	0	4832	100
6	-72,2	0	0	4399	100
12	-72,2	0	0	3966	100
18	-72,2	0	0	3532	100
24	-72,2	0	0	3099	100
30	-72,2	0	0	2666	100
36	-72,2	0	0	2233	100
42	-72,2	0	0	1800	100
48	-72,2	0	0	1366	100
54	-72,2	0	0	933	100
60	-72,2	0	0	500	100

Из таблицы следует, что при обратном прямолинейном полете БВ за 60 с. движения попадает в начальную точку (500; 100) м. прямого полета (см. раздел 2 Табл. 2.10).

В Табл. 2.14 представлена динамика обратного движения БВ по прямолинейной траектории при $\theta = 15^\circ$ из точки с координатами (4832; 1221) м. при следующих управляющих воздействиях:

$$T_{\text{нв}}(t) = 22665,898 \text{ Н}; \quad \chi(t) = 124,894^\circ;$$

$$T_{\text{рв}}(t) = (2,407t + 774,75) \text{ Н},$$

вычисленных методами Разд. 5.2 при $\theta_{\text{тр}} = 105^\circ$.

Таблица 2.14

t, c	$V, m/c$	$\theta, \text{град.}$	$\Psi, \text{град}$	x, m	y, m
0	-72,2	105	0	4684	1221
6	-72,2	105	0	4266	1109
12	-72,2	105	0	3848	996,963
18	-72,2	105	0	3429	884,843
24	-72,2	105	0	3011	772,722
30	-72,2	105	0	2592	660,602
36	-72,2	105	0	2174	548,482
42	-72,2	105	0	1755	436,361
48	-72,2	105	0	1337	324,241
54	-72,2	105	0	918	212,120
60	-72,2	105	0	500	100

В этом случае БВ также попадает в начальную точку (500; 100) м. «прямой» траектории набора высоты (см. раздел 1 Табл. 2.10).

Процессы *висения* в точке (x_B, y_B, z_B) и *разворота БВ* на этом режиме на интервале времени $[t_1, t_2]$ описываются следующими соотношениями:

$$V(t) = 0; \quad \dot{V}(t) = 0; \quad \theta(t) = \frac{\pi}{2}; \quad \dot{\theta}(t) = 0; \quad (2.4.22)$$

$$\dot{\Psi} = \frac{T_{PB} L_{PB} - M_p(y_B)}{J_y}; \quad (2.4.23)$$

$$\dot{x} = V \cos \theta \cos \Psi;$$

$$\dot{y} = V \sin \theta; \quad (2.4.24)$$

$$\dot{z} = V \cos \theta \sin \Psi, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Начальные условия для уравнений (2.4.23) и (2.4.24) имеют вид:

$$\Psi(t_1) = \Psi_1; \quad x(t_1) = x_B; \quad y(t_1) = y_B; \quad z(t_1) = z_B. \quad (2.4.25)$$

Будем считать, что развороты (вращение) вертолетов производятся при силе тяги $T_{PB} = \text{const}$ и моменте $M_p(y_B) = \text{const}$.

Примем, что разворот БВ на требуемый угол Ψ_2 осуществляется во времени по линейному закону вида:

$$\Psi(t) = \Psi_1 + \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{t_2 - t_1} (t - t_1), \quad (2.4.26)$$

где t_2 – заданный момент времени окончания разворота.

Производная от этого выражения будет равна:

$$\dot{\Psi} = \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{t_2 - t_1}. \quad (2.4.27)$$

Требуемое значение тяги РВ для реализации закона разворота (2.4.26) определим, подставляя выражение (2.4.27) в левую часть уравнения (2.4.23).

Проводя простые преобразования, получим формулу вида:

$$T_{\text{рв}}^{\text{тр}} = \frac{J_y}{L_{\text{рв}}} \left(\frac{\Psi_2 - \Psi_1}{t_2 - t_1} \right) + \frac{M_p(y_B)}{L_{\text{рв}}}. \quad (2.4.28)$$

Заметим, что тяга РВ в интервале времени $[t_1, t_2]$ должна измениться от значения при висении БВ:

$$T_{\text{рв}}^{\text{в}} = \frac{M_p(y_B)}{L_{\text{рв}}} \quad (2.4.29)$$

до значения, определяемого формулой (2.4.28), которое должно обеспечить разворот БВ на требуемый курсовой угол Ψ_2 его дальнейшего полета.

На Рис. 2.13 представлен характер изменения функций $T_{\text{рв}}(t)$ и $\Psi(t)$ при развороте БВ от курсового угла Ψ_1 до Ψ_2 .

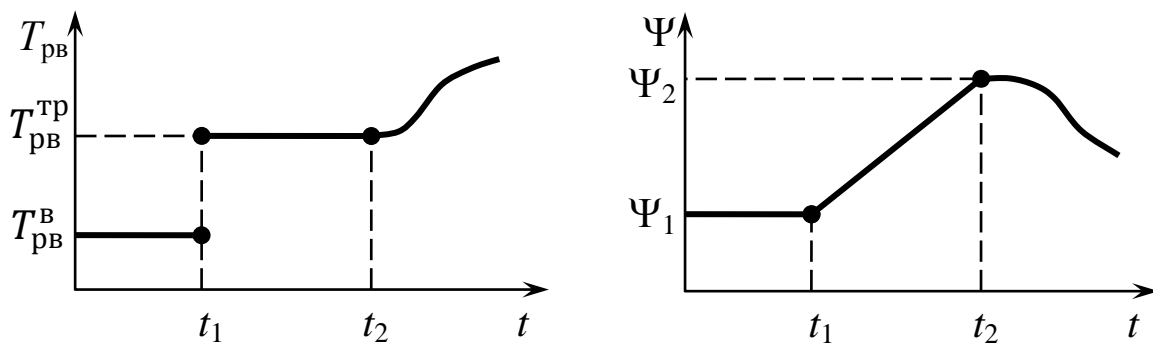


Рис. 2.13

Данный режим движения БВ применяется при их полетах по поворотным пунктам маршрута (ППМ), а также при осуществлении процессов его вертикального взлета и посадки.

Пример 2.9.

Рассмотрим моделирование движения БВ по составным траекториям.

Пусть БВ должен пролететь на интервале времени $[0; 60]$ с. по траектории, рассмотрено в Примере 2.7.

В конечной точке этой траектории, которая является ППМ БВ с параметрами:

$$V(60) = 0; \quad \theta(60) = 0^\circ; \quad \Psi_1(60) = 0^\circ;$$

$$x(60) = 1947 \text{ м}; \quad y(60) = 100 \text{ м}.$$

должно быть проведено его зависание. В этой точке при $t_1 = 60$ с. БВ должен начаться разворот на курсовой угол:

$$\Psi_2 = 120^\circ = 2,0942 \text{ рад.}$$

который должен быть завершен в момент времени $t_2 = 72$ с.

По формуле (2.4.29) при $J_y = 300 \text{ кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^{-1}$, $L_{\text{РВ}} = 6 \text{ м}$, $M_p(100) = 5600 \text{ Н}\cdot\text{м}$ получаем, что:

$$T_{\text{РВ}}^{\text{ТР}} = 942,059 \text{ Н}.$$

Из Примера 2.7 следует, что при висении БВ сила тяги $T_{\text{РВ}}^{\text{В}} = 942,059 \text{ Н}$. Таким образом, в момент времени $t_1 = 60$ с. начала разворота сила тяги РВ должна увеличиться на величину $\Delta T_{\text{РВ}} = T_{\text{РВ}}^{\text{ТР}} - T_{\text{РВ}}^{\text{В}} = 8,684 \text{ Н}$. Это приращение, согласно Рис. 2.13, действует до момента времени $t_2 = 72$ с.

Будем считать, что согласно полетному заданию БВ должен после разворота осуществить полет «змейкой» на постоянной высоте 100 м. с постоянной скоростью, равной 72,2 м/с до момента времени $t_k = 90$ с.

Таким образом, необходимо осуществить моделирование движения БВ по составной траектории, включающей в себя следующие этапы:

1. Прямолинейный полет в вертикальной плоскости на постоянной высоте 100 м. на интервале времени $[0; 60]$ с. с зависанием в конечной точке траектории.

2. Разворот БВ в точке висения от значения курсового угла $\Psi_1 = 0^\circ$ до значения $\Psi_2 = 120^\circ$.

3. Полет «змейкой» с заданными значениями амплитуды и периода на интервале времени $[72; 90]$ с.

Следуя Примеру 2.7, результаты моделирования полета БВ на этапе 1 возьмем из Табл. 2.12.

При моделировании этапа 2, который реализуется при $t \in [t_1, t_2] = [60, 72]$ с., воспользуемся выражениями (2.4.22)-(2.4.25) при $\Psi_1 = 0^\circ$; $x_B = 1947$ м; $y_B = 100$ м; $z_B = 0$ м. и управлениях вида:

$$T_{HB}(t) = 19247,305 \text{ Н}; \quad \chi(t) = 90^\circ; \quad T_{PB}(t) = 942,059 \text{ Н}, \quad t \in [60; 72] \text{ с.}$$

Завершающий этап 3 рассматриваемого полета БВ моделируется уравнениями (2.4.3)-(2.4.6) при следующих управляющих воздействиях на интервале времени $[72; 90]$ с:

$$T_{HB}(t) = 20830,68 \text{ Н}; \quad \chi(t) = 67,47^\circ;$$

$$T_{PB}(t) = (20\sin(0,65t) + 933,375) \text{ Н.}$$

Общие результаты моделирования всех этапов движения БВ представлены в Табл. 2.15.

График пространственной составной траектории БВ, построенный по данным трех последних столбцов этой таблицы, представлен на Рис. 2.14.

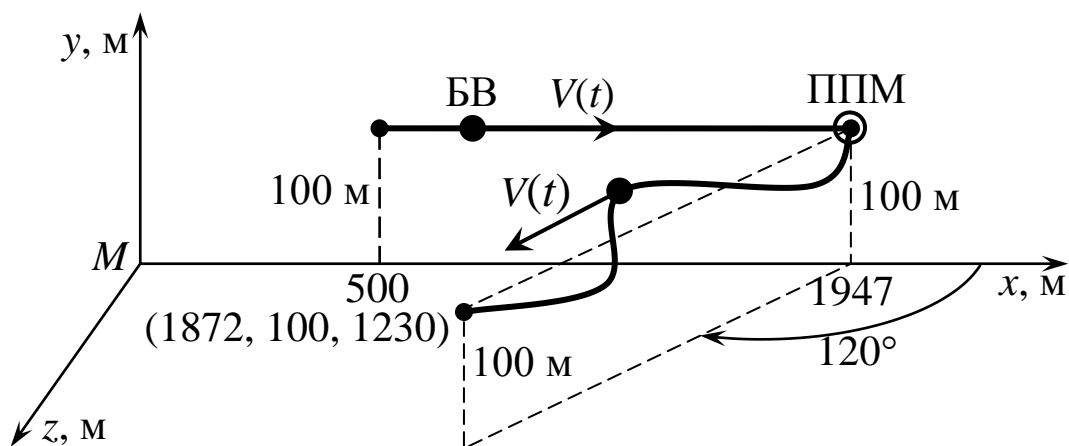


Рис. 2.14

Рассмотрим перспективный специальный режим движения БВ, который, наряду с обычными режимами его полета, включает в себя этапы торможения, зависания, вертикального набора высоты (снижения) и разгона.

Таблица 2.15

Этапы движения	t , с	V , м/с	θ , град.	Ψ , град.	x , м	y , м	z , м
1. Горизонтальный полет БВ с зависанием	0	72,2	0	0	500	100	0
	6	58,500	0	0	891	100	0
	12	46,348	0	0	1205	100	0
	18	35,557	0	0	1450	100	0
	24	26,094	0	0	1634	100	0
	30	18,006	0	0	1766	100	0
	36	11,387	0	0	1853	100	0
	42	6,361	0	0	1906	100	0
	48	3,028	0	0	1933	100	0
	54	1,158	0	0	1945	100	0
	60	0	0	0	1947	100	0
2. Разворот БВ в ППМ	60	0	0	0	1947	100	0
	61,2	0	0	12	1947	100	0
	62,4	0	0	24	1947	100	0
	63,6	0	0	36	1947	100	0
	64,8	0	0	48	1947	100	0
	66,0	0	0	60	1947	100	0
	67,2	0	0	72	1947	100	0
	68,4	0	0	84	1947	100	0
	69,6	0	0	96	1947	100	0
	70,8	0	0	108	1947	100	0
	72	0	0	120	1947	100	0
3. Полет БВ «змейкой»	72	72,2	0	120	1947	100	0
	73,8	72,2	0	112,5	1884	100	113,5
	75,6	72,2	0	83,5	1865	100	240,6
	77,4	72,2	0	68,5	1902	100	364,9
	79,2	72,2	0	85,7	1936	100	489,7
	81,0	72,2	0	114,2	1912	100	616,1
	82,8	72,2	0	119,2	1848	100	729,1
	84,6	72,2	0	94,6	1807	100	851,4
	86,4	72,2	0	70,5	1828	100	978,7
	88,2	72,2	0	76,2	1871	100	1101
	90	72,2	0	104,8	1872	100	1230

Схематически фрагменты составной траектории движения БВ в вертикальной плоскости некоторой маневренной СК представлены на Рис. 2.15.

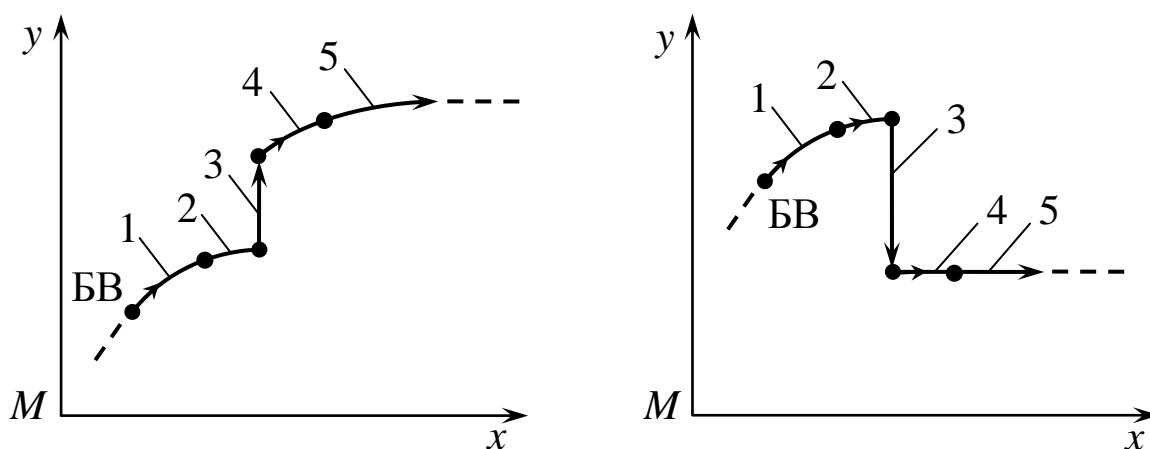


Рис. 2.15

На этом рисунке использована следующая нумерация этапов полета БВ:

- 1, 5 – движение вертолета в обычных режимах его полета;
- 2 – торможение и зависание БВ;
- 3 – вертикальный набор высоты (снижение) с зависанием;
- 4 – разгон БВ до требуемой на этапе 5 скорости его полета.

Движение БВ на этапах 1 и 5, которые выполняются на интервалах времени $[t_1, t_2]$ и $[t_4, t_5]$, описываются системами уравнений (2.4.3), (2.4.4) и (2.4.11) с соответствующими начальными условиями, определяемыми движениями БВ на предшествующих этапах его полета. При этом используются векторы управления $u_1(t)$ и $u_5(t)$ вида (2.4.17).

Этап 2 моделируется такой же системой уравнений, а управление $u_2(t)$ при $t \in [t_2, t_3]$ должно удовлетворять требованиям вида (2.4.20).

Отметим, что вывод систем уравнений движения БВ на этапе 3 приведен в Разд. 3.6.

На этапе 4 используются уравнения (2.4.3), (2.4.4), (2.4.11) с соответствующими начальными условиями. Вектор управления $u_4(t)$, $t \in [t_4, t_5]$ должен обеспечить выполнение следующих требований:

$$V(t_4) = 0; \quad \dot{V}(t_4) = 0; \quad V(t_5) = V_5(t_5); \quad \dot{V}(t_5) = 0. \quad (2.4.30)$$

Здесь $V_5(t_5)$ – требуемая скорость БВ в начальной точке этапа 5.

В заключение главы отметим, что использованные в приведенных в ней примерах векторы управлений $u = u(t)$ получены с помощью методов, изложенных в Главе 5 данной монографии.

Глава 3. ДИНАМИКА ВЗЛЕТА И ПОСАДКИ БЛА

Взлет и посадка являются важнейшими этапами полетов современных БЛА, от выполнения которых зависит как эффективность проводимых с их использованием операций, так и возможности их многоразового применения.

Примеры различных способов взлета и посадки БЛА самолетных схем (БЛА СС) представлены на Рис. 1.6. Возможные виды взлета и посадки беспилотных вертолетов рассмотрены в работе [9].

Методы расчета взлетно-посадочных характеристик самолетов, применяемых при их проектировании, достаточно широко представлены в существующей литературе [12, 14, 23, 31 и др.]. В этих методах для получения конечных расчетных формул сильно упрощаются процессы взлета и посадки самолетов, не учитывая при этом значительное число действующих в них факторов.

В фундаментальной работе [26] отмечается, что процессы взлета и посадки самолетов характеризуются высокой сложностью этих режимов, обусловленной их существенной нестационарностью со значительными изменениями параметров полета, нелинейным влиянием аэродинамических характеристик самолетов при их отрыве и касании, а также при движении по взлетно-посадочной полосе (ВПП). При этом значительное влияние на протекание этих процессов оказывают внешние условия (состояние атмосферы, ВПП и др.). Процессы взлета и посадки вертолетов посвящены работы [23, 35, 48, 49].

Следует заметить, что в настоящее время практически полностью отсутствуют доступные работы по математическому описанию основных видов взлета и посадки современ-

ных БЛА. Общие вопросы этого направления динамики полета БЛА рассмотрены в монографии [9].

Применение излагаемых в данной главе математических моделей динамики взлета и посадки БЛА при их эксплуатации позволит предварительно оценить влияние существующих параметров атмосферы и вида старта на взлетные характеристики БЛА. Кроме этого моделирование взлета и посадки БЛА позволяет учитывать характеристики местности, на которой реализуются эти процессы, при использовании временных взлетно-посадочных площадок беспилотных подразделений [22].

3.1. Взлет БЛА самолетных схем (СС) с мобильных пусковых установок

Старт с пусковой установки является в настоящее время основным видом взлета БЛА СС наземного базирования легкого и среднего классов (см. Рис. 1.5). При этом в основном используются установки-прицепы, буксируемые одной из спецмашин, входящих в состав соответствующего беспилотного авиационного комплекса (БАК). В дальнейшем изложении материала этого раздела сокращение «СС» будем опускать.

Для увеличения силы тяги маршевого двигателя БЛА в таких установках используются резиновые жгуты, пневмоцилиндры и сбрасываемые твердотопливные стартовые ускорители [9].

Следует отметить, что существующие пусковые установки имеют фиксированное значение угла наклона направляющих (см. Рис. 1.6,в), что не позволяет оперативно варьировать условиями взлета БЛА.

Рассматриваемый в данном разделе вид старта БЛА осуществляется с использованием мобильной пусковой установки (МПУ) на базе автомобильного шасси повышенной проходимости (КАМАЗ, УРАЛ, УАЗ и т.п.), позволяющих осуществлять оперативное передвижение беспилотных подразделений в точки пуска БЛА по пересеченной местности [22]. На этом шасси установлены направляющие длиной l_n , которые имеют регулируемый угол наклона θ_n к плоскости Земли. В некоторых БАК направляющие размещаются в специальных контейнерах с открывающимися при старте БЛА задней и передней крышками.

С помощью транспортно-заряжающей машины (ТЗМ) беспилотного авиационного комплекса на направляющих МПУ размещается БЛА в предстартовом состоянии. На корпусе (фюзеляже) БЛА имеются специальные элементы (бугели), которые фиксируют его на направляющих МПУ и обеспечивают движение по ним в процессе взлета БЛА [9, 22].

На Рис. 3.1 приведено схематическое представление МПУ с установленным на ней БЛА. В процессе его движения по направляющим со скоростью $V = V(t)$ на БЛА действуют силы трения F_i и нормальные реакции N_i , возникающие в i -й паре бугелей БЛА. На этом рисунке изображены $i = 2$ пары бугелей, параметр l_6 означает расстояние до первой пары бугелей БЛА, а символом «ЦМ» обозначен центр масс снаряженного к взлету БЛА. Кроме этого на Рис. 3.1 представлена стартовая система координат (см. Рис. 1.11), ось $O_{ст}y_{ст}$ которой проходит через ЦМ БЛА.

В качестве ускорителя обычно используется ракетный двигатель твердого топлива (РДТТ) [6, 44], который исполь-

зается как стартовый двигатель (СД), подвешиваемый под фюзеляж БЛА и отбрасываемый после сгорания его заряда [9].

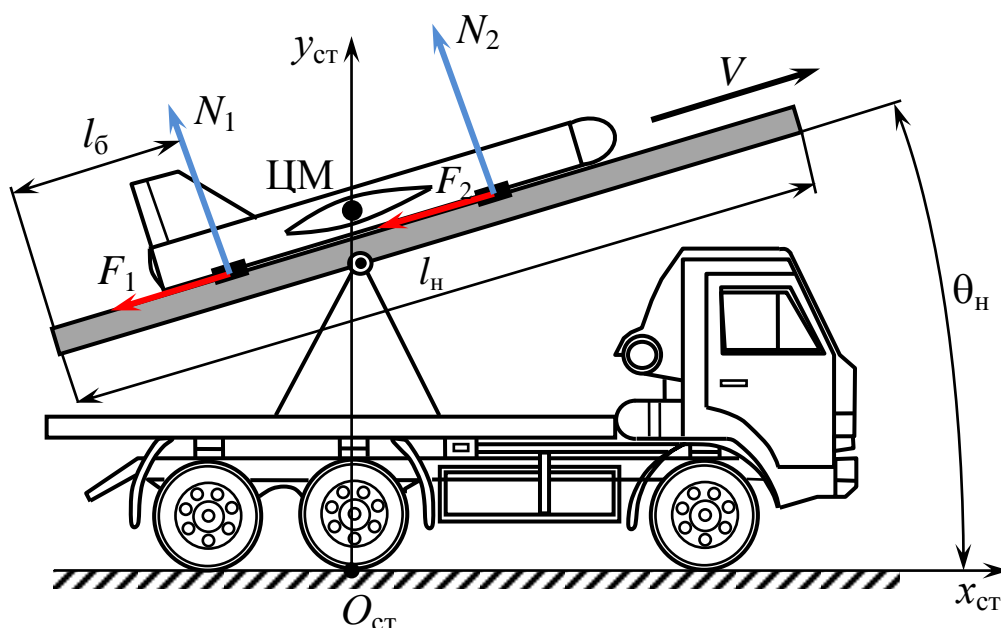


Рис. 3.1

Процесс взлета БЛА со СД включает в себя следующие этапы [9]:

1. Движение БЛА по направляющим МПУ под действием сил тяги СД и маршевого двигателя (МД) БЛА.
2. Движение БЛА в воздухе после схода с направляющих МПУ при работающих СД и МД.
3. Полет БЛА после сброса СД под действием силы тяги МД.

При моделировании движения БЛА на этих этапах будем считать его материальной точкой переменной массы $m(t)$ [24] и описывать движение ЦМ БЛА в вертикальной плоскости взлета в каждый момент времени t с помощью значений скорости $V(t)$, угла наклона траектории $\theta(t)$ и координат $x(t)$, $y(t)$ в выбранной стартовой системе координат (СК). В приведенных ниже моделях, построенных на основе системы уравнений (2.1.43)-(2.1.46), этим характеристикам присвоены индексы с номером рассматриваемого этапа взлета БЛА.

Другой особенностью предлагаемых моделей является использование в них максимального значения силы тяги P МД и угла атаки α БЛА, равного нулю.

Кроме этого в моделях применяются зависимости $\rho = \rho(p, \tau, y)$ и $a = a(\tau, y)$, предложенные в Разд. 1.3.

Модель движения БЛА по направляющим МПУ.

Основную роль на первом этапе взлета БЛА играет СД, который имеет тягу $P_{сд}$ и сопло, повернутое относительно строительной оси БЛА на угол $\varphi_{сд}$. Этот угол и размещение СД выбираются таким образом, чтобы вектор силы тяги $P_{сд}$ проходил через ЦМ БЛА.

На Рис. 3.2 показаны составляющие силы $P_{сд}$, которые учитываются на этапах 1 и 2 взлета БЛА.

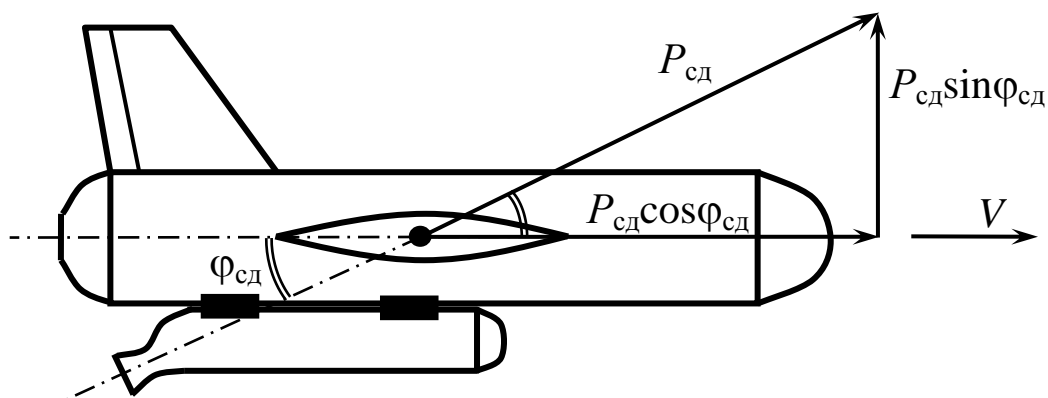


Рис. 3.2

Стартовый двигатель имеет следующие основные характеристики [9, 44]: $m_{кор}$ – масса корпуса СД (кг); $m_{зар}$ – масса заряда СД (кг); μ – массовая скорость горения заряда (кг/с); T – время работы СД (с).

Тогда масса объекта «БЛА+СД» будет изменяться во времени по следующему закону:

$$m(t) = m + m_{кор} + m_{зар} - \mu t; \quad t \in [0, T], \quad (3.1.1)$$

где m – масса БЛА.

Движение БЛА на интервале времени $[0, t_1]$ будем описывать согласно Рис. 3.1 и Рис. 3.2 системой дифференциальных уравнений вида [9]:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{P_{\text{мд}} + P_{\text{сд}} \cos \varphi_{\text{сд}} - F_{\text{тр}} - X(0, M_1, y_1)}{m(t)} - g \sin \theta_{\text{н}}; \\ \dot{L}_1 &= V_1; \\ \dot{x}_1 &= V_1 \cos \theta_{\text{н}}; \\ \dot{y}_1 &= V_1 \sin \theta_{\text{н}}, \quad t \in [0, t_1]. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Здесь $P_{\text{мд}}$ – максимальное значение силы тяги маршевого двигателя БЛА (Н); $L_1 = L_1(t)$ – длина пути, пройденного БЛА по направляющим в момент времени t (м); $x_1 = x_1(t)$, $y_1 = y_1(t)$ – координаты ЦМ БЛА в момент времени t (м); $F_{\text{тр}} = F_{\text{тр}}(t)$ – суммарное значение силы трения бугелей БЛА в момент времени t (Н); $X(0, M_1, y_1)$ – сила лобового сопротивления БЛА при нулевом угле атаки, движущегося со скоростью V_1 на высоте y_1 ; $M_1 = V_1/a$ – число Маха.

Для вычисления силы $F_{\text{тр}}$ будем использовать схему сил, действующих на ЦМ БЛА при его движении по направляющим МПУ, приведенную на Рис. 3.3.

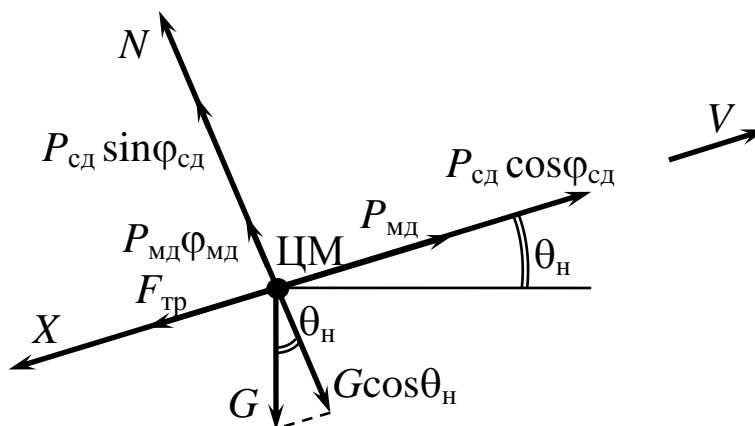


Рис. 3.3

На этом рисунке использованы следующие обозначения: N – суммарная сила реакции [24] направляющих МПУ БЛА (Н);

$\varphi_{\text{мд}}$ – угол установки МД БЛА (рад.); $G = G(t)$ – сила тяжести объекта «БЛА+СД» в момент времени t (Н).

Сила трения $F_{\text{тр}}$ при условии, что все бугели БЛА изготовлены из одного материала, вычисляется как [24]:

$$F_{\text{тр}} = f_c N, \quad (3.1.3)$$

где f_c – коэффициент трения скольжения бугелей по направляющим МПУ БЛА.

Из Рис. 3.3 следует, что:

$$N(t) = P_{\text{мд}} \varphi_{\text{мд}} + P_{\text{сд}} \sin \varphi_{\text{сд}} - G(t) \cos \theta_{\text{н}}. \quad (3.1.4)$$

Вычисляя силу тяжести как:

$$G(t) = m(t)g$$

и подставляя выражение (3.1.4) в формулу (3.1.3), получим:

$$F_{\text{тр}}(t) = f_c (P_{\text{мд}} \varphi_{\text{мд}} + P_{\text{сд}} \sin \varphi_{\text{сд}} - m(t)g \cos \theta_{\text{н}}), \quad (3.1.5)$$

где текущее значение массы $m(t)$ вычисляется по формуле (3.1.1).

Входящая в первое уравнение системы (3.1.2) сила лобового сопротивления представляется выражением вида:

$$X(0, M_1, y_1) = 0,5 c_{x0}(M_1, y_1) \rho(p, \tau, y_1) V_1^2 S. \quad (3.1.6)$$

Здесь $c_{x0}(M_1, y_1)$ – коэффициент лобового сопротивления при нулевом значении угла атаки БЛА; $\rho(p, \tau, y_1)$ – плотность воздуха при давлении p и температуре τ на высоте y_1 ; S – площадь крыла БЛА.

Зависимость коэффициента c_{x0} от своих аргументов при значениях углов атаки $\alpha = 0$ и $\alpha_0 \approx 0$ с учетом выражения (2.1.35) конкретизируется как:

$$c_{x0}(M_1, y_1) = c_0 + \frac{c_1 V_1}{a(y_1)}, \quad (3.1.7)$$

где $a(y_1)$ – скорость звука на высоте y_1 .

Для получения зависимости плотности воздуха от приведенных выше параметров будем использовать формулу (1.3.18). Скорость звука $a(y_1)$, входящая в выражение (3.1.7), будем вычислять по формуле (1.3.15).

Система уравнений (3.1.2) после подстановки в нее представленных выше выражений интегрируется на интервале времени $[0, t_1]$ при начальных условиях:

$$V_1(0) = 0; \quad L_1(0) = 0; \quad x_1(0) = 0; \quad y_1(0) = y_{\text{цм}}, \quad (3.1.8)$$

где $y_{\text{цм}}$ – высота ЦМ БЛА при его предстартовом размещении на направляющих МПУ (см. Рис. 3.1).

Момент времени t_1 завершения этапа 1 взлета БЛА определяется из условия:

$$L_1(t_1) = l, \quad (3.1.9)$$

где $l = l_{\text{н}} - l_{\text{б}}$ – расстояние, которое должен пройти БЛА до его схода с направляющих МПУ.

При достижении в процессе численного решения задачи (3.1.2), (3.1.8) равенства (3.1.9) фиксируются полученные значения $V_1(t_1)$, $x_1(t_1)$, $y_1(t_1)$, которые будут использованы при моделировании этапа 2 взлета.

Модель полета БЛА после схода с направляющих МПУ.

На этапе 2 взлета БЛА реализуется его полет на интервале времени $[t_1, T]$ под действием сил тяги МД и СД. Математическая модель движения БЛА на этом этапе имеет вид [9]:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \frac{P_{\text{мд}} + P_{\text{сд}} \cos \varphi_{\text{сд}} - X(0, M_2, y_2)}{m(t)} - g \sin \theta_2; \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{P_{\text{мд}} \varphi_{\text{мд}} + P_{\text{сд}} \sin \varphi_{\text{сд}} + Y(0, M_2, y_2)}{m(t)V_2} - \frac{g}{V_2} \cos \theta_2; \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= V_2 \cos \theta_2; \\ \dot{y}_2 &= V_2 \sin \theta_2, \quad t \in [t_1, T].\end{aligned}$$

В этой системе уравнений через $Y(0, M_2, y_2)$ обозначена подъемная сила БЛА, действующая при нулевом угле атаки, при его числе Маха $M_2 = V_2/a(y_2)$ на высоте полета y_2 .

Согласно выражениям (2.1.23) эта сила определяется как:

$$Y(0, M_2, y_2) = 0,5c_y(M_2, y_2)\rho(p, \tau, y_2)V_2^2S. \quad (3.1.11)$$

При этом коэффициент подъемной силы c_y с использованием выражения (2.1.34) вычисляется при $\alpha = 0$ по следующей формуле:

$$c_y(M_2, y_2) = \left(b_0 + \frac{b_1 V_2}{a(y_2)} \right). \quad (3.1.12)$$

Конкретизация правых частей первых двух уравнений системы (3.1.10) осуществляется с использованием выражений (3.1.11), (3.1.12), (1.3.15) и (1.3.18). С учетом этого система дифференциальных уравнений (3.1.10) интегрируются на фиксированном интервале времени $[t_1, T]$ при следующих начальных условиях:

$$V_2(t_1) = V_1(t_1); \quad \theta_2(t_1) = \theta_n; \quad x_2(t_1) = x_1(t_1); \quad y_2(t_1) = y_1(t_1), \quad (3.1.13)$$

обеспечивающих связь этапов 1 и 2 взлета БЛА.

Полученные при этом значения скорости $V_2(T)$, угла наклона траектории $\theta_2(T)$ и координаты $x_2(T)$, $y_2(T)$ ЦМ БЛА в момент времени T окончания работы СД используются в качестве начальных условий при моделировании заключительного этапа 3 взлета БЛА.

Модель полета БЛА после сброса стартового двигателя.

Данный этап взлета БЛА осуществляется на интервале времени $[T, t_3]$ до достижения им нулевого значения угла наклона траектории, то есть до выполнения условия вида:

$$\theta_3(t_3) = 0. \quad (3.1.14)$$

Будем считать, что значение времени t_3 соответствует началу горизонтального участка требуемого разгона или торможения БЛА для полета в зону выполнения полетного задания.

Модель движения БЛА на этапе 3 имеет вид [9]:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= \frac{P_{\text{мд}} - X(0, M_3, y_3)}{m} - g \sin \theta_3; \\ \dot{\theta}_3 &= \frac{P_{\text{мд}} \varphi_{\text{мд}} + Y(0, M_3, y_3)}{mV_3} - \frac{g}{V_3} \cos \theta_3; \\ \dot{x}_3 &= V_3 \cos \theta_3; \\ \dot{y}_3 &= V_3 \sin \theta_3, \quad t \in [T, t_3]. \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Начальные условия для этой системы уравнений записываются как:

$$V_3(T) = V_2(T); \quad \theta_3(T) = \theta_2(T); \quad x_3(T) = x_2(T); \quad y_3(t_1) = y_2(T). \quad (3.1.16)$$

Момент времени t_3 завершения этого этапа взлета БЛА определяется в процессе численного решения задачи (3.1.15), (3.1.16) текущим значением переменной t , при котором выполняется условие (3.1.14).

Тогда время взлета БЛА с МПУ при использовании стартового ускорителя будет равно:

$$t_{\text{взл}} = t_3. \quad (3.1.17)$$

Наряду с этим параметром определим следующие характеристики процесса взлета БЛА:

$$\begin{aligned} V_{\text{взл}} &= V_3(t_{\text{взл}}); \quad \theta_{\text{взл}} = \theta_3(t_{\text{взл}}) = 0^\circ; \\ x_{\text{взл}} &= x_3(t_{\text{взл}}); \quad y_{\text{взл}} = y_3(t_{\text{взл}}). \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

Полученные при моделировании взлета БЛА значения (3.1.17) и (3.1.18) используются для оценки возможности столкновения БЛА с естественными препятствиями и при программировании следующих этапов его полета. При этом значения координат $x_{\text{взл}}$, $y_{\text{взл}}$ и $z_{\text{взл}} = 0$ пересчитываются в соответ-

ствующую маневренную или базовую системы координат по методике, приведенной в Разд. 1.3.

Пример 3.1.

Проведем моделирование процесса взлета БЛА со следующими параметрами (см. Табл. 2.1):

$$m = 350 \text{ кг}; \quad S = 1,4 \text{ м}^2; \quad \alpha_0 = 0,4^\circ = 0,007 \text{ рад};$$

$$P_{\text{мд}} = 1208,65 \text{ Н}; \quad \varphi_{\text{дв}} = 3,5^\circ = 0,061 \text{ рад}; \quad A = 0,0759;$$

Эмпирические коэффициенты в формулах (3.1.7) и (3.1.12) для вычисления силы сопротивления и подъемной силы БЛА:

$$c_0 = 0,017; \quad c_1 = 0,250; \quad b_0 = 0,3271; \quad b_1 = 0,098.$$

Пусть характеристики СД имеют следующие значения:

$$m_{\text{кор}} = 50 \text{ кг}; \quad m_{\text{зар}} = 30 \text{ кг}; \quad \mu = 7,5 \text{ кг/с};$$

$$T = (3,5-4,0) \text{ с}; \quad P_{\text{сд}} = 16000 \text{ Н}; \quad \varphi_{\text{сд}} = 18^\circ = 0,314 \text{ рад}.$$

Предельные значения угла наклона направляющих МПУ:

$$\theta_{\text{н min}} = 20^\circ = 0,349 \text{ рад}; \quad \theta_{\text{н max}} = 35^\circ = 0,611 \text{ рад}.$$

Координаты ЦМ БЛА в предстартовом состоянии:

$$(x_{\text{цм}}, y_{\text{цм}}) = (0; 1,5) \text{ м}.$$

Коэффициент трения скольжения бугелей БЛА по направляющим МПУ («сталь-сталь»):

$$f_c = 0,2.$$

Длина хода БЛА по направляющим МПУ при его старте (см. Рис. 3.1):

$$l = l_{\text{н}} - l_{\text{б}} = 4,0 \text{ м}.$$

Интервал изменения температуры эксплуатации БЛА:

$$\tau_{\text{min}} = -40^\circ\text{С}; \quad \tau_{\text{max}} = +50^\circ\text{С}.$$

Диапазон изменения атмосферного давления при полетах БЛА:

$$p_{\text{min}} = 720 \text{ мм.рт.ст.}; \quad p_{\text{max}} = 780 \text{ мм.рт.ст}.$$

Проведем моделирование взлета БЛА при нормальных условиях ($p_0 = 760$ мм.рт.ст. и $\tau_0 = 15^\circ\text{C}$) для угла наклона направляющих МПУ $\theta_n = 28^\circ$.

Результаты численного интегрирования систем уравнений (3.1.2), (3.1.10), (3.1.15) с начальными условиями (3.1.8), (3.1.13) и (3.1.16) объединены в Табл. 3.1.

График траектории взлета БЛА в координатной форме приведен на Рис. 3.4.

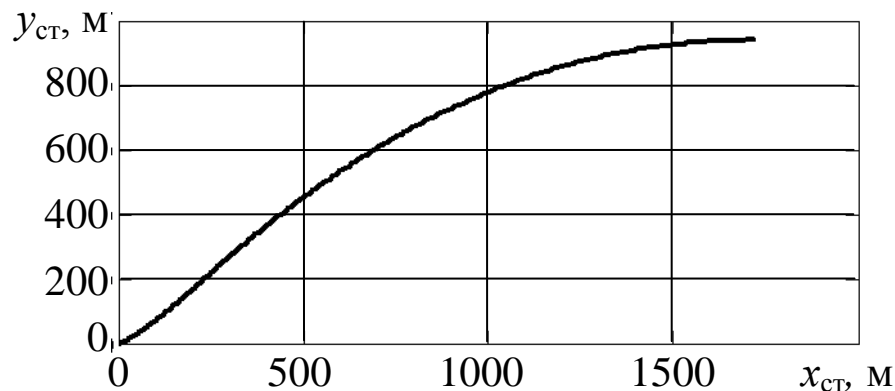


Рис. 3.4

Таблица 3.1

№ этапа	t , с.	V , м/с	θ , град.	x , м	y , м	L , м
1.	0	0	28	0	1,5	0
	0,032	1,125	28	0,016	1,508	0,018
	0,063	2,251	28	0,063	1,533	0,071
	0,095	3,377	28	0,141	1,575	0,160
	0,126	4,504	28	0,251	1,633	0,284
	0,158	5,632	28	0,392	1,708	0,444
	0,189	6,760	28	0,564	1,800	0,639
	0,221	7,890	28	0,768	1,908	0,870
	0,252	9,020	28	1,003	2,033	1,136
	0,284	10,150	28	1,270	2,175	1,438
	0,315	11,282	28	1,568	2,334	1,776
	0,347	12,414	28	1,898	2,509	2,149
	0,378	13,546	28	2,259	2,701	2,558
	0,410	14,680	28	2,652	2,910	3,003
	0,441	15,814	28	3,076	3,136	3,484
	0,473	16,948	28	3,532	3,378	4

2.	0,473	16,948	28	3,532	3,378	
	0,708	25,576	30,675	7,884	5,840	
	0,943	34,163	32,699	13,855	9,539	
	1,178	42,725	34,361	21,386	14,540	
	1,413	51,272	35,793	30,427	20,897	
	1,649	59,810	37,067	40,931	28,658	
	1,884	68,342	38,225	52,858	37,865	
	2,119	76,869	39,295	66,168	48,557	
	2,354	85,392	40,298	80,823	60,772	
	2,589	93,911	41,247	96,785	74,542	
	2,824	102,426	42,153	114,018	89,902	
	3,059	110,935	43,025	132,485	106,881	
	3,295	119,438	43,869	152,147	125,510	
	3,530	127,931	44,691	172,967	145,818	
	3,765	136,413	45,494	194,906	167,833	
	4	144,881	46,282	217,925	191,581	
3.	4	144,881	46,282	217,925	191,581	
	4,924	140,385	44,417	310,464	285,323	
	5,847	136,208	42,358	403,246	373,089	
	6,771	132,369	40,098	496,482	454,856	
	7,695	128,891	37,632	590,376	530,586	
	8,619	125,798	34,959	685,122	600,231	
	9,542	123,119	32,079	780,906	663,728	
	10,466	120,883	29,000	877,905	721,003	
	11,390	119,122	25,734	976,285	771,967	
	12,314	117,865	22,300	1076	816,520	
	13,237	117,139	18,724	1178	854,533	
	14,161	116,966	15,039	1281	885,948	
	15,085	117,362	11,282	1387	910,581	
	16,008	118,334	7,496	1494	928,325	
	16,932	119,881	3,721	1603	939,058	
17,856	121,993	0	1715	942,660		

Из полученных результатов следует, что параметры взлета БЛА вида (3.1.17) и (3.1.18) конкретизируются как:

$$t_{\text{взл}} = 17,856 \text{ с.}; \quad V_{\text{взл}} = 121,993 \text{ м/с}; \quad \theta_{\text{взл}} = 0^\circ;$$

$$x_{\text{взл}} = 1715 \text{ м}; \quad y_{\text{взл}} = 942,66 \text{ м.}$$

Результаты моделирования процесса взлета БЛА при тех же условиях, но для угла $\theta_n = 35^\circ$ приведены в Табл. 3.2.

Таблица 3.2

№ этапа	t , с.	V , м/с	θ , град.	x , м	y , м
1.	0	0	35	0	1,5
	0,032	1,107	35	0,015	1,510
	0,064	2,214	35	0,058	1,541
	0,096	3,322	35	0,131	1,592
	0,122	4,431	35	0,232	1,663
	0,160	5,541	35	0,363	1,754
	0,192	6,651	35	0,523	1,866
	0,224	7,762	35	0,712	1,999
	0,256	8,874	35	0,931	2,152
	0,288	9,986	35	1,178	2,325
	0,320	11,100	35	1,455	2,519
	0,352	12,214	35	1,761	2,733
	0,384	13,328	35	2,096	2,967
	0,416	14,444	35	2,460	3,223
	0,448	15,560	35	2,854	3,498
	0,480	16,677	35	3,277	3,794
2.	0,480	16,677	35	3,277	3,794
	0,715	25,043	38,160	7,198	6,724
	0,950	33,361	40,578	12,487	11,080
	1,184	41,651	42,579	19,064	16,928
	1,419	49,922	44,310	26,858	24,321
	1,654	58,181	45,854	35,807	33,307
	1,888	66,433	47,260	45,855	43,926
	2,123	74,679	48,559	56,947	56,215
	2,358	82,921	49,777	69,032	70,207
	2,592	91,160	50,928	82,059	85,935
	2,827	99,395	52,025	95,979	103,428
	3,061	107,627	53,078	110,743	122,712
	3,296	115,854	54,095	126,303	143,813
	3,531	124,075	55,082	142,610	166,756
	3,765	132,288	56,044	159,615	191,563
4	140,492	56,985	177,268	218,255	

3.	4	140,492	56,985	177,268	218,255
	5,044	134,310	55,362	257,084	337,482
	6,089	128,447	53,483	336,841	449,099
	7,133	122,922	51,323	416,848	553,124
	8,178	117,764	48,854	497,405	649,552
	9,222	113,008	46,049	578,806	738,355
	10,267	108,701	42,883	661,337	819,479
	11,311	104,900	39,336	745,280	892,842
	12,356	101,672	35,397	830,909	958,334
	13,400	99,089	31,070	918,493	1016
	14,445	97,229	26,380	1008	1065
	15,489	96,167	21,377	1101	1106
	16,533	95,968	16,134	1195	1138
	17,578	96,681	10,750	1293	1162
	18,622	98,330	5,334	1394	1176
19,667	100,910	0	1498	1181	

Из этой таблицы следует, что:

$$t_{\text{взл}} = 19,667 \text{ с}; \quad V_{\text{взл}} = 100,91 \text{ м/с}; \quad \theta_{\text{взл}} = 0^\circ;$$

$$x_{\text{взл}} = 1498; \quad y_{\text{взл}} = 1181 \text{ м.}$$

Отметим, что в работе [4] приведена методика определения оптимального значения угла $\theta_{\text{н}}$.

С использованием предложенных моделей и выражений (1.3.15), (1.3.18) были проведены вычислительные эксперименты по оценке влияния на взлетные характеристики БЛА изменения давления p и температуры τ на стартовой позиции. По результатам этих экспериментов приведем сводку значений характеристик (3.1.17), (3.1.18) как функции от этих факторов для значения $\theta_{\text{н}} = 28^\circ$:

$$t_{\text{взл}}(720; -40) = 18,012 \text{ с}; \quad V_{\text{взл}}(720; -40) = 118,318 \text{ м/с};$$

$$\theta_{\text{взл}}(720; -40) = 0^\circ; \quad x_{\text{взл}}(720; -40) = 1695 \text{ м};$$

$$y_{\text{взл}}(720; -40) = 950,809 \text{ м.}$$

$$t_{\text{взл}}(780; -40) = 18,105 \text{ с}; \quad V_{\text{взл}}(780; -40) = 116,561 \text{ м/с};$$

$$\theta_{\text{взл}}(780; -40) = 0^\circ; \quad x_{\text{взл}}(780; -40) = 1686 \text{ м};$$

$$y_{\text{взл}}(780; -40) = 956,128 \text{ м}.$$

$$t_{\text{взл}}(720; +50) = 17,688 \text{ с}; \quad V_{\text{взл}}(720; +50) = 125,109 \text{ м/с};$$

$$\theta_{\text{взл}}(720; +50) = 0^\circ; \quad x_{\text{взл}}(720; +50) = 1727 \text{ м};$$

$$y_{\text{взл}}(720; +50) = 933,547 \text{ м}.$$

$$t_{\text{взл}}(780; +50) = 17,769 \text{ с}; \quad V_{\text{взл}}(780; +50) = 123,817 \text{ м/с};$$

$$\theta_{\text{взл}}(780; +50) = 0^\circ; \quad x_{\text{взл}}(780; +50) = 1723 \text{ м};$$

$$y_{\text{взл}}(780; +50) = 938,093 \text{ м}.$$

Анализ этих значений показывает, что изменение температуры воздуха на стартовой позиции оказывает бóльшее влияние на взлетные характеристики БЛА, чем изменение атмосферного давления. Наибольшие отклонения взлетных характеристик БЛА от их значений при нормальных атмосферных условиях по времени взлета (1,4%), скорости (−4,4%), дальности (−1,7%) и высоте (1,4%) достигаются при $p = 780 \text{ мм.рт.ст.}$ и $\tau = -40^\circ\text{C}$.

Другим широко распространенным в настоящее время способом взлета БЛА является их старт с пусковой установки с помощью пневмокатапульты (ПК).

Будем считать, что МПУ, представленная на Рис. 3.1, оснащена пневмосистемой, включающей в себя компрессор сжатого воздуха и пневмоцилиндр с толкающим штоком [30].

Для формализации рассматриваемого процесса взлета БЛА будем использовать следующие параметры этой системы:

$F_{\text{ПК}}$ – усилие на штоке пневмоцилиндра, выполняющее роль силы, перемещающей БЛА по направляющим МПУ (Н);

l – ход штока цилиндра, определяющий длину пути БЛА по направляющим МПУ.

Процесс взлета БЛА с помощью пневмокатапульты включает в себя следующие этапы:

1. Движение БЛА по направляющим МПУ.
2. Воздушный участок взлета после схода БЛА с направляющих МПУ.

При описании этого процесса будем использовать модели (3.1.2) и (3.1.10) с соответствующими изменениями.

Этап 1. На практике в зависимости от конструктивных особенностей БЛА движение БЛА по направляющим МПУ реализуется в 2-х вариантах:

- с работающим на максимальной силе тяги $P_{\text{мд}}$ маршевом двигателе (МД) БЛА;
- с неработающим МД, который запускается после схода БЛА с направляющих МПУ.

В первом варианте с сохранением обозначений, принятых в выражениях (3.1.2), получаем систему дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{P_{\text{мд}} + F_{\text{пк}} - F_{\text{тр}} - X(0, M_1, y_1)}{m} - g \sin \theta_{\text{н}}; \\ \dot{L}_1 &= V_1; \\ \dot{x}_1 &= V_1 \cos \theta_{\text{н}}; \\ \dot{y}_1 &= V_1 \sin \theta_{\text{н}}, \quad t \in [0, t_1]. \end{aligned} \tag{3.1.20}$$

где $m = \text{const}$ – взлетная масса БЛА; сила трения $F_{\text{тр}}$ определяется как:

$$F_{\text{тр}} = f_c(P_{\text{мд}} \varphi_{\text{мд}} - m g \cos \theta_{\text{н}}). \tag{3.1.21}$$

Для второго варианта старта БЛА, полагая в выражениях (3.1.20) $P_{\text{мд}} \equiv 0$ при $t \in [0, t_1]$, получаем модель вида:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= \frac{F_{\text{пк}} - F_{\text{тр}} - X(0, M_1, y_1)}{m} - g \sin \theta_{\text{н}}; \\ \dot{L}_1 &= V_1; \\ \dot{x}_1 &= V_1 \cos \theta_{\text{н}}; \\ \dot{y}_1 &= V_1 \sin \theta_{\text{н}}, \quad t \in [0, t_1].\end{aligned}\tag{3.1.22}$$

Отметим, что условия (3.1.8) и (3.1.9) для моделей (3.1.20) и (3.1.22) остаются без изменений.

Этап 2. При описании этого этапа система уравнений (3.1.10) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= \frac{P_{\text{мд}} - X(0, M_2, y_2)}{m} - g \sin \theta_2; \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{P_{\text{мд}} \varphi_{\text{мд}} + Y(0, M_2, y_2)}{mV_2} - \frac{g}{V_2} \cos \theta_2; \\ \dot{x}_2 &= V_2 \cos \theta_2; \\ \dot{y}_2 &= V_2 \sin \theta_2, \quad t \in [t_1, t_2].\end{aligned}\tag{3.1.23}$$

Начальными условиями для решения этой системы являются условия (3.1.13).

Условием завершения этапа 2 взлета БЛА в момент времени $t = t_2$ будет по аналогии с выражением (3.1.14) равенство вида:

$$\theta_2(t_2) = 0.\tag{3.1.24}$$

Тогда значения взлетных характеристик определяются как:

$$\begin{aligned}t_{\text{взл}} &= t_2; \quad V_{\text{взл}} = V_2(t_2); \quad \theta_{\text{взл}} = 0^\circ; \\ x_{\text{взл}} &= x_2(t_2); \quad y_{\text{взл}} = y_2(t_2).\end{aligned}\tag{3.1.25}$$

Отметим, что в моделях (3.1.20), (3.1.22) и (3.1.23) в связи со значительными продольными перегрузками от действия большой силы $F_{\text{пк}} = \text{const}$ взлет БЛА осуществляется при «зажатых» рулях, при которых угол атаки БЛА $\alpha = 0$. В этом случае коэффициенты c_x и c_y силы лобового сопротивления X и подъемной силы Y вычисляются по формулам (3.1.7) и (3.1.12).

Пример 3.2.

Пусть гипотетический БЛА с поршневым двигателем при нормальных условиях ($p_0 = 760$ мм.рт.ст., $\tau_0 = 15^\circ\text{C}$) осуществляет взлет с МПУ, оснащенной пневмокатапульты с параметрами:

$$F_{\text{пк}} = 47000 \text{ Н}; \quad l = 4 \text{ м.}$$

Будем считать, что БЛА имеет следующие характеристики:

$$m = 100 \text{ кг}; \quad S = 1,4 \text{ м}^2; \quad P_{\text{мд}} = 354,3 \text{ Н.}$$

Предположим, что аэродинамические характеристики этого БЛА полностью соответствуют характеристикам из Примера 3.1.

Результаты численного интегрирования систем (3.1.20) и (3.1.23), описывающих взлет БЛА с углом наклона направляющих $\theta_n = 28^\circ$ при работающем МД представлены в Табл. 3.3.

Таблица 3.3

№ этапа	t , с.	V , м/с	θ , град.	x , м	y , м	L , м
1.	0	0	28	0	1,5	0
	0,009	4,091	28	0,016	1,508	0,018
	0,017	8,181	28	0,063	1,533	0,071
	0,026	12,272	28	0,141	1,575	0,160
	0,035	16,362	28	0,251	1,634	0,285
	0,043	20,453	28	0,392	1,709	0,445
	0,052	24,543	28	0,565	1,801	0,640
	0,061	28,632	28	0,769	1,909	0,871
	0,070	32,722	28	1,005	2,034	1,138
	0,078	36,811	28	1,272	2,176	1,440
	0,087	40,899	28	1,570	2,335	1,778
	0,096	44,987	28	1,900	2,510	2,151
	0,104	49,074	28	2,261	2,702	2,560
	0,113	53,161	28	2,653	2,911	3,005
	0,122	57,247	28	3,077	3,136	3,485
0,130	61,332	28	3,532	3,378	4	
2.	0,130	61,332	28	3,532	3,378	
	0,371	60,919	26,307	16,633	10,099	

0,612	60,572	24,571	29,847	16,385
0,853	60,293	22,794	43,178	22,234
1,094	60,084	20,981	56,631	27,639
1,335	59,946	19,136	70,210	32,598
1,576	59,881	17,263	83,921	37,106
1,817	59,891	15,366	97,765	41,159
2,058	59,976	13,451	111,748	44,752
2,299	60,138	11,524	125,873	47,880
2,540	60,377	9,589	140,142	50,539
2,781	60,693	7,652	154,559	52,724
3,021	61,085	5,720	169,126	54,432
3,262	61,555	3,797	183,846	55,656
3,503	62,100	1,888	198,721	56,394
3,744	62,720	0	213,753	56,641

Полученные характеристики взлета БЛА (3.1.25) имеют вид:

$$t_{\text{взл}} = 3,744 \text{ с}; \quad V_{\text{взл}} = 62,720 \text{ м/с}; \quad \theta_{\text{взл}} = 0^\circ;$$

$$x_{\text{взл}} = 213,753 \text{ м}; \quad y_{\text{взл}} = 56,641 \text{ м}.$$

В Табл. 3.4 приведены результаты решения систем уравнений (3.1.22) и (3.1.23), описывающих процесс старта БЛА с неработающим МД при $\theta_{\text{н}} = 28^\circ$.

Для этого варианта получены следующие значения взлетных характеристик БЛА:

$$t_{\text{взл}} = 3,729 \text{ с}; \quad V_{\text{взл}} = 62,510 \text{ м/с}; \quad \theta_{\text{взл}} = 0^\circ;$$

$$x_{\text{взл}} = 212,125 \text{ м}; \quad y_{\text{взл}} = 56,221 \text{ м}.$$

Результаты моделирования взлета БЛА при $\theta_{\text{н}} = 35^\circ$ с работающим МД представлены в Табл. 3.5.

Из этой таблицы следует, что

$$t_{\text{взл}} = 4,595 \text{ с}; \quad V_{\text{взл}} = 60,392 \text{ м/с}; \quad \theta_{\text{взл}} = 0^\circ;$$

$$x_{\text{взл}} = 248,012 \text{ м}; \quad y_{\text{взл}} = 84,619 \text{ м}.$$

Таблица 3.4

№ этапа	t , с.	V , м/с	θ , град.	x , м	y , м	L , м
---------	----------	-----------	------------------	---------	---------	---------

1.	0	0	28	0	1,5	0
	0,009	4,076	28	0,016	1,508	0,018
	0,017	8,152	28	0,063	1,533	0,071
	0,026	12,227	28	0,141	1,575	0,160
	0,035	16,303	28	0,251	1,634	0,285
	0,044	20,378	28	0,393	1,709	0,445
	0,052	24,454	28	0,565	1,801	0,640
	0,061	28,528	28	0,769	1,909	0,871
	0,070	32,603	28	1,005	2,034	1,138
	0,079	36,677	28	1,272	2,176	1,440
	0,087	40,751	28	1,570	2,335	1,778
	0,096	44,824	28	1,900	2,510	2,151
	0,105	48,896	28	2,261	2,702	2,560
	0,113	52,968	28	2,653	2,911	3,005
	0,122	57,039	28	3,077	3,136	3,485
0,131	61,110	28	3,532	3,378	4	
2.	0,131	61,110	28	3,532	3,378	
	0,371	60,700	26,306	16,529	10,046	
	0,611	60,356	24,570	29,639	16,282	
	0,851	60,079	22,793	42,866	22,084	
	1,090	59,872	20,980	56,214	27,447	
	1,330	59,736	19,134	69,687	32,367	
	1,570	59,673	17,261	83,291	36,840	
	1,810	59,684	15,364	97,028	40,861	
	2,050	59,770	13,449	110,903	44,425	
	2,290	59,933	11,522	124,918	47,529	
	2,530	60,171	9,587	139,078	50,167	
	2,770	60,487	7,651	153,387	52,335	
	3,009	60,879	5,719	167,840	54,029	
	3,249	61,348	3,796	182,447	55,244	
	3,489	61,982	1,888	197,208	55,976	
3,729	62,510	0	212,125	56,221		

Таблица 3.5

№ этапа	t , с.	V , м/с	θ , град.	x , м	y , м	L , м
---------	----------	-----------	------------------	---------	---------	---------

1.	0	0	35	0	1,5	0
	0,009	4,086	35	0,015	1,510	0,018
	0,017	8,171	35	0,058	1,541	0,071
	0,026	12,257	35	0,131	1,592	0,160
	0,035	16,343	35	0,233	1,663	0,285
	0,044	20,428	35	0,364	1,755	0,445
	0,052	24,513	35	0,524	1,867	0,640
	0,061	28,598	35	0,714	2,000	0,871
	0,070	32,682	35	0,932	2,153	1,138
	0,078	36,766	35	1,180	2,326	1,440
	0,087	40,849	35	1,456	2,520	1,778
	0,096	44,932	35	1,762	2,734	2,151
	0,104	49,015	35	2,097	2,968	2,560
	0,113	53,097	35	2,461	3,223	3,005
	0,122	57,177	35	3,854	3,499	3,485
0,131	61,258	35	3,277	3,794	4	
2.	0,131	61,258	35	3,277	3,794	
	0,428	60,448	3,064	18,282	13,931	
	0,726	59,729	31,044	33,436	23,423	
	1,023	59,105	28,942	48,747	32,264	
	1,321	58,581	26,762	64,228	40,447	
	1,619	58,161	24,510	79,886	47,463	
	1,916	57,849	22,192	95,732	54,806	
	2,214	57,650	19,817	111,773	60,967	
	2,512	57,567	17,394	128,019	66,437	
	2,809	57,604	14,932	144,476	71,208	
	3,107	57,761	12,442	161,152	75,269	
	3,404	58,041	9,937	178,054	78,613	
	3,702	58,445	7,428	195,186	81,228	
	4,000	58,972	4,927	212,553	83,107	
	4,297	59,622	2,446	230,161	84,241	
4,595	60,392	0	248,012	84,619		

Траектории взлета БЛА в стартовой СК при $\theta_n = 28^\circ$ и $\theta_n = 35^\circ$, построенные по данным Табл. 3.3 и Табл. 3.4, приведены на Рис. 3.5.

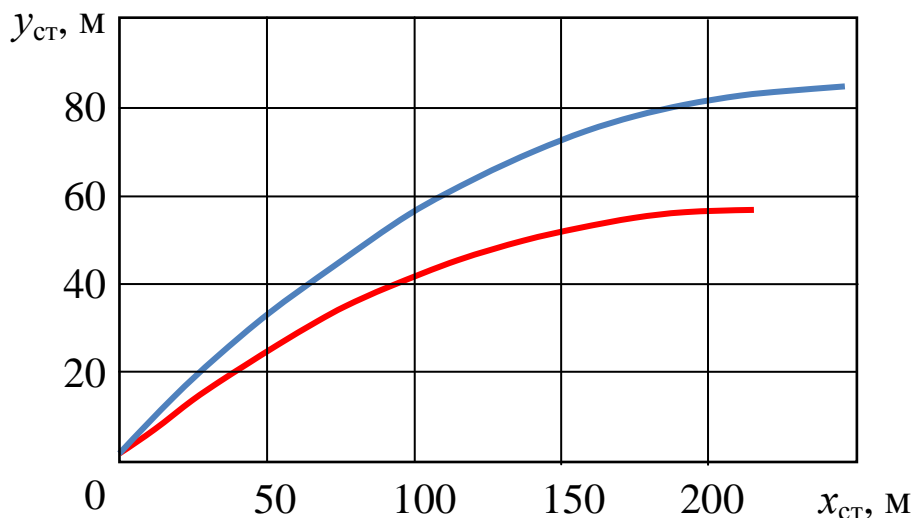


Рис. 3.5

Вычислительный эксперимент для взлета БЛА с неработающим МД при $\theta_n = 35^\circ$ дал следующие результаты:

$$t_{взл} = 4,576 \text{ с}; \quad V_{взл} = 60,193 \text{ м/с}; \quad \theta_{взл} = 0^\circ;$$

$$x_{взл} = 246,117 \text{ м}; \quad y_{взл} = 83,998 \text{ м}.$$

По результатам проведенного моделирования можно сделать вывод о незначительном отличии величин взлетных характеристик БЛА при его старте с работающим и неработающим маршевым двигателем.

Как и следовало ожидать, их отличия при различных значениях угла старта БЛА являются достаточно существенными.

3.2. Аэродромный взлет БЛА СС

В настоящее время взлет БЛА с использованием взлетно-посадочных устройств в виде шасси получает все большее распространение в практике применения БЛА самолетных схем. Особенно это касается БЛА тяжелого класса, для которых такой вид взлета является единственно возможным.

Следует отметить, что аэродромный взлет БЛА практически не отражен в существующей литературе, кроме работы [9], в которой рассмотрены общие вопросы этого вида взлета БЛА. основополагающей работой, посвященной динамике взлета пилотируемых самолетов, является монография [26]. Расчет взлетных характеристик таких ЛА подробно изложен в существующих работах [14, 23, 31 и др.]. Однако рассмотрение аэродромного взлета БЛА требует пересмотра некоторых положений этих работ.

В частности, для пилотируемых самолетов этап взлета заканчивается, когда в некоторый момент времени $t_{\text{взл}}$ их скорость и высота достигнут заданных безопасных значений $V_{\text{без}}$ и $h_{\text{без}}$ [26].

Для БЛА эти требования можно заменить условиями:

$$V(t_{\text{взл}}) \geq V_{\text{min}}; \quad y(t_{\text{взл}}) \geq y_{\text{min}}, \quad (3.2.1)$$

где V_{min} , y_{min} – минимальные эксплуатационные значения скорости и высоты полета рассматриваемого образца БЛА.

На наш взгляд применение БЛА, оснащенных взлетно-посадочными устройствами в виде шасси, будет наиболее эффективным при использовании временных аэродромов с грунтовыми взлетно-посадочными полосами (ВПП). Это позволит обеспечить требуемое рассредоточение беспилотных подразделений и оперативность группового применения входящих в их состав БЛА [22, 29].

Отметим, что особенности взлета ЛА с грунтовых аэродромов достаточно подробно рассмотрены в работах [26, 31].

При организации такого взлета возникает задача выбора длины ВПП полевых аэродромов для эксплуатации средних и тяжелых БЛА при различных состояниях грунта и атмосферных условиях. Эту задачу, а также задачу определения значе-

ний $t_{\text{взл}}$, $V_{\text{взл}}$, $x_{\text{взл}}$, $y_{\text{взл}}$ взлетных характеристик БЛА предлагается решать путем математического моделирования процесса их аэродромного взлета.

Важной перспективной задачей эксплуатации БЛА, которую будем исследовать с помощью модели этого процесса, является сокращение длины разбега БЛА и соответственно времени взлета, определяемого условиями (3.2.1).

В данном разделе будут рассмотрены следующие способы аэродромного взлета БЛА:

1. Традиционный способ с использованием маршевого двигателя БЛА.
2. Перспективный способ с применением стартового ускорителя.

Рассмотрим модель **первого способа взлета БЛА**, который включает в себя следующие этапы:

Этап 1. Разбег БЛА по ВПП.

Этап 2. Отрыв от ВПП и набор высоты до выполнения условий (3.2.1).

При построении математической модели Этапа 1 будем использовать схему, представленную на Рис. 3.6.

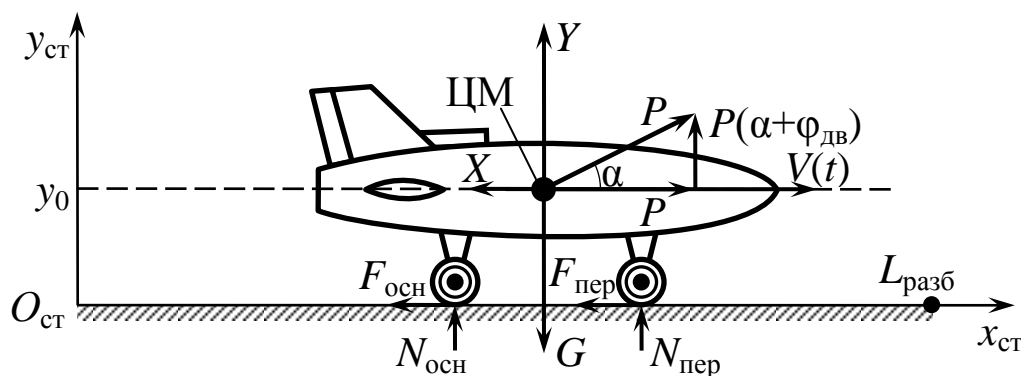


Рис. 3.6

На этом рисунке приведены следующие обозначения: $G = mg$ – сила тяжести БЛА; $N_{\text{пер}}$, $N_{\text{осн}}$ – силы реакций [24] передней и основной стоек шасси; $F_{\text{пер}}$, $F_{\text{осн}}$ – силы трения каче-

ния [24] колес этих стоек о поверхность ВПП; X – сила лобового сопротивления БЛА; Y – подъемная сила БЛА; P – сила тяги маршевого двигателя БЛА; α – угол атаки БЛА; $\varphi_{\text{дв}}$ – угол установки двигателя в корпусе БЛА; $V = V(t)$ – скорость движения БЛА в момент времени t , $L_{\text{разб}}$ – длина разбега БЛА.

Аэродинамические силы, действующие на БЛА при его разбеге по ВПП, вычисляются по формулам (2.1.23):

Учитывая силы, представленные на Рис. 3.6 и тот факт, что при разбеге по ВПП считается, что угол $\theta = 0$, динамические уравнения движения БЛА вида (2.1.15) и (2.1.16) конкретизируются как:

$$\dot{V} = \frac{P - X - (F_{\text{пер}} + F_{\text{осн}})}{m}; \quad (3.2.2)$$

$$0 = P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y + (N_{\text{пер}} + N_{\text{осн}}) - mg. \quad (3.2.3)$$

Известно [24], что силы F и N связаны соотношением:

$$F = f_k N, \quad (3.2.4)$$

где f_k – коэффициент трения качения.

Будем считать, что коэффициенты трения качения колес передней и основной стоек шасси БЛА примерно одинаковы, то есть $f_{\text{пер}} \cong f_{\text{осн}} = f_k$ [9, 26].

Тогда с использованием принципа сложения сил [24] и выражения (3.2.4) получим соотношение вида:

$$F_{\text{пер}} + F_{\text{осн}} = f(N_{\text{пер}} + N_{\text{осн}}). \quad (3.2.5)$$

Из Рис. 3.6 и выражения (3.2.3) следует, что:

$$P(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) + Y + (N_{\text{пер}} + N_{\text{осн}}) = mg.$$

Из этого уравнения имеем:

$$N_{\text{пер}} + N_{\text{осн}} = mg - Y - (\alpha + \varphi_{\text{дв}})P.$$

Тогда выражение (3.2.5) примет вид:

$$F_{\text{пер}} + F_{\text{осн}} = f_k (mg - Y - (\alpha + \varphi_{\text{дв}})P).$$

Подставим правую часть этой формулы в уравнение (3.2.2):

$$\dot{V} = \frac{P - X - f_k(mg - Y - (\alpha + \varphi_{дв})P)}{m}.$$

Приводя подобные члены, получим общий вид дифференциального уравнения, описывающего изменение скорости БЛА при его движении по ВПП:

$$\dot{V} = \frac{P(1 + f_k(\alpha + \varphi_{дв})) - (X - fY)}{m}. \quad (3.2.6)$$

В работах [26, 31] приводятся таблицы значений коэффициентов f_k трения качения колес шасси ЛА для различных видов и состояний ВПП.

Объединим приведенные в них данные в Табл. 3.6.

Таблица 3.6.

Вид и состояние ВПП	Значения коэффициента трения качения, f_k
<u>Стационарные аэродромы</u>	
Бетон сухой	0,02-0,04
Бетон мокрый	0,04-0,06
Металлические плиты	0,03-0,05
<u>Временные (грунтовые) аэродромы</u>	
Твердый грунт	0,05-0,06
Мягкий песчаный грунт	0,12-0,3
Вязкий сырой грунт	0,25-0,35
Низкое сухое травяное покрытие	0,06-0,65
Низкое мокрое травяное покрытие	0,10-0,15
Высокое травяное покрытие	0,14-0,15
Плотное (укатанное) снеговое покрытие	0,045-0,065
Рыхлое снеговое покрытие	0,06-0,13
Покрытие со слоем талого снега на твердом основании	0,05-0,11

Заметим, что в настоящее время существуют специальные средства и методики оперативного измерения состояния

ВПП, применяемых для взлета/посадки конкретного типа самолета.

Процесс разбега БЛА по ВПП осуществляется при следующих значениях характеристик взлета:

$$m = m_{\text{взл}}; \quad P = P_{\text{max}}; \quad \alpha = \alpha_p; \quad V = V_1(t); \quad \theta = \theta_1(t), \quad (3.2.7)$$

где $m_{\text{взл}}$ – взлетная масса БЛА; α_p – угол атаки БЛА при его разбеге; $V_1(t)$ и $\theta_1(t)$ – соответственно скорость и угол наклона траектории БЛА в момент времени t при выполнении Этапа 1 его взлета.

Модель движения БЛА при разбеге по ВПП можно записать как [9]:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & \frac{1}{m_{\text{взл}}} \left[P_{\text{max}} (1 + f_k (\alpha_p + \varphi_{\text{дв}})) - \right. \\ & \left. - 0,5 (c_x (\alpha_p, M_1) + f_k c_y (\alpha_p, M_1)) \rho_0 V_1^2 S \right] - \\ & - g (\sin \theta_1 + f \cos \theta_1); \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

$$\dot{\theta}_1 = 0; \quad \dot{x}_1 = V_1 \cos \theta_1; \quad \dot{y}_1 = V_1 \sin \theta_1.$$

где $M_1 = V_1/a$ – число Маха при разбеге БЛА.

Начальные условия для этой системы уравнений имеют вид:

$$V_1(t_0) = 0; \quad \theta_1(t_0) = 0; \quad x_1(t_0) = x_0; \quad y_1(t_0) = y_0. \quad (3.2.9)$$

Разбег БЛА осуществляется на интервале времени $[t_0, t_{\text{отр}}]$, где момент времени $t_{\text{отр}}$ его отрыва от ВПП определяется условием равенства нулю суммы сил $N_{\text{пер}}$ и $N_{\text{осн}}$.

С учетом приведенных выше выражений это условие конкретизируется следующим равенством:

$$R(t) = mg - 0,5 c_y (\alpha_p, M_1) \rho_0 V_1^2 (t) S - (\alpha_p + \varphi_{\text{дв}}) P_{\text{max}} = 0, \quad (3.2.10)$$

где $R(t) = N_{\text{пер}}(t) + N_{\text{осн}}(t)$ – сила реакции опор шасси БЛА в момент времени t .

Процесс численного интегрирования системы уравнений (3.2.8) с начальными условиями (3.2.9) осуществляется до момента времени $t_{\text{отр}}$, при котором за счет роста значения скорости V_1 выполняется условие (3.2.10).

В этом случае координата отрыва БЛА, скорость отрыва и длина его разбега по ВПП определяются как:

$$\begin{aligned} x_{\text{отр}} &= x_1(t_{\text{отр}}); & V_{\text{отр}} &= V_1(t_{\text{отр}}); \\ L_{\text{разб}} &= x_{\text{отр}} - x_0. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

В качестве угла атаки α_p обычно используется стояночный угол атаки $\alpha_{\text{ст}}$ БЛА.

При проведении расчетов для конкретных значений $m_{\text{взл}}$ и различных состояний ВПП, описываемых коэффициентом f_k , необходимо проверять условие «невывытывания» БЛА за пределы ВПП, которое имеет вид:

$$x_1(t_{\text{отр}}) < L_{\text{ВПП}}, \quad (3.2.12)$$

где $L_{\text{ВПП}}$ – длина ВПП используемого аэродрома.

Если это условие не выполняется, то можно уменьшить значение координаты x_0 . При этом значении вновь проводится решение задачи (3.2.8)-(3.2.10) и повторная проверка условия (3.2.12). Если не удастся добиться его выполнения, то принимается решение об отмене полета БЛА по состоянию ВПП.

Воздушный этап 2 взлета БЛА моделируется при следующих значениях его характеристик:

$$m = m_{\text{взл}}; \quad P = P_{\text{max}}; \quad \alpha = \alpha_{\text{в}}; \quad V = V_2(t); \quad \theta = \theta_2(t). \quad (3.2.13)$$

Движение БЛА на интервале времени $[t_{\text{отр}}, t_{\text{взл}}]$ описывается уравнениями:

$$\dot{V}_2 = \frac{P_{\max} - 0,5c_x(\alpha, M_2)\rho V_2^2 S}{m_{\text{взл}}} - g \sin \theta_2; \quad (3.2.14)$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{(\alpha + \varphi_{\text{дв}})P + 0,5c_y(\alpha, M_2)\rho V_2^2 S}{m_{\text{взл}} V_2} - \frac{g}{V_2} \cos \theta_2,$$

где $M_2 = V_2/a$ – число Маха на воздушном этапе взлета БЛА.

Начальные условия для этой системы уравнений с учетом выражений (3.2.11) и (3.2.9) имеют вид:

$$\begin{aligned} V_2(t_{\text{отр}}) &= V_{\text{отр}}; & \theta_2(t_{\text{отр}}) &= 0; \\ x_2(t_{\text{отр}}) &= x_{\text{отр}}; & y_2(t_{\text{отр}}) &= y_0. \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

Используемые в уравнениях (3.2.14) параметры a и ρ определяются выражениями, приведенными в Разд. 1.3.

Численное решение задачи (3.2.14), (3.2.15) проводится до момента времени $t = t_{\text{взл}}$, при котором выполняются условия завершения взлета БЛА вида (3.2.1).

При взлете БЛА с временных аэродромов с песчаными мягкими и сырыми грунтами значения угла α_p увеличивается по сравнению с взлетом БЛА со стационарных аэродромов.

Пример 3.3.

Будем считать, что БЛА с характеристиками, представленными в Табл. 2.1 и Примере 3.1, модернизирован путем установки трехстоечного шасси (см. Рис. 3.6).

Проведем исследование взлетных характеристик при различных состояниях ВПП, нормальном давлении (760 мм.рт.ст.) и температурах окружающего воздуха, равных -40°C , $+15^\circ\text{C}$ и $+50^\circ\text{C}$.

В Табл. 3.7 приведены результаты интегрирования системы уравнений (3.2.8) разбега БЛА по сухой бетонной ВПП при $f_k = 0,02$, $\alpha_p = 5^\circ$ и $\tau_0 = -40^\circ\text{C}$.

Из этой таблицы имеем следующие значения искомым характеристик разбега БЛА:

$$t_{\text{разб}} = 28,824 \text{ с}; \quad V_{\text{отр}} = 83,547 \text{ м/с}; \quad L_{\text{разб}} = 1285 \text{ м}.$$

Результаты вычислительных экспериментов при различных значениях температуры воздуха для $\alpha_p = 5^\circ$ и сухой бетонной ВПП ($f_k = 0,02$) представлены в Табл. 3.8.

Таблица 3.7

$t, \text{ с}$	$V, \text{ м/с}$	$\theta, \text{ град}$	$x, \text{ м}$	$y, \text{ м}$	$R, \text{ Н}$
0	0	0	10	1,5	3253
1,922	6,236	0	15,993	1,5	3236
3,843	12,455	0	33,956	1,5	3185
5,765	18,638	0	63,837	1,5	3101
7,686	24,766	0	105,550	1,5	2982
9,608	30,821	0	158,971	1,5	2831
11,530	36,783	0	223,941	1,5	2649
13,451	42,634	0	300,263	1,5	2437
15,373	48,355	0	387,706	1,5	2198
17,294	53,930	0	486,006	1,5	1934
19,216	59,344	0	594,866	1,5	1648
21,137	64,581	0	713,961	1,5	1343
23,059	69,629	0	842,940	1,5	1022
24,981	74,478	0	981,430	1,5	689,043
26,902	79,120	0	1129	1,5	347,279
28,824	83,547	0	1285	1,5	0

Таблица 3.8.

$\tau^\circ\text{C}$	$t_{\text{разб}}, \text{ с}$	$V_{\text{отр}}, \text{ м/с}$	$L_{\text{разб}}, \text{ м}$
-40°	28,824	83,547	1285
+15°	32,046	92,885	1587
+50°	33,937	98,367	1778

Процессы разбега БЛА по мягкой песчаной ВПП ($f_k = 0,12$) при $\alpha_p = 5^\circ$ имеют характеристики, приведенные в Табл. 3.9.

Таблица 3.9.

$\tau_0, ^\circ\text{C}$	$t_{\text{разб}}, \text{с}$	$V_{\text{отр}}, \text{м/с}$	$L_{\text{разб}}, \text{м}$
-40°	66,590	83,546	3253
$+15^\circ$	74,033	92,885	4476
$+50^\circ$	78,402	98,367	5019

Для учета влияния угла атаки α_p на рассматриваемые характеристики приведем их значения при $\alpha_p = 10^\circ$ и $\tau_0 = -40^\circ\text{C}$ для различных рассмотренных выше состояний ВПП:

а) сухой бетон:

$$t_{\text{разб}} = 20,698 \text{ с}; \quad V_{\text{отр}} = 59,865 \text{ м/с}; \quad L_{\text{разб}} = 665,889 \text{ м.}$$

б) мягкий песчаный грунт:

$$t_{\text{разб}} = 48,248 \text{ с}; \quad V_{\text{отр}} = 59,865 \text{ м/с}; \quad L_{\text{разб}} = 1879 \text{ м.}$$

Из приведенных результатов следует существенная зависимость характеристик разбега БЛА от угла атаки α_p , температуры воздуха τ_0 и состояния ВПП, определяемого коэффициентом f_k .

При моделировании воздушного участка взлета БЛА (этап 2) конкретизируем условия (3.2.1) в виде следующих неравенств:

$$V(t_{\text{взл}}) \geq 80,55 \text{ м/с}; \quad y(t_{\text{взл}}) \geq 300 \text{ м.}$$

Результаты интегрирования системы уравнений (3.2.14), при $\alpha_v = 5^\circ$ и $\tau_0 = -40^\circ\text{C}$ с начальными условиями (3.2.15) из последней строки Табл. 3.7 представлены в Табл. 3.10.

Из этой таблицы следует, что взлет БЛА с сухой бетонной ВПП завершается при значениях:

$$t_{\text{взл}} = 44,640 \text{ с}; \quad V_{\text{взл}} = 90,661 \text{ м/с}; \quad \theta_{\text{взл}} = 27,884^\circ;$$

$$x_{\text{взл}} = 2725 \text{ м}; \quad y_{\text{взл}} = 300 \text{ м.}$$

При взлете БЛА при $\tau_0 = -40^\circ\text{C}$ с мягкой песчаной ВПП (см. Табл. 3.9) моделирование дало следующие результаты:

$$t_{\text{взл}} = 82,405 \text{ с}; \quad V_{\text{взл}} = 90,661 \text{ м/с}; \quad \theta_{\text{взл}} = 27,884^\circ;$$

$$x_{\text{взл}} = 5063 \text{ м}; \quad y_{\text{взл}} = 300 \text{ м.}$$

Таблица 3.10

t, c	$V, m/c$	$\theta, \text{град}$	x, m	y, m
28,824	83,547	0	1285	1,5
29,878	86,284	0,228	1375	1,620
30,933	88,876	0,890	1467	2,468
31,987	91,251	1,948	1562	4,772
33,041	93,344	3,359	1659	9,236
34,096	95,104	5,074	1759	16,506
35,150	96,489	7,043	1859	27,141
36,205	97,470	9,216	1960	41,583
37,259	98,028	11,541	2062	60,139
38,313	98,155	13,966	2163	82,967
39,368	97,855	16,440	2262	110,069
40,422	97,141	18,916	2360	141,295
41,477	96,033	21,344	2456	176,359
42,531	94,559	23,678	2549	214,848
43,585	92,756	25,873	2639	256,255
44,640	90,661	27,884	2725	300

Траектория взлета БЛА в стартовой СК, построенная по данным Табл. 3.7 и Табл. 3.10, приведена на Рис. 3.7.

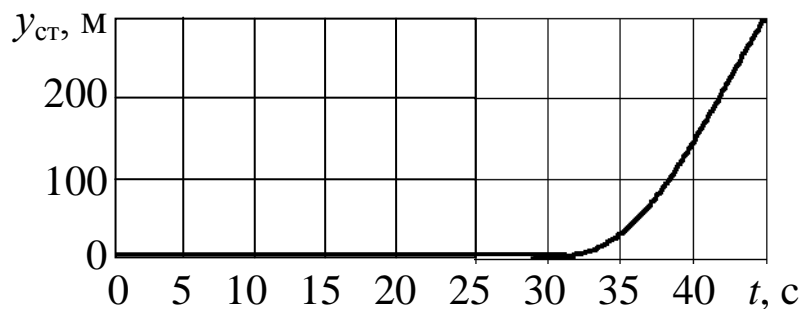


Рис. 3.7

Рассмотрим такой перспективный способ как **взлет БЛА со стартовым ускорителем.**

Для средних и тяжелых БЛА длина их разбега по ВПП за счет значительного взлетного веса может представлять достаточно большую величину порядка тысячи метров.

Кроме этого, длина разбега БЛА существенно зависит от состояния ВПП. Неудовлетворительное состояние полосы

(снег, наледь, мягкий грунт и т.п.) также значительно увеличивает длину разбега БЛА.

Для резкого сокращения времени взлета, в том числе времени и длины его разбега по ВПП, можно использовать положительный опыт 60-70-х годов прошлого века, когда истребители фронтовой авиации для взлета с грунтовых аэродромов оснащались стартовыми ускорителями (на базе РДТТ) [44]. Такие стартовые двигатели обеспечивали значительный прирост силы тяги и сбрасывались в воздухе после выгорания их зарядов.

Процесс взлета БЛА со стартовым двигателем (СД) включает в себя следующие этапы:

Этап 1. Движение БЛА по ВПП под действием сил тяги СД и маршевого двигателя (МД) БЛА.

Этап 2. Движение БЛА в воздухе после отрыва от ВПП при работающих СД и МД.

Этап 3. Полет БЛА после сброса СД под действием силы тяги МД.

При моделировании движения БЛА на этих этапах, как и в Разд. 3.1, будем считать его материальной точкой переменной массы $m(t)$ и описывать движение ЦМ БЛА в вертикальной плоскости взлета в каждый момент времени t с помощью значений скорости $V(t)$, угла наклона траектории $\theta(t)$ и координат $x(t)$, $y(t)$ в заданной стартовой системе координат. В приведенных ниже моделях этим характеристикам присвоены индексы с номером рассматриваемого этапа взлета БЛА.

Другой особенностью предлагаемых моделей является использование в них максимального значения силы тяги МД и заданного ненулевого значения угла атаки БЛА.

Модель движения БЛА по ВПП аэродрома. Основную роль на первом этапе взлета БЛА играет подвешенный под

фюзеляжем СД, который имеет тягу $P_{сд}$ и сопло, повернутое относительно строительной оси БЛА на угол $\varphi_{сд}$. Этот угол и размещение СД выбираются таким образом, чтобы вектор силы тяги $P_{сд}$ проходил через ЦМ БЛА.

На Рис. 3.8 показаны $\alpha_p = 0$ составляющие силы $P_{сд}$ при, которые учитываются на этапах 1 и 2 взлета БЛА.

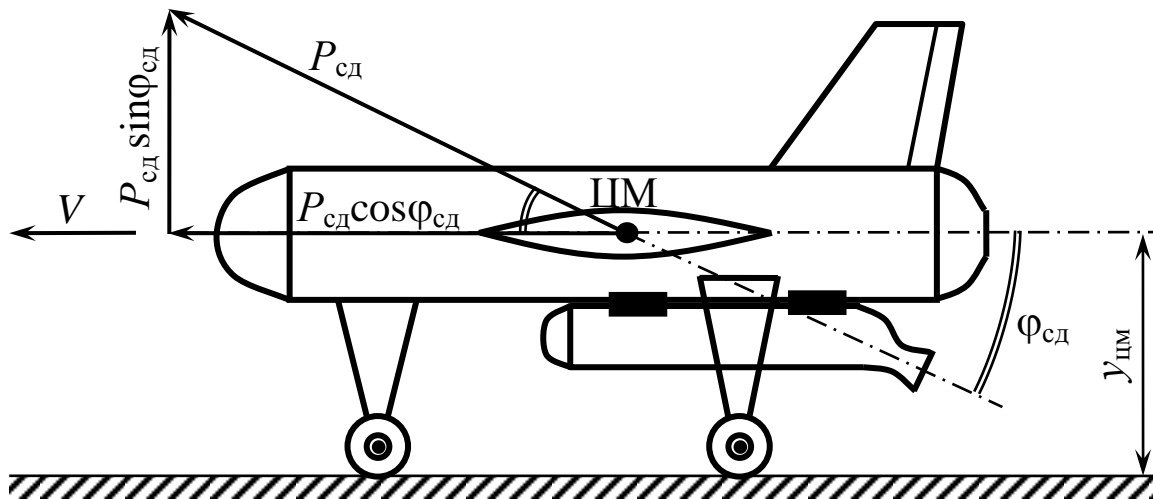


Рис. 3.8

Как и в Разд. 3.1 считается, что масса объекта «БЛА+СД» будет изменяться во времени по следующему закону:

$$m(t) = m + m_{кор} + m_{зар} - \mu t; \quad t \in [0, T],$$

где $m_{взл}(t)$ – взлетная масса БЛА (кг); $m_{кор}$ – масса корпуса СД (кг); $m_{зар}$ – масса заряда СД (кг); μ – массовая скорость горения заряда (кг/с); T – время работы СД (с).

Движение БЛА на интервале времени $[0, t_1]$ будем описывать системой дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{P_{мд} + P_{сд} \cos \varphi_{сд} - F_{тр} - X(\alpha, M_1, y_1)}{m(t)} - g \sin \theta_1; \\ \dot{\theta}_1 &= 0; \\ \dot{x}_1 &= V_1 \cos \theta_1; \\ \dot{y}_1 &= V_1 \sin \theta_1, \quad t \in [0, t_1]. \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

Здесь $P_{\text{мд}}$ – максимальное значение силы тяги маршевого двигателя БЛА (Н); $x_1 = x_1(t)$, $y_1 = y_1(t)$ – координаты ЦМ БЛА в момент времени t (м); $F_{\text{тр}} = F_{\text{тр}}(t)$ – суммарное значение силы трения качения колес шасси БЛА в момент времени t (Н); $X(\alpha, M_1, y_1)$ – сила лобового сопротивления БЛА при угле атаки α_p , движущегося со скоростью V_1 на высоте $y_1 = y_{\text{цм}}$.

Сила трения качения $F_{\text{тр}}$ при условии, что все колеса шасси БЛА изготовлены из одного материала, вычисляется как:

$$F_{\text{тр}} = f_k N, \quad (3.2.17)$$

где f_k – коэффициент трения качения колес шасси по ВПП.

Из Разд. 3.1 следует, что сила $N(t) = N_{\text{пер}}(t) + N_{\text{осн}}(t)$ реакции шасси БЛА будет равна:

$$\begin{aligned} N(t) = P_{\text{мд}} \varphi_{\text{мд}} + P_{\text{сд}} \sin \varphi_{\text{сд}} + \\ + Y(\alpha, M_1, y_1) - G(t) \cos \theta_1 = R(t). \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

Вычисляя силу тяжести как:

$$G(t) = m(t)g$$

и подставляя выражение (3.2.18) в формулу (3.2.17), получим:

$$\begin{aligned} F_{\text{тр}}(t) = f_k (P_{\text{мд}} \varphi_{\text{мд}} + P_{\text{сд}} \sin \varphi_{\text{сд}} + \\ + Y(\alpha, M_1, y_1) - m(t)g \cos \theta_1). \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

Входящие в уравнения (3.2.16) и (3.2.19) силы $X(\alpha, M_1, y_1)$ и $Y(\alpha, M_1, y_1)$ представляются выражениями вида (2.1.23).

Зависимости коэффициентов c_x и c_y от своих аргументов представляются выражениями (2.1.34) и (2.1.35).

Для получения зависимостей плотности воздуха ρ и скорости звука a от температуры и высоты полета БЛА предлагается использовать формулы, приведенные в Разд. 1.3.

Система уравнений (3.2.16) интегрируется на интервале времени $[0, t_1]$ при начальных условиях:

$$V_1(0) = 0; \quad \theta_1(0) = 0; \quad x_1(0) = x_0; \quad y_1(0) = y_{\text{цм}}, \quad (3.2.20)$$

где x_0 – координата размещения БЛА на ВПП; $y_{\text{цм}}$ – высота ЦМ БЛА относительно ВПП (см. Рис. 3.8).

Момент времени t_1 завершения этапа 1 взлета БЛА определяется с учетом выражения (3.2.18) из условия:

$$R(t_1) = 0. \quad (3.2.21)$$

При достижении в процессе решения задачи (3.2.16), (3.2.20) условия (3.2.21) фиксируются полученные значения $V_1(t_1)$, $x_1(t_1)$, $y_1(t_1)$, которые будут использованы при моделировании этапа 2 взлета БЛА. При этом считается, что $t_{\text{разб}} = t_1$; $V_{\text{отр}} = V_1(t_1)$; $L_{\text{разб}} = x_1(t_1)$.

Модель полета БЛА после отрыва от ВПП. На этапе 2 взлета БЛА реализуется его полет на интервале времени $[t_1, T]$ под действием сил тяги МД и СД. Математическая модель движения БЛА на этом этапе имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \frac{P_{\text{мд}} + P_{\text{сд}} \cos \varphi_{\text{сд}} - X(\alpha, V_2, y_2)}{m(t)} - g \sin \theta_2; \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{P_{\text{мд}} \varphi_{\text{мд}} + P_{\text{сд}} \sin \varphi_{\text{сд}} + Y(\alpha, V_2, y_2)}{m(t)V_2} - \frac{g}{V_2} \cos \theta_2; \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

$$\dot{x}_2 = V_2 \cos \theta_2;$$

$$\dot{y}_2 = V_2 \sin \theta_2, \quad t \in [t_1, T].$$

Дифференциальные уравнения (3.2.22) интегрируются на фиксированном интервале времени $[t_1, T]$ при следующих начальных условиях:

$$V_2(t_1) = V_1(t_1); \quad \theta_2(t_1) = 0; \quad x_2(t_1) = x_1(t_1); \quad y_2(t_1) = y_1(t_1), \quad (3.2.23)$$

обеспечивающих связь этапов 1 и 2 взлета БЛА.

Полученные при этом значения скорости $V_2(T)$, угла наклона траектории $\theta_2(T)$ и координат $x_2(T)$, $y_2(T)$ ЦМ БЛА в момент времени T окончания работы СД используются в качестве начальных условий при моделировании заключительного этапа 3 взлета БЛА.

Модель полета БЛА после сброса стартового двигателя.
 Данный этап взлета БЛА осуществляется на интервале времени $[T, t_3]$ до выполнения условий вида:

$$V_3(t_3) \geq V_{\min}; \quad y_3(t_3) \geq h_{\min}. \quad (3.2.24)$$

Модель движения БЛА на этапе 3 имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= \frac{P_{\text{мд}} - X(\alpha, M_3, y_3)}{m} - g \sin \theta_3; \\ \dot{\theta}_3 &= \frac{P_{\text{мд}} \varphi_{\text{мд}} + Y(\alpha, M_3, y_3)}{mV_3} - \frac{g}{V_3} \cos \theta_3; \\ \dot{x}_3 &= V_3 \cos \theta_3; \\ \dot{y}_3 &= V_3 \sin \theta_3, \quad t \in [T, t_3]. \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

Начальные условия для системы уравнений (3.2.25) записываются как:

$$\begin{aligned} V_3(T) &= V_2(T); \quad \theta_3(T) = \theta_2(T); \\ x_3(T) &= x_2(T); \quad y_3(t_1) = y_2(T). \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

Момент времени t_3 завершения этого этапа взлета БЛА определяется в процессе решения задачи (3.2.25), (3.2.26) текущим значением переменной t , при котором выполняются условия (3.2.24).

Таким образом, взлетные характеристики БЛА при использовании стартового ускорителя определяются как:

$$\begin{aligned} t_{\text{взл}} &= t_3; \quad V_{\text{взл}} = V_3(t_3); \quad \theta_{\text{взл}} = \theta_3(t_3); \\ x_{\text{взл}} &= x_3(t_3); \quad y_{\text{взл}} = y_3(t_3). \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

Пример 3.4.

При моделировании взлета БЛА с ускорителем будем использовать все исходные данные из Примера 3.1 за исключением значения $P_{\text{сд}}$, которое будет равно 6000 Н.

Для сравнения приведенных выше способов аэродромного взлета БЛА проведем моделирование рассматриваемого про-

цесса, аналогичное Примеру 3.3. При этом условия (3.2.1) конкретизируем следующими неравенствами:

$$V(t_{\text{взл}}) \geq 55 \text{ м/с}; \quad y(t_{\text{взл}}) \geq 300 \text{ м.}$$

Будем считать, что на каждом этапе взлета БЛА используются следующие значения углов атаки:

$$\alpha_1 = 5^\circ; \quad \alpha_2 = 10^\circ; \quad \alpha_3 = 10^\circ.$$

В Табл. 3.11 представлены результаты интегрирования системы уравнений (3.2.16) с начальными условиями (3.2.20) разбега БЛА по сухой бетонной ВПП ($f_k = 0,02$) при температуре воздуха $\tau_0 = -40^\circ\text{C}$.

Таблица 3.11

$t, \text{ с}$	$V, \text{ м/с}$	$\theta, \text{ град}$	$x, \text{ м}$	$y, \text{ м}$	$R, \text{ Н}$
0	0	0	10	1,5	1335
0,192	3,256	0	10,312	1,5	1316
0,384	6,523	0	11,251	1,5	1288
0,576	9,801	0	12,817	1,5	1251
0,768	13,090	0	15,014	1,5	1204
0,960	16,390	0	17,843	1,5	1147
1,152	19,699	0	21,306	1,5	1080
1,344	23,018	0	25,406	1,5	1003
1,536	26,346	0	30,143	1,5	914,1
1,727	29,683	0	35,520	1,5	817,1
1,919	33,028	0	41,538	1,5	708,5
2,111	36,380	0	48,199	1,5	589,0
2,303	39,740	0	55,504	1,5	458,6
2,495	43,106	0	63,455	1,5	317,0
2,687	46,477	0	72,052	1,5	164,2
2,879	49,854	0	81,297	1,5	0

Из этой таблицы получаем следующие характеристики разбега БЛА:

$$t_{\text{разб}} = 2,879 \text{ с}; \quad V_{\text{отр}} = 49,854 \text{ м/с}; \quad L_{\text{разб}} = 81,297 \text{ м.}$$

Результаты проведенных вычислительных экспериментов для различных значений температуры окружающего воздуха приведены в Табл. 3.12.

Таблица 3.12

$\tau_0, ^\circ\text{C}$	$t_{\text{разб}}, \text{с}$	$V_{\text{отр}}, \text{м/с}$	$L_{\text{разб}}, \text{м}$
-40°	2,879	49,854	81,297
+15°	3,162	54,922	96,188
+50°	3,326	57,853	105,416

Характеристики разбега БЛА по мягкой песчаной ВПП ($f_k = 0,12$) представлены в Табл. 3.13.

Таблица 3.13

$\tau_0, ^\circ\text{C}$	$t_{\text{разб}}, \text{с}$	$V_{\text{отр}}, \text{м/с}$	$L_{\text{разб}}, \text{м}$
-40°	3,190	49,356	88,354
+15°	3,498	54,317	104,422
+50°	3,675	57,182	114,357

Детальное моделирование при $\tau_0 = -40^\circ\text{C}$ и $f_k = 0,02$ воздушного участка взлета БЛА (этапы 2 и 3), выполненное путем решения задач Коши (3.2.22), (3.2.23) и (3.2.25), (3.2.26), приведены в Табл. 3.14.

Таблица 3.14

№ этапа	$t, \text{с}$	$V, \text{м/с}$	$\theta, \text{град}$	$x, \text{м}$	$y, \text{м}$
2	2,879	49,854	0	81,297	1,5
	2,954	51,182	0,099	85,072	1,503
	3,029	52,507	0,223	88,946	1,514
	3,103	53,831	0,372	92,919	1,534
	3,178	55,152	0,546	96,991	1,567
	3,253	56,470	0,743	101,161	1,614
	3,327	57,786	0,964	105,430	1,677
	3,402	59,097	1,208	109,796	1,760
	3,477	60,405	1,475	114,260	1,864
	3,552	61,709	1,764	118,821	1,993
	3,626	63,008	2,076	123,478	2,149
	3,701	64,302	2,410	128,231	2,335
	3,776	65,591	2,765	133,080	2,554
	3,851	66,874	3,142	138,022	2,809
	3,925	68,152	3,540	143,059	3,103
4	69,423	3,959	148,188	3,439	

3	4	69,423	3,959	148,188	3,439
	4,853	70,687	5,963	207,716	8,584
	5,705	71,607	8,235	267,954	16,067
	6,558	72,163	10,704	328,443	26,143
	7,411	72,345	13,298	388,733	38,951
	8,264	72,155	15,950	448,369	54,509
	9,116	71,606	18,590	506,919	72,714
	9,969	70,720	21,153	564,005	93,353
	10,822	69,527	23,577	619,315	116,123
	11,675	68,063	25,801	672,624	140,647
	12,527	66,370	27,768	723,795	166,500
	13,380	64,494	29,422	772,783	193,231
	14,233	62,483	30,708	819,631	220,381
	15,086	60,391	31,574	864,458	247,504
	15,938	58,272	31,970	907,452	274,174
16,791	56,186	31,847	948,856	300	

Из таблицы следует, что:

$$t_{\text{взл}} = 16,791 \text{ с}; \quad V_{\text{взл}} = 56,188 \text{ м/с}; \quad \theta_{\text{взл}} = 31,874 \text{ град};$$

$$x_{\text{взл}} = 948,856 \text{ м}; \quad y_{\text{взл}} = 300 \text{ м}.$$

При моделировании воздушного участка взлета БЛА с мягкой песчаной ВПП при $\tau_0 = -40^\circ\text{C}$ получены следующие результаты:

$$t_{\text{взл}} = 19,357 \text{ с}; \quad V_{\text{взл}} = 56,652 \text{ м/с}; \quad \theta_{\text{взл}} = 29,401 \text{ град};$$

$$x_{\text{взл}} = 1098 \text{ м}; \quad y_{\text{взл}} = 300 \text{ м}.$$

Из приведенных результатов вычислительных экспериментов следует, что использование стартовых ускорителей при взлете БЛА среднего и тяжелого классов в десятки раз улучшает значения их взлетных характеристик.

3.3. Аэродромная посадка БЛА СС

Процессы посадки пилотируемых самолетов подробно описаны в работе [26]. Особенности и общий формальный подход к описанию посадки БЛА на стационарные и времен-

ные аэродромы (взлетные площадки) приведены в монографии [9].

В данном разделе будет рассмотрена динамика следующих способов аэродромной посадки БЛА:

1. Традиционный способ с пробегом БЛА по ВПП с остановкой за счет действия сил сопротивления и трения качения колес его шасси.

2. Перспективный способ с использованием при пробеге БЛА по ВПП тормозного парашюта.

Отметим, что формализация второго способа отсутствует в существующей литературе.

При посадке БЛА на ВПП рассматриваются два этапа этого процесса:

1. Снижение БЛА до момента касания его шасси ВПП,
2. Пробег по полосе до полной остановки БЛА.

Процесс аэродромной посадки БЛА будем рассматривать в вертикальной плоскости стартовой системы координат (СК), представленной на Рис. 3.9.

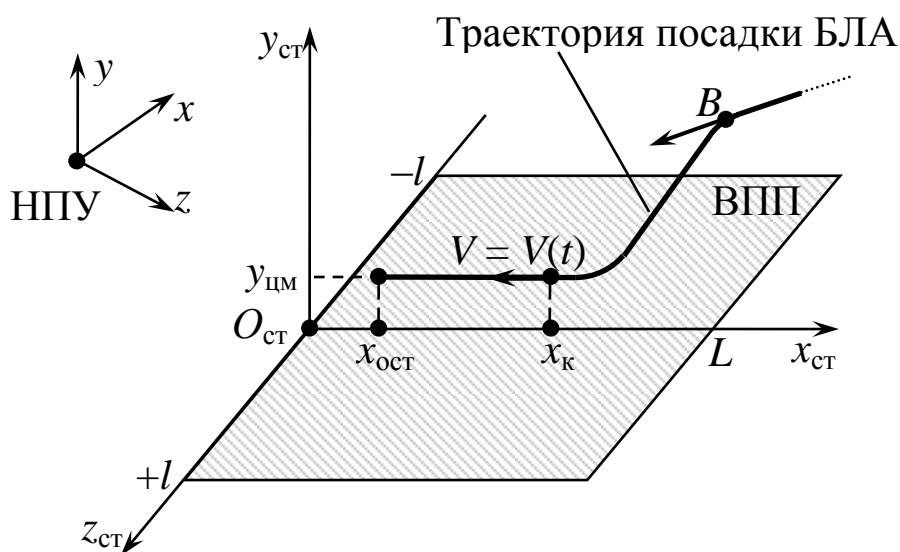


Рис. 3.9

Также как в Разд. 3.2 будем считать, что БЛА, рассматриваемый как материальная точка массы $m_{\text{пос}}$, равной его посадочной массе, оснащен шасси, включающем в себя переднее и два основных колеса.

При моделировании процесса посадки БЛА будем считать, что программированием его полета из зоны выполнения задания он выведен в заданный момент времени t_B в точку B (см. Рис. 3.9) со следующими значениями фазовых координат:

$$V_1 = V_B; \quad \theta_1(t_B) = \theta_B; \quad x_1(t_B) = x_B; \quad y_1(t_B) = y_B.$$

Здесь индексом «1» обозначены фазовые координаты воздушного этапа посадки БЛА.

Движение на этом этапе описывается уравнениями (3.2.14) с заменой $m_{\text{взл}}$ на $m_{\text{пос}}$ и индекса «2» на индекс «1».

Воздушный участок посадки БЛА завершается в момент времени t_k касания его шасси ВПП. Этот момент времени определяется при выполнении условия:

$$y_3(t_k) = y_{\text{цм}}. \quad (3.3.1)$$

При этом координата x и скорость БЛА в точке касания определяются как:

$$x_k = x_1(t_k); \quad V_k = V_1(t_k) \quad (3.3.2)$$

Программирование движения БЛА на этом этапе состоит в задании траектории захода на посадку и в выборе управлений $P = P(t)$, $\alpha = \alpha(t)$, $t \in [t_B, t_k]$, обеспечивающих минимальное значение скорости V_k в момент приземления БЛА. Эти задачи будут рассмотрены в Главах 4 и 5.

Моделирование пробега БЛА по ВПП проводится с учетом сил, указанных на Рис. 3.6 и с использованием уравнений (3.2.8) при замене параметра $m_{\text{взл}}$ на $m_{\text{пос}}$ и при нулевом значении тяги маршевого двигателя БЛА.

Используя индекс «2» для наземного этапа посадки БЛА, эти уравнения представляются как:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & - \frac{0,5(c_x(\alpha, M_2) - f_k c_y(\alpha, M_2)) \rho_0 V_2^2 S}{m_{\text{пос}}} - \\ & - g(\sin \theta_2 + f_k \cos \theta_2); \\ \dot{\theta}_2 = & 0; \quad \dot{x}_2 = -V_2 \cos \theta_2; \quad \dot{y}_2 = V_2 \sin \theta_2. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Отрицательная правая часть третьего уравнения этой системы объясняется тем, что согласно Рис. 3.9 координата x_2 должна быть убывающей функцией времени.

Начальные условия для системы (3.3.3) имеют вид:

$$V_2(t_k) = V_k; \quad \theta_2(t_k) = 0; \quad x_2(t_k) = x_k; \quad y_2(t_k) = y_{\text{цм}}. \quad (3.3.4)$$

Пробег БЛА по ВПП завершается в момент времени $t_{\text{ост}}$ его остановки, то есть при выполнении следующего равенства:

$$V_2(t_{\text{ост}}) = 0. \quad (3.3.5)$$

Координата точки остановки БЛА на ВПП вычисляется как:

$$x_{\text{ост}} = x_2(t_{\text{ост}}). \quad (3.3.6)$$

Тогда длина пробега БЛА по ВПП будет равна:

$$L_{\text{пр}} = x_k - x_{\text{ост}}. \quad (3.3.7)$$

Условие того, что БЛА не выкатится за пределы ВПП, двигаясь точно по ее средней линии, может быть согласно Рис. 3.9 представлено неравенством вида:

$$x_2(t_{\text{ост}}) > 0.$$

При невыполнении этого условия принимается решение о корректировке значений x_k и V_B или невозможности посадки БЛА по состоянию ВПП.

При пробеге по ВПП косвенным управлением БЛА является функция $\alpha_{\text{п}} = \alpha_{\text{п}}(t)$, $t \in [t_k, t_{\text{ост}}]$, которая должна обеспечивать минимальное значение величины $L_{\text{пр}}$, определяемой выражением (3.3.7).

Рассмотрим второй перспективный способ реализации наземного участка посадки БЛА – **применение тормозного парашюта (ТП)**, который выстреливается пиротехническим зарядом в момент касания БЛА поверхности ВПП.

На Рис. 3.10 представлена схема сил, действующих на БЛА при этом способе его посадки.

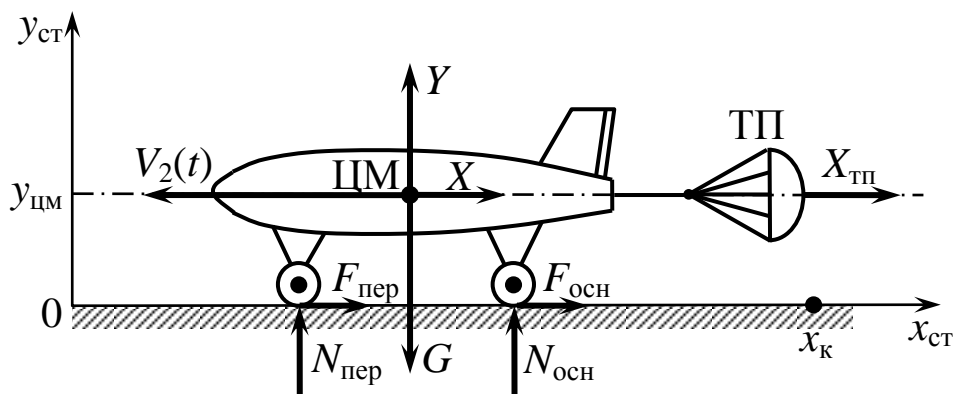


Рис. 3.10

Сила торможения парашюта согласно работам [31, 37] описывается формулой вида [31]:

$$X_{\text{ТП}} = 0,5c_{x,\text{ТП}}S_{\text{ТП}}\rho V^2. \quad (3.3.8)$$

Здесь $c_{x,\text{ТП}}$ – коэффициент сопротивления; $S_{\text{ТП}}$ – площадь поверхности ТП.

Эти параметры имеют следующие значения [31]:

$$c_{x,\text{ТП}} = 0,45 - 0,5; \quad S_{\text{ТП}} = kS, \quad (3.3.9)$$

где $k = 0,5-0,6$ – эмпирический коэффициент; S – площадь крыла БЛА.

Как указывается в этой работе, размеры купола ТП зависят от веса БЛА, нагрузки на крыло, посадочной скорости, коэффициента сопротивления и требуемого сокращения длины пробега, состояния ВПП и др.

Вопросы расчета и конструирования тормозных парашютных систем ЛА подробно рассмотрены в работе [37].

Отметим, что система торможения БЛА с применением парашюта входит в состав его взлетно-посадочных устройств (см. Рис. 1.1).

С учетом выражений (3.3.8), (3.3.9) уравнения (3.3.3) примут следующий вид:

$$\dot{V}_2 = - \frac{0,5(c_x(\alpha, M_2) + f_k c_y(\alpha, M_2) + c_{x, \text{ш}}) \rho_0 V_2^2 S}{m_{\text{пос}}} - g(\sin \theta_2 + f_k \cos \theta_2); \quad (3.3.10)$$

$$\dot{\theta}_2 = 0; \quad \dot{x}_2 = -V_2 \cos \theta_2; \quad \dot{y}_2 = V_2 \sin \theta_2.$$

Для этой модели используются начальные условия (3.3.4) и условия остановки БЛА при его пробеге вида (3.3.5) и (3.3.6). Длина пробега вычисляется по формуле (3.3.7).

Пример 3.5.

Проведем моделирование посадки БЛА на сухую бетонную ВПП при давлении $p_0 = 760$ мм.рт.ст. и температуре $\tau_0 = -40^\circ\text{C}$ с использованием традиционного и перспективного способов реализации его пробега.

Характеристики БЛА берутся, как и выше, из Табл. 2.1 и Примера 3.1 при его массе:

$$m_{\text{пос}} = 300 \text{ кг.}$$

Будем считать, что $t_k = 0$ и характеристики (3.3.1), (3.3.2) завершения воздушного участка посадки БЛА имеют вид:

$$\theta_0 = 0 \text{ град; } y_{\text{цм}} = 1,5 \text{ м; } x_k = 2700 \text{ м; } V_k = 40 \text{ м/с.}$$

Результаты интегрирования системы уравнений (3.3.3) с этими начальными условиями при $\alpha = 5^\circ$ представлены в Табл. 3.15.

Из этой таблицы с применением условий (3.3.5)-(3.3.7) получаем следующие характеристики пробега БЛА:

$$t_{\text{ост}} = 155,38 \text{ с; } x_{\text{ост}} = 8,21 \text{ м; } L_{\text{пр}} = 2691,79 \text{ м.}$$

Таблица 3.15

$t, \text{с}$	$V, \text{м/с}$	$\theta, \text{град}$	$x, \text{м}$	$y, \text{м}$
0	40	0	2700	1,5
10,359	35,764	0	2308	1,5
20,717	31,989	0	1957	1,5
31,076	28,577	0	1644	1,5
41,434	25,457	0	1364	1,5
51,793	22,572	0	1116	1,5
62,152	19,879	0	896,1	1,5
72,510	17,343	0	703,5	1,5
82,869	14,934	0	536,4	1,5
93,227	12,630	0	393,7	1,5
103,586	10,408	0	274,5	1,5
113,944	8,253	0	177,9	1,5
124,303	6,147	0	103,3	1,5
134,662	4,079	0	50,4	1,5
145,020	2,034	0	18,7	1,5
155,379	0	0	8,2	1,5

Приведем результаты вычислительных экспериментов при значении:

$$x_k = 1285 \text{ м}$$

и различных углах атаки при пробеге БЛА:

$$\alpha = 10^\circ; \quad t_{\text{ост}} = 130,1 \text{ с}; \quad x_{\text{ост}} = -782,48 \text{ м}; \quad L_{\text{пр}} = 2067,48 \text{ м};$$

$$\alpha = 5^\circ; \quad t_{\text{ост}} = 155,38 \text{ с}; \quad x_{\text{ост}} = -1407 \text{ м}; \quad L_{\text{пр}} = 2692 \text{ м};$$

$$\alpha = 0^\circ; \quad t_{\text{ост}} = 174,45 \text{ с}; \quad x_{\text{ост}} = -1930 \text{ м}; \quad L_{\text{пр}} = 3215 \text{ м};$$

$$\alpha = -5^\circ; \quad t_{\text{ост}} = 172,48 \text{ с}; \quad x_{\text{ост}} = -1874 \text{ м}; \quad L_{\text{пр}} = 3159 \text{ м};$$

Моделирование пробега БЛА с ТП с параметрами:

$$c_{x,\text{ТП}} = 0,5; \quad k = 0,6$$

осуществлялось путем решения системы уравнений (3.3.11) при $\alpha = 5^\circ$ с выбранными из Табл. 3.15 начальными условиями. Результаты моделирования представлены в Табл. 3.16.

Таблица 3.16

$t, \text{ с}$	$V, \text{ м/с}$	$\theta, \text{ град}$	$x, \text{ м}$	$y, \text{ м}$
0	40	0	2700	1,5
5,359	30,763	0	2508	1,5
10,960	24,666	0	2357	1,5
16,441	20,285	0	2235	1,5
21,921	16,941	0	2133	1,5
27,401	14,271	0	2048	1,5
32,881	12,061	0	1976	1,5
38,361	10,176	0	1915	1,5
43,841	8,528	0	1864	1,5
49,322	7,055	0	1821	1,5
54,802	5,713	0	1786	1,5
60,282	4,468	0	1758	1,5
65,762	3,294	0	1737	1,5
71,242	2,170	0	1722	1,5
76,723	1,077	0	1713	1,5
82,203	0	0	1710	1,5

Из этой таблицы следует, что

$$t_{\text{ост}} = 82,2 \text{ с}; \quad x_{\text{ост}} = 1710 \text{ м}; \quad L_{\text{пр}} = 990 \text{ м}.$$

При этом время пробега БЛА уменьшилось в 1,89 раз, а его длина – в 2,72 раза.

Вычислительные эксперименты с приведенными выше исходными данными при пробеге БЛА с ТП дали следующие результаты:

$$\alpha = 10^\circ; \quad t_{\text{ост}} = 78,5 \text{ с}; \quad x_{\text{ост}} = 366,6 \text{ м}; \quad L_{\text{пр}} = 918,4 \text{ м};$$

$$\alpha = 5^\circ; \quad t_{\text{ост}} = 82,2 \text{ с}; \quad x_{\text{ост}} = 295,3 \text{ м}; \quad L_{\text{пр}} = 989,9 \text{ м};$$

$$\alpha = 0^\circ; \quad t_{\text{ост}} = 84,2 \text{ с}; \quad x_{\text{ост}} = 256,3 \text{ м}; \quad L_{\text{пр}} = 1028,7 \text{ м};$$

$$\alpha = -5^\circ; \quad t_{\text{ост}} = 84,02 \text{ с}; \quad x_{\text{ост}} = 257,7 \text{ м}; \quad L_{\text{пр}} = 1025,3 \text{ м};$$

Сравнивая наихудшие результаты проведенных экспериментов при $\alpha = 0^\circ$, получаем, что применение ТП дает выигрыш по времени пробега БЛА в 2,1 раза и по длине пробега – в 3,1 раза.

Таким образом, можно сделать вывод, что применение ТП более чем в 2 раза улучшает посадочные характеристики БЛА.

Отсюда наряду с результатами Разд. 3.2 следует рекомендация по применению с временных грунтовых аэродромов БЛА, оснащенных стартовыми ускорителями и тормозными парашютами.

3.4. Парашютная посадка БЛА СС

Данный способ приземления в настоящее время является основным для БЛА легкого и среднего классов. Достоинства и недостатки этого способа посадки БЛА достаточно подробно рассмотрены в работе [42]. Однако следует заметить, что в доступной литературе отсутствуют общепринятые модели описания этого важного этапа полетов БЛА.

В работе [9] рассмотрена достаточно подробная библиография и классификация современных парашютных систем, различные подходы к математическому описанию процессов их функционирования, и приведена общая математическая модель динамики парашютной посадки БЛА.

Приведем требования к одной из современных парашютных систем посадки и спасения БЛА [32].

Парашютная система посадки и спасения для беспилотного летательного аппарата является частью его взлетно-посадочных устройств и предназначена для обеспечения стабилизированного снижения БЛА с заданной скоростью после прекращения его полета по команде.

Эта парашютная система посадки и спасения БЛА обеспечивает:

- нормальную работу системы при высоте полета изделия до 3000 м и продолжительности до 5 часов при скорости ввода в спуск БЛА от 24 м/с до 45 м/с;

- стабилизированный спуск БЛА с высоты от 3000 м до 300 м при скорости снижения на высоте 100 м до 5 м/с;
- минимально-безопасную высоту ввода в действие основного парашюта системы не менее 200 м.

Система работоспособна при температуре окружающего воздуха у земли от +50°C до –50°C и скорости ветра при посадке до 10 м/с.

Назначенный ресурс системы составляет 50 посадок БЛА.

Моделирование процесса парашютной посадки БЛА позволит проводить прогнозирование точки его приземления, что резко сократит время его поиска для повторного применения.

Будем считать, что в типовую систему парашютной посадки (СПП) БЛА входят следующие элементы:

- вытяжной парашют (ВП);
- основной парашют (ОП);
- метательный (пиротехнический) заряд (МЗ);
- контейнер для размещения ВП и ОП.

Процесс парашютной посадки БЛА разбивается на следующие основные этапы:

1. Выброс ВП с помощью МЗ из контейнера СПП после получения соответствующей команды от САУ или от оператора управления БЛА, выход в поток и наполнение ВП.
2. Вытягивание купола и строп ОП на всю длину.
3. Наполнение купола ОП до площади ограниченной его рифовкой.
4. Снижение БЛА на зарифованном куполе ОП.
5. Разрифовка и наполнение до полной площади купола ОП.
6. Снижение БЛА на полном куполе ОП, приземление и отцепка ОП от БЛА.

В общем случае выброс ВП и ОП СПП осуществляется под определенным углом к осям БЛА. Например, для одного из типов средних БЛА «отстрел» ВП производится под углом 135° к его продольной оси или 45° к вертикальной оси связанной СК БЛА.

Реализация отмеченных выше этапов 1-6 существенным образом связана с динамикой функционирования СПП БЛА.

Основное значение при эксплуатации СПП имеет сила сопротивления парашютов, которая представляется формулой вида [9]:

$$X_{\text{п}} = c_{\text{п}} F_{\text{п}} \frac{\rho V^2}{2}. \quad (3.4.1)$$

Здесь $c_{\text{п}}$ – коэффициент сопротивления парашюта; $F_{\text{п}}$ – площадь купола; ρ – плотность воздуха; V – скорость набегающего потока воздуха.

В процессе наполнения парашюта изменяются параметры $c_{\text{п}}$ и $F_{\text{п}}$, входящие в формулу (3.4.1). В работе [9] используется понятие эффективной площади сопротивления парашюта:

$$\Phi = c_{\text{п}} F_{\text{п}} \quad (3.4.2)$$

и предлагается следующая эмпирическая зависимость ее изменения во времени:

$$\Phi(t) = at^k, \quad t \in [0, \tau], \quad (3.4.3)$$

где a , k – эмпирические коэффициенты; τ – время полного наполнения парашюта.

На основании закона непрерывности парашюты должны раскрываться на определенной длине их строп, так как для наполнения купола требуется заданный конический столб воздуха впереди купола. Эта длина пропорциональна номинальному диаметру $D_{\text{п}}$ парашюта. Для определения времени τ предлагается формула вида:

$$\tau = \frac{nD_{\Pi}}{V}, \quad (3.4.4)$$

где n – коэффициент пропорциональности, характерный для каждого типа парашюта.

Этот коэффициент по результатам испытаний одного из видов парашютных систем при наполнении зарифованного парашюта принимает значения, равные 10-12. При его наполнении после разрифовки $n = 1,8-2$ [9].

В конце процесса наполнения парашюта при $t = \tau$, величина, определяемая выражением (3.4.2), принимает максимальное значение, равное Φ_{\max} .

Тогда из формулы (3.4.3) имеем, что:

$$a = \frac{\Phi_{\max}}{\tau^k}.$$

Отметим, что значения Φ_{\max} и коэффициента k конкретной СПП БЛА должно определяться на основе ее продувки в аэродинамической трубе или при летных испытаниях системы.

В работе [9] приводится значение $k = 1,6-2,4$ для приведенной выше СПП.

При наличии рифовки у рассматриваемого парашюта выражение (3.4.3) принимает вид:

$$\Phi(t) = \Phi_p + (\Phi_{\max} - \Phi_p) \left(\frac{t}{\tau} \right)^k, \quad t \in [0, \tau],$$

где Φ_p – эффективная площадь сопротивления заполненного зарифованного парашюта.

Для дальнейшего использования включим в состав этого выражения правую часть формулы (3.4.4). В этом случае имеем:

$$\Phi(t, V) = \Phi_p + (\Phi_{\max} - \Phi_p) \left(\frac{tV}{nD_{\text{ОП}}} \right)^k. \quad (3.4.5)$$

Отметим, что при использовании в СПП БЛА незарифованного ОП в формуле (3.4.5) необходимо положить $\Phi_p = 0$.

Таким образом, с учетом соотношений (3.4.1), (3.4.2) и (3.4.5) получаем выражение:

$$X_{\Pi} = 0,5\Phi(t,V)\rho V^2, \quad (3.4.6)$$

описывающее зависимость силы сопротивления парашюта от времени и скорости набегающего потока воздуха.

Здесь ρ для различных атмосферных условий описывается формулами, приведенными в Разд. 1.3.

Моделирование парашютной посадки БЛА будем проводить при следующих предположениях:

- применяемые в СПП парашюты являются безинерционными объектами;
- все действующие в процессе посадки БЛА силы приведены к его ЦМ;
- движение БЛА в процессе посадки рассматривается как движение его ЦМ в вертикальной плоскости.

Пусть в момент времени t_0 начала процесса посадки БЛА имел следующие значения его фазовых координат ($V_{\text{пос}}, \theta_{\text{пос}}, \Psi_{\text{пос}}, x_{\text{пос}}, y_{\text{пос}}, z_{\text{пос}}$).

В связи с тем, что плановая посадка БЛА проводится обычно в районе его стартовой позиции, при моделировании будем использовать стартовую СК, представленную на Рис. 1.11, повернутую относительно оси МНПУ x_g на угол $\Psi_{\text{ст}} = \Psi_{\text{пос}}$ такой, чтобы значение $z_{\text{пос}} = 0$.

В процессе посадки на БЛА будут действовать следующие силы:

- X – сила лобового сопротивления БЛА;
- X_{Π} – сила сопротивления парашютов;
- G – сила тяжести БЛА.

Проекции этих сил на скоростную СК БЛА приведены на Рис. 3.11.

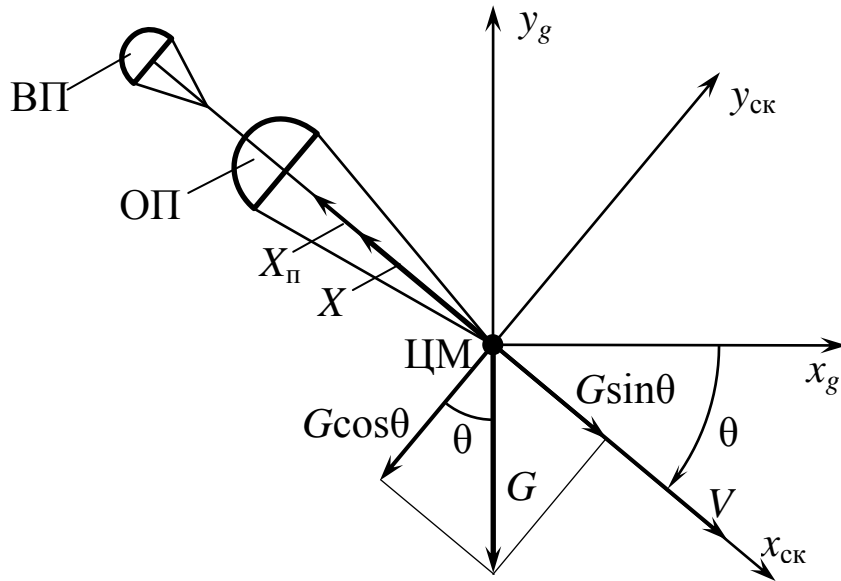


Рис. 3.11

Будем считать, что в процессе посадки БЛА угол θ принимает отрицательные значения, как это показано на приведенном рисунке.

Из Рис. 3.11 следует, что общие уравнения движения ЦМ БЛА в процессе посадки имеют вид [9]:

$$m\dot{V} = -G \sin \theta - X - X_{п}; \quad (3.4.7)$$

$$mV\dot{\theta} = G \cos \theta; \quad (3.4.8)$$

$$\dot{x} = V \cos \theta; \quad \dot{y} = V \sin \theta, \quad (3.4.9)$$

где $m = m_{пос}$ – масса БЛА в момент начала процесса посадки.

Начальные условия для этой системы дифференциальных уравнений записываются следующим образом:

$$V(t_0) = V_{пос}; \quad \theta(t_0) = \theta_{пос}; \quad x(t_0) = x_{пос}; \quad y(t_0) = y_{пос}. \quad (3.4.10)$$

Достаточно подробный анализ модели (3.4.7)-(3.4.10) приведен в монографии [9].

При конкретизации общей модели (3.4.7)-(3.4.10) будем рассматривать следующие непосредственные этапы парашютной посадки БЛА:

Этап 1. Ввод в действие ВП и вытягивание им ОП.

Этап 2. Наполнение ОП.

Этап 3. Спуск и приземление БЛА на ОП.

В связи с тем, что каждый из этих этапов занимает определенный интервал времени, функция $X_{\Pi}(t)$, входящая в правую часть уравнения (3.4.7), представляется как:

$$X_{\Pi}(t) = \begin{cases} X_{\text{ВП}}(t), & t \in [t_0, t_1]; \\ X_{\text{НОП}}(t), & t \in [t_1, t_2]; \\ X_{\text{ОП}}(t), & t \in [t_2, t_3]. \end{cases}$$

Здесь $X_{\text{ВП}}(t)$ – сила сопротивления ВП; $t_1 = t_0 + \tau_{\text{воп}}$ – момент времени окончания процесса вытягивания ОП, который занимает время $\tau_{\text{воп}}$; $X_{\text{НОП}}(t)$ – сила сопротивления в процессе наполнения ОП, который заканчивается в момент времени t_2 ; $X_{\text{ОП}}(t)$ – сила сопротивления наполненного ОП, которая действует до момента времени t_3 приземления БЛА.

Вследствие этого общую систему (3.4.7)-(3.4.9) сведем к трем системам дифференциальных уравнений с взаимосвязанными начальными условиями, каждая из которых описывает соответствующий этап посадки БЛА.

Модель процесса посадки БЛА на этапе 1 имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -g \sin \theta_1 - (c_x^*(V)S + \Phi_{\text{ВП}}) \frac{\rho V_1^2}{2m}; \\ \dot{\theta}_1 &= \frac{g \cos \theta_1}{V_1}; \\ \dot{x}_1 &= V_1 \cos \theta_1; \quad \dot{y}_1 = V_1 \sin \theta_1. \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

Здесь $c_x^*(V)$ – коэффициент лобового сопротивления БЛА в процессе его бездвигательного снижения при скорости V ; S – характерная площадь БЛА при его спуске на ВП; $\Phi_{\text{ВП}}$ – эффективное сопротивление ВП, определяемое выражением (3.4.2).

Начальные условия для системы (3.4.11) задаются с учетом (3.4.10) как:

$$V_1(t_0) = V_{\text{пос}}; \quad \theta_1(t_0) = \theta_{\text{пос}}; \quad x_1(t_0) = x_{\text{пос}}; \quad y_1(t_0) = y_{\text{пос}}. \quad (3.4.12)$$

Для определения момента времени t_1 окончания этапа 1 опишем процесс вытягивания ОП общей массой $m_{\text{ОП}}$ и длиной $l_{\text{ОП}}$ с помощью силы $X_{\text{ВП}}(t)$ дифференциальным уравнением 2-го порядка:

$$m_{\text{ОП}} \ddot{L} = X_{\text{ВП}}(t) \quad (3.4.13)$$

построенного с использованием модели динамики точки переменной массы [24].

Начальные условия для этого уравнения имеют вид:

$$L(t_0) = L_0; \quad \dot{L}(t_0) = 0.$$

В уравнении (3.4.13) использованы следующие обозначения: $L = L(t)$ – длина вытянутой в момент времени t части ОП; $m_{\text{ОП}} = m_{\text{ОП}}(L)$ – масса вытянутой в этот момент времени части ОП длиной L .

Для построения приближенного вида зависимости $m_{\text{ОП}}(L)$ вытягиваемый ОП будем считать жгутом цилиндрической формы со средним диаметром d и средней плотностью его материала $\mu = 0,5(\mu_{\text{к}} + \mu_{\text{с}})$, где $\mu_{\text{к}}$ и $\mu_{\text{с}}$ соответственно плотности материалов купола и строп ОП.

Тогда массу ОП, вытянутого на длину L , можно приближенно вычислить по формуле:

$$m_{\text{ОП}}(L) = \frac{\pi \mu d^2}{4} L. \quad (3.4.14)$$

Используя выражение:

$$X_{\text{ВП}}(t) = \frac{\Phi_{\text{ВП}} \rho V_1^2(t)}{2}$$

и формулу (3.4.14), представим дифференциальное уравнение второго порядка (3.4.13) в виде системы двух уравнений 1-го порядка:

$$\dot{L} = l; \quad \dot{i} = \frac{2\Phi_{\text{вп}}\rho V_1^2}{\pi\mu d^2 L} \quad (3.4.15)$$

с начальными условиями:

$$L(t_0) = L_0, \quad i(t_0) = 0. \quad (3.4.16)$$

Тогда момент времени t_1 будет определяться из условия:

$$L(t_1) = L_{\text{оп}}. \quad (3.4.17)$$

Таким образом, движение на этапе 1 посадки БЛА описывается на интервале времени $[t_0, t_1]$ дифференциальными уравнениями (3.4.11), (3.4.15) с начальными условиями (3.4.12) и (3.4.16).

Этап 2 посадки БЛА описывается следующей системой дифференциальных уравнений [9]:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -g \sin \theta_2 - \left(c_x^*(V)S + \Phi_{\text{оп}}(t, V_2) \right) \frac{\rho V_2^2}{2m}; \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{g \cos \theta_2}{V_2}; \quad \dot{x}_2 = V_2 \cos \theta_2; \quad \dot{y}_2 = V_2 \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

с начальными условиями:

$$V_2(t_1) = V_1(t_1); \quad \theta_2(t_1) = \theta_1(t_1); \quad x_2(t_1) = x_1(t_1); \quad y_2(t_1) = y_1(t_1). \quad (3.4.19)$$

Здесь в первом уравнении используется зависимость вида (3.4.6) при $V = V_2$.

Эту зависимость будем использовать для определения момента времени t_2 завершения рассматриваемого этапа посадки БЛА.

Искомый момент времени t_2 характеризуется полным наполнением ОП, которое описывается равенством:

$$\Phi_{\text{оп}}(t_2, V_2) = \Phi_{\text{max}}.$$

Из выражения (3.4.5) следует, что данное равенство будет иметь место при условии:

$$\frac{t_2 V_2(t_2)}{nD_{\text{оп}}} = 1.$$

Если ввести в рассмотрение вспомогательную функцию:

$$u(t) = \frac{tV_2(t)}{nD_{\text{оп}}},$$

то момент времени t_2 будет определяться условием:

$$u(t_2) = 1. \quad (3.4.20)$$

Этап 3 предлагается описывать моделью вида [9]:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= -g \sin \theta_3 - \left(c_x^*(V_3) S + \Phi_{\text{max}} \right) \frac{\rho V_3^2}{2m}; \\ \dot{\theta}_3 &= \frac{g \cos \theta_3}{V_3}; \quad \dot{x}_3 = V_3 \cos \theta_3; \quad \dot{y}_3 = V_3 \sin \theta_3; \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

$$V_3(t_2) = V_2(t_2); \quad \theta_3(t_2) = \theta_2(t_2); \quad x_3(t_2) = x_2(t_2); \quad y_3(t_2) = y_2(t_2). \quad (3.4.22)$$

Система уравнений (3.4.21) интегрируется при начальных условиях (3.4.22) до момента времени t_3 , который определяется из условия приземления БЛА вида:

$$y_3(t_3) = 0. \quad (3.4.23)$$

При этом в используемой СК расчетная точка приземления БЛА определяется координатой:

$$x_{\text{пр}} = x_3(t_3). \quad (3.4.24)$$

Заметим, что при отсутствии зависимости $c_x^*(V)$, которая должна определяться по результатам продувок в аэродинамических трубах БЛА с имитацией его парашютной посадки, в уравнениях (3.4.11), (3.4.18) и (3.4.21) можно использовать предположение, что $c_x^*(V) = 0$ [9].

При расчете и проектировании СПП БЛА предлагается использовать методики работы [37].

Предложенная выше модель посадки БЛА с использованием СПП применяется при отсутствии ветра в районе посадки.

При учете действия ветровых возмущений на процесс парашютной посадки БЛА можно использовать подход, изложенный в работе [9].

Пример 3.6.

Пусть БЛА, взлетевший с МПУ (см. Пример 3.1) после выполнения полетного задания осуществляет парашютную посадку в стартовой СК, представленной на Рис. 3.12.

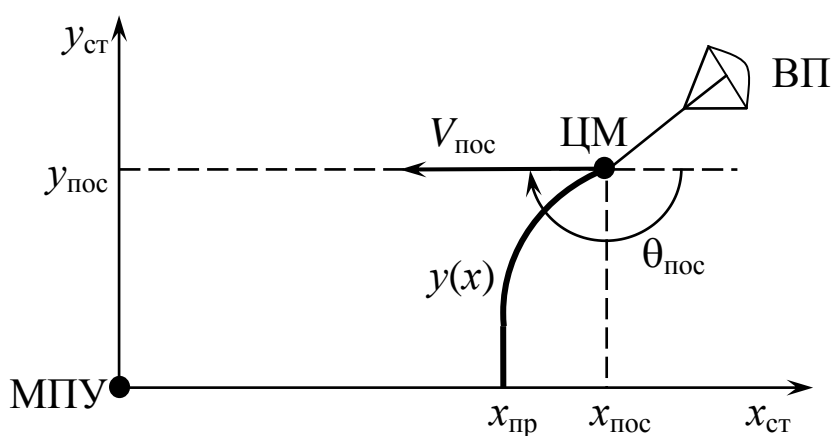


Рис. 3.12

Будем считать, что посадка БЛА происходит при нормальных атмосферных условиях ($p_0 = 760$ мм.рт.ст., $\tau_0 = +15^\circ\text{C}$) и отсутствии ветра.

Пусть рассматриваемый БЛА посадочной массы:

$$m = m_{\text{пос}} = 300 \text{ кг}$$

оснащен СПП со следующими характеристиками:

- вытяжной парашют (ВП):

$$c_{x \text{ вп}} = 0,86; \quad D_{\text{вп}} = 0,8 \text{ м}; \quad F_{\text{вп}} = 1,02 \text{ м}; \quad S_{\text{вп}} = 1,2+2 = 3,2 \text{ м};$$

- основной парашют (ОП):

$$c_{x \text{ оп}} = 0,81; \quad D_{\text{оп}} = 14 \text{ м}; \quad F_{\text{оп}} = 312,4 \text{ м}; \quad S_{\text{оп}} = 21+2,5 = 23 \text{ м};$$

Здесь параметры $S_{\text{ВП}}$ и $S_{\text{ОП}}$ включают в себя длины строп и звеньев этих парашютов.

Будем считать, что укладка ОП имеет следующие размеры:

$$L_{\text{ОП}} = 31 \text{ м}; \quad d = 25 \text{ см} = 0,25 \text{ м}.$$

Для конкретизации выражения (3.4.14) примем величину удельного веса μ укладки из парашютного шелка, равной $1,36 \text{ кг/м}^3$.

Положим величину $t_0 = 0 \text{ с}$. и будем считать, что выброс ВП метательным зарядом в поток и его наполнение происходит за пренебрежимо малое время.

Определим по формуле (3.4.2) эффективную площадь сопротивления ОП:

$$\Phi_{\text{ОП}} = 0,81 \cdot 312,4 = 253,044 \text{ м}^2.$$

Будем считать, что этот парашют незарифован. Тогда в выражении (3.4.5) положим:

$$\Phi_p = 0; \quad k = 1,6; \quad n = 2; \quad \Phi_{\text{max}} = \Phi_{\text{ОП}}.$$

В связи с отсутствием необходимых результатов аэродинамических испытаний СПП будем считать, что $c_x^*(V) = 0$.

Параметры начала посадки БЛА, представленные на Рис. 3.12 и в начальных условиях (3.4.12), (3.4.16), имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} V_1(0) &= 50 \text{ м/с}; \quad \theta_1(0) = -180 \text{ град}; \\ x_1(0) &= 1000 \text{ м}; \quad y_1 = 800 \text{ м}; \\ L(0) &= 0,2 \text{ м}; \quad l = 0. \end{aligned}$$

Результаты моделирования этапа 1 посадки БЛА путем решения системы уравнений (3.4.11), (3.4.15) до выполнения условия (3.4.17) приведены в Табл. 3.17.

Параметры спуска БЛА в процессе наполнения ОП (этап 2), полученные путем интегрирования системы уравнений (3.4.18) до выполнения условия (3.4.20), представлены в Табл. 3.18.

Таблица 3.17

t, c	$V, m/c$	$\theta, \text{град}$	x, m	y, m	L, m	l, m
0	50	-180	1000	800	0,2	0
0,005	49,976	-179,940	999,735	800	1,105	262,196
0,011	49,953	-179,881	999,470	799,999	2,681	323,060
0,016	49,929	-179,821	999,205	799,999	4,483	353,560
0,021	49,906	-179,761	998,940	799,998	6,414	373,327
0,027	49,882	-179,702	998,675	799,997	8,434	387,745
0,032	49,859	-179,642	998,411	799,995	10,522	399,000
0,037	49,836	-179,582	998,146	799,993	12,664	408,180
0,042	49,812	-179,522	997,882	799,991	14,850	415,903
0,048	49,789	-179,462	997,618	799,989	17,074	422,548
0,053	49,766	-179,402	997,354	799,986	19,332	428,368
0,058	49,743	-179,343	997,090	799,983	21,618	433,536
0,064	49,720	-179,283	996,826	799,980	23,930	438,177
0,069	49,698	-179,223	996,562	799,977	26,266	442,384
0,074	49,675	-179,163	996,299	799,973	28,623	446,227
0,080	49,652	-179,103	996,035	799,969	31	449,761

Таблица 3.18

t, c	$V, m/c$	$\theta, \text{град}$	x, m	y, m	u
0,080	49,652	-179,103	996,035	799,969	0,141
0,496	19,691	-171,352	982,516	799,131	0,349
0,912	11,492	-155,828	976,606	797,532	0,374
1,329	8,904	-136,430	973,157	795,256	0,422
1,745	7,885	-119,432	971,042	792,521	0,491
2,161	7,250	-107,391	969,811	789,634	0,560
2,577	6,723	-99,738	969,143	786,808	0,619
2,994	6,276	-95,200	968,801	784,127	0,671
3,410	5,902	-92,659	968,632	781,601	0,719
3,826	5,590	-91,306	968,552	779,212	0,764
4,243	5,325	-90,618	968,516	776,941	0,807
4,659	5,097	-90,282	968,499	774,773	0,848
5,075	4,899	-90,125	968,492	772,693	0,888
5,492	4,724	-90,053	968,489	770,691	0,926
5,908	4,568	-90,022	968,488	768,575	0,964
6,324	4,427	-90,009	968,488	766,885	1

Из этой таблицы следует, что БЛА практически через 6 с. его движения переходит в режим вертикального спуска.

Этап 3 посадки, описываемый системой уравнений (3.4.21) и условиями (3.4.22)-(3.4.24), представлен Табл. 3.19.

Таблица 3.19

t, c	$V, m/c$	$\theta, град$	x, m	y, m
6,324	4,427	-90,009	968,488	766,885
18,059	4,358	-90	968,487	715,747
29,794	4,357	-90	968,487	664,622
41,528	4,357	-90	968,487	613,497
53,263	4,357	-90	968,487	562,372
64,997	4,357	-90	968,487	511,248
76,732	4,357	-90	968,487	460,123
88,467	4,357	-90	968,487	408,998
100,201	4,357	-90	968,487	357,873
111,936	4,357	-90	968,487	306,749
123,670	4,357	-90	968,487	255,624
135,405	4,357	-90	968,487	204,499
147,140	4,357	-90	968,487	153,374
158,874	4,357	-90	968,487	102,250
170,609	4,357	-90	968,487	51,125
182,343	4,357	-90	968,487	0

По данным этой таблицы конечные параметры приземления БЛА имеют следующие значения:

$$t_{\text{пр}} = 182,34 \text{ с}; \quad V_{\text{пр}} = 4,357 \text{ м/с}; \quad \theta_{\text{пр}} = -90^\circ; \quad x_{\text{пр}} = 968,5 \text{ м}.$$

На Рис. 3.13 приведены графики изменения фазовых координат БЛА при его посадке.

Рассмотрим возможность применения СПП при аварийной посадке БЛА.

Будем считать, что при завершении аэродромного взлета БЛА со стартовым ускорителем (см. Пример 3.4) произошел отказ его маршевого двигателя и было принято решение о его посадке с помощью бортовой парашютной системы спасения.

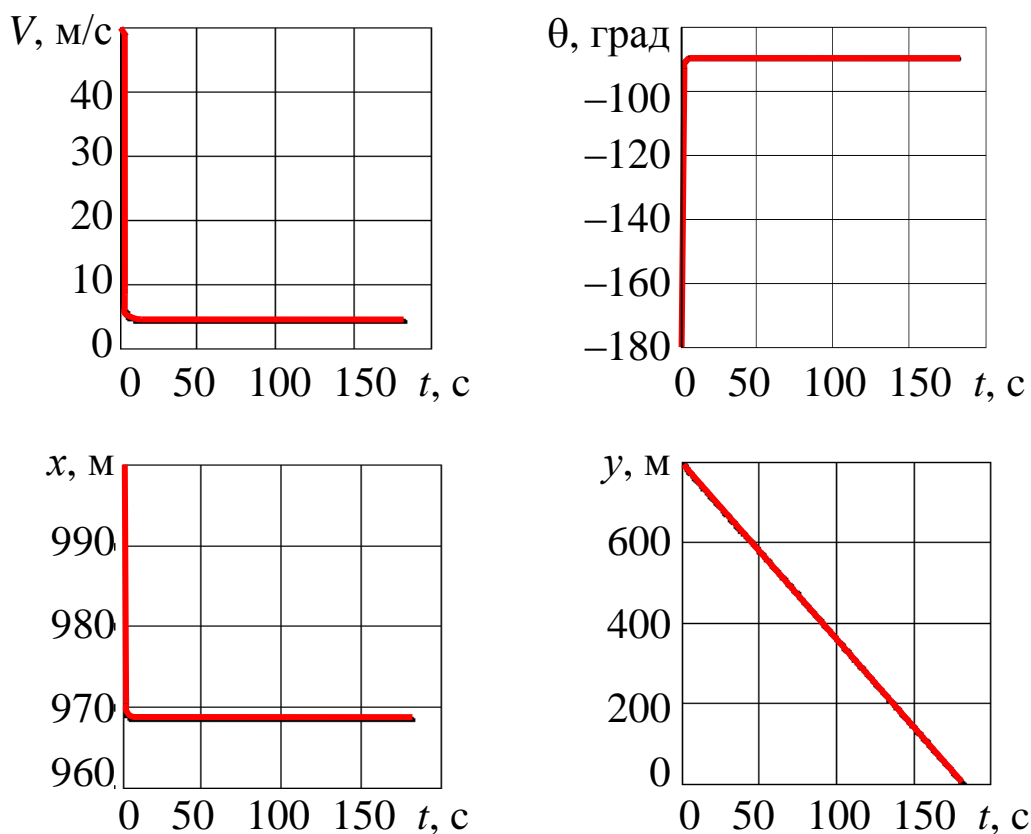


Рис. 3.13

При этом начальные посадочные значения параметров БЛА равны:

$$V_{\text{пос}} = 56,652 \text{ м/с}; \quad \theta_{\text{пос}} = 29,401^\circ; \quad x_{\text{пос}} = 1098 \text{ м}; \quad y_{\text{пос}} = 300 \text{ м}.$$

Результаты моделирования приземления БЛА с использованием описанной выше СПП представлены в общей Табл. 3.20.

Таблица 3.20

№ этапа	$t, \text{ с}$	$V, \text{ м/с}$	$\theta, \text{ град}$	$x, \text{ м}$	$y, \text{ м}$	$L, \text{ м}$
1	0	56,652	29,401	1098	300	0,2
	0,005	56,603	29,360	1098	300,130	1,106
	0,009	56,553	29,320	1098	300,260	2,683
	0,014	56,504	29,279	1099	300,390	4,486
	0,019	56,455	29,239	1099	300,519	6,418
	0,023	56,405	29,198	1099	300,649	8,439
	0,028	56,356	29,157	1099	300,777	10,527
	0,033	56,307	29,116	1100	300,905	12,669
	0,037	56,258	29,075	1100	301,034	14,855
	0,042	56,210	29,035	1100	301,162	17,079

	0,047	56,161	28,994	1100	301,289	19,336
	0,052	56,112	28,953	1101	301,417	21,622
	0,056	56,064	28,911	1101	301,544	23,934
	0,061	56,015	28,870	1101	301,671	26,269
	0,066	55,966	28,829	1101	301,797	28,625
	0,070	55,918	28,788	1101	301,924	31
2						<i>u</i>
	0,070	55,918	28,788	1101	301,924	0,140
	0,487	19,567	22,001	1114	308,370	0,340
	0,904	10,566	5,479	1120	309,942	0,341
	1,321	7,841	-20,516	1124	309,534	0,370
	1,738	7,259	-46,308	1126	307,820	0,451
	2,155	7,033	-64,489	1128	305,357	0,541
	2,572	6,667	-75,784	1129	302,665	0,612
	2,989	6,265	-82,421	1129	300,017	0,669
	3,406	5,902	-86,128	1130	297,495	0,718
	3,823	5,592	-88,100	1130	295,103	0,763
	4,240	5,327	-89,102	1130	292,829	0,807
	4,657	5,099	-89,590	1130	290,657	0,848
	5,074	4,900	-89,819	1130	288,574	0,888
	5,490	4,724	-89,923	1130	286,568	0,926
	5,907	4,568	-89,968	1130	284,632	0,964
	6,324	4,427	-89,987	1130	282,757	1
3	6,324	4,427	-89,987	1130	282,757	
	10,648	4,357	-90	1130	263,892	
	14,972	4,357	-90	1130	244,904	
	19,296	4,357	-90	1130	226,065	
	23,620	4,357	-90	1130	207,226	
	27,945	4,357	-90	1130	188,388	
	32,269	4,357	-90	1130	169,169	
	36,593	4,357	-90	1130	150,710	
	40,917	4,357	-90	1130	131,871	
	45,241	4,357	-90	1130	113,033	
	49,565	4,357	-90	1130	94,194	
	53,889	4,357	-90	1130	75,355	
	58,213	4,357	-90	1130	56,516	
	62,537	4,357	-90	1130	37,678	
	66,861	4,357	-90	1130	18,839	
	71,185	4,357	-90	1130	0	

Из этой таблицы следует, что БЛА осуществляет аварийную посадку со следующими характеристиками:

$$t_{\text{пр}} = 71,185 \text{ с}; V_{\text{пр}} = 4,357 \text{ м/с}; \theta_{\text{пр}} = -90^\circ; x_{\text{пр}} = 1130 \text{ м}.$$

Графики изменения фазовых координат БЛА в процессе его аварийной посадки приведены на Рис. 3.14.

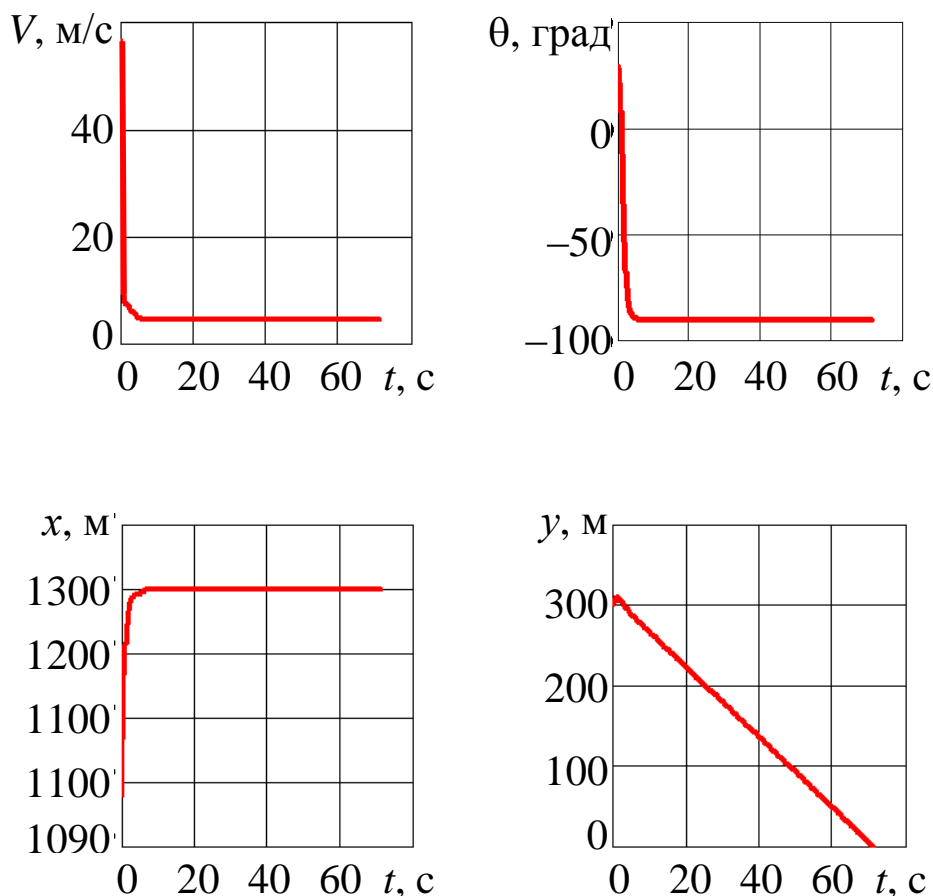


Рис. 3.14

Заметим, что БАК, использующие МПУ (см. Разд. 3.1) и СПП, обладают более высокой оперативностью и живучестью при решении целевых задач по сравнению с БАК, в которых для взлета и посадки применяются постоянные и временно создаваемые аэродромы.

В этой связи перспективным направлением в разработке СПП БЛА является использование в них в качестве ОП планирующих парашютов (парапланов) и малогабаритных систем управления их движением.

Применение таких СПП позволит осуществлять посадку БЛА при наличии ветра в заданную точку его приземления, что значительно сокращает затраты времени на поиск БЛА, его транспортировку на техническую позицию и подготовку БЛА к повторному полету.

3.5. Воздушный старт БЛА СС

Данный вид старта БЛА является перспективным способом их оперативной доставки в удаленные районы выполнения полетных заданий. Применение ЛА-носителей (самолеты и вертолеты) для этих целей позволяет значительным образом увеличить время их пребывания в этих районах за счет существенной экономии расхода бортового топлива БЛА.

Как отмечается в работе [33], интерес к воздушному старту не исчезал на протяжении всей эпохи бурного развития беспилотной авиационной техники. В этой работе исследуется транспортное совершенство 16 БЛА воздушного старта, созданных в период с 1940-50 г.г. до 2000-2010 г.г. в США, СССР и КНР. Примером одного из таких БЛА является советский БЛА Ла-17, созданный в 1950-60 г.г. Носителем двух таких БЛА был бомбардировщик Ту-4, который сбрасывал их с подкрыльевых подвесок на высоте 8000-8500 м. при скорости 130-140 км/ч. После сброса БЛА осуществляли снижение до 7000 м., включение двигателей и переход в режим горизонтального полета.

В монографии [10] приведены тактико-технические характеристики 7-ми образцов БЛА-АЛЦ воздушного старта, созданных в США, Израиле, Японии и Италии в период с 1963 г. по 2012 г. с указанием применяемых самолетов-носителей. Кроме этого в ней рассматриваются общие вопросы создания воздушных пунктов управления БЛА-АЛЦ.

Следует отметить практическое отсутствие в доступной литературе работ, посвященных математическому моделированию динамики этого вида старта БЛА.

В данном разделе предлагается рассмотреть следующие способы воздушного старта БЛА:

1. Старт путем сброса БЛА с неработающим маршевым двигателем (МД) с внешней подвески или из бомболюка ЛА-носителя с последующим его запуском.

2. Старт БЛА с работающим МД с направляющих ЛА-носителя.

3. Старт БЛА из грузового отсека ЛА-носителя с помощью вытяжной парашютной системы (см. Рис. 1.6,д) с последующим запуском его МД.

Будем считать, что эти способы осуществляются в вертикальной плоскости выбранной маневренной СК $Mxyz$.

Обозначим через $V^* = V^*(t)$, $\theta^* = \theta^*(t)$, $x^* = x^*(t)$, $y^* = y^*(t)$ соответственно скорость, угол наклона траектории и координаты ЛА-носителя в этой СК в момент времени $t \geq t_0$, где t_0 – момент времени старта БЛА с его борта.

Траекторию движения ЛА-носителя при заданных значениях V^* и θ^* будем описывать кинематическими уравнениями вида (2.1.42), (2.1.43), которые конкретизируются как:

$$\dot{x}^* = V^* \cos \theta^*; \quad \dot{y}^* = V^* \sin \theta^*, \quad t \geq t_0. \quad (3.5.1)$$

При этом считаются известными начальные условия вида:

$$x^*(t_0) = x_0^*; \quad y^*(t_0) = y_0^*. \quad (3.5.2)$$

Будем считать, что после отделения БЛА от ЛА-носителя через время T_y воздушный пункт управления (ВПУ) начинает управление его движением. В частности, в способах 1 и 3 производится включение МД БЛА.

Для проверки работоспособности бортовых систем БЛА в течение времени $T_{пр}$ БЛА осуществляет полет с работающим МД.

Для описания движения БЛА в процессе воздушного старта в качестве базовой модели будем использовать выражения (2.1.40)-(2.1.44). Входящие в динамические уравнения (2.1.40), (2.1.41) аэродинамические силы X и Y конкретизируются соотношениями (2.1.23) и (2.1.34).

Учитываемые при моделировании движения БЛА значения плотности воздуха ρ и скорости звука a при атмосферном давлении p и температуре τ на высоте y описываются формулами, приведенные в Разд. 1.3.

На Рис. 3.15 представлена схема реализации первого способа воздушного старта БЛА.

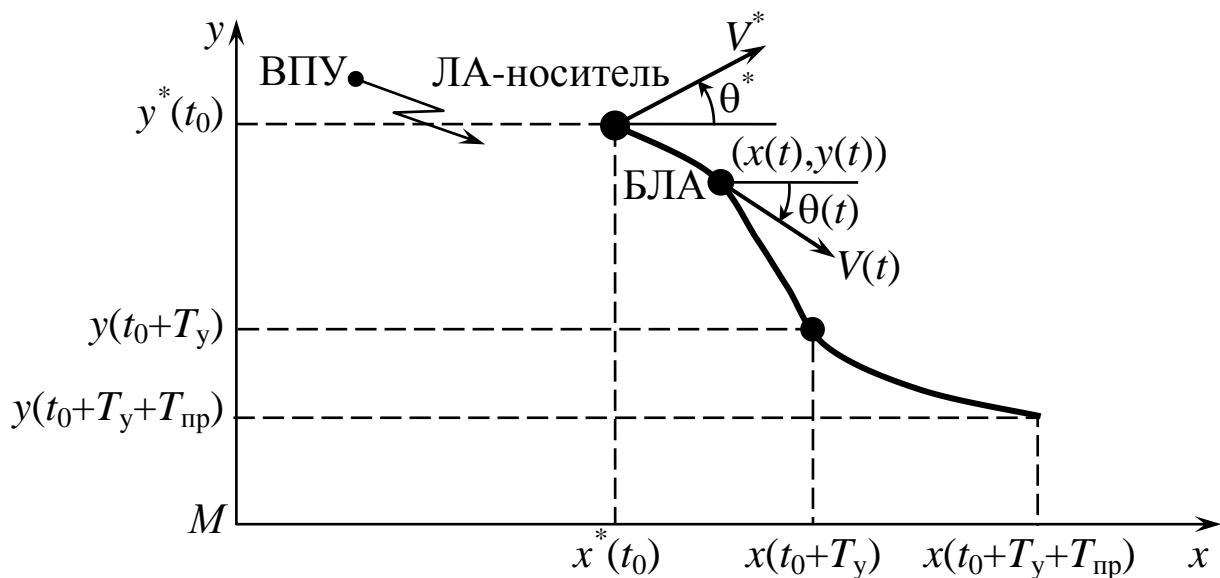


Рис. 3.15

Из этого рисунка следует, что процесс старта включает в себя два этапа, реализуемые на интервалах времени $[t_0; t_0+T_y]$ и $[t_0+T_y; t_0+T_y+T_{пр}]$.

На этапе 1 в уравнениях (2.1.40), (2.1.41) полагаем:

$$P(t) = 0. \quad (3.5.3)$$

Тогда модель, описывающая движение БЛА на этом этапе будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -\frac{0,5c_x(\alpha, M_1, y_1)\rho V_1^2 S}{m} - g \sin \theta_1; \\ \dot{\theta}_1 &= \frac{0,5c_y(\alpha, M_1, y_1)\rho V_1^2 S}{mV_1} - \frac{g}{V_1} \cos \theta_1; \\ \dot{x}_1 &= V_1 \cos \theta_1; \quad \dot{y}_1 = V_1 \sin \theta_1, \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

где m – стартовая масса БЛА; $M_1 = V_1/a$ – число Маха; S – площадь крыла БЛА.

Коэффициенты c_x , c_y и параметры a и ρ , входящие в эти уравнения, конкретизируются следующими формулами:

$$\begin{aligned} c_x(\alpha, M_1, y_1) &= \left(c_0 + \frac{c_1 V_1}{a(y_1)} \right) + A \left(d_0 + \frac{d_1 V_1}{a(y_1)} \right) (\alpha + \alpha_0)^2; \\ c_y(\alpha, M_1, y_1) &= \left(b_0 + \frac{b_1 V_1}{a(y_1)} \right) + \left(d_0 + \frac{d_1 V_1}{a(y_1)} \right) \alpha; \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

$$a = 20,048 \sqrt{273,15 + \tau_0} - 0,004 y_1;$$

$$\rho = \frac{0,46431 p_0}{273,15 + \tau_0 - 0,0065 y_1} e^{-0,0001286 y_1}.$$

Моделирование процесса спуска БЛА на этапе 1 осуществляется путем интегрирования на интервале времени $[t_0, t_0 + T_y]$ системы уравнений (3.5.4) при начальных условиях:

$$\begin{aligned} V_1(t_0) &= V_0^*(t_0); \quad \theta_1(t_0) = \theta^*(t_0); \\ x_1(t_0) &= x^*(t_0); \quad y_1(t_0) = y^*(t_0). \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

На этапе 2 этого способа старта БЛА в уравнениях (2.1.40), (2.1.41) считается, что на интервале времени $[t_0 + T_y, t_0 + T_y + T_{пр}]$ сила тяги определяется как:

$$P(t) = P_{раз}, \quad (3.5.7)$$

где $P_{раз}$ – разгонная тяга МД стартующего БЛА.

Тогда модель этапа 2 примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \frac{P - 0,5c_x(\alpha, M_2, y_2)\rho V_2^2 S}{m} - g \sin \theta_2; \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{P + 0,5c_y(\alpha, M_2, y_2)\rho V_2^2 S}{mV_2} - \frac{g}{V_2} \cos \theta_2; \\ \dot{x}_2 &= V_2 \cos \theta_2; \quad \dot{y}_2 = V_2 \sin \theta_2. \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

В этих уравнениях используются выражения (3.5.5) с заменой индекса «1» на индекс «2».

Система уравнений (3.5.8) интегрируется на интервале времени $[t_0 + T_y, t_0 + T_y + T_{пр}]$ при следующих начальных условиях:

$$\begin{aligned} V_2(t_0 + T_y) &= V_1(t_0 + T_y); \quad \theta_2(t_0 + T_y) = \theta_1(t_0 + T_y); \\ x_2(t_0 + T_y) &= x_1(t_0 + T_y); \quad y_2(t_0 + T_y) = y_1(t_0 + T_y). \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

Завершение старта БЛА определяется фазовыми координатами:

$$\begin{aligned} V_{ст} &= V_2(t_0 + T_y + T_{пр}); \quad \theta_{ст} = \theta_2(t_0 + T_y + T_{пр}); \\ x_{ст} &= x_2(t_0 + T_y + T_{пр}); \quad y_{ст} = y_2(t_0 + T_y + T_{пр}). \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

Пример 3.7.

Проведем моделирование воздушного старта БЛА с характеристиками из Табл. 2.1 и Примера 2.1, гипотетически модифицированного под сброс с ЛА-носителя.

Будем считать, что старт осуществляется в момент времени $t_0 = 0$ при нормальных атмосферных условиях ($p = 760$ мм.рт.ст., $\tau = 15^\circ\text{C}$) путем сброса с вертолета-носителя при следующих параметрах его полета:

$$\begin{aligned} V^*(t) &= 72,2 \text{ м/с}; \quad \theta^*(t) = 15 \text{ град}; \quad t \geq 0; \\ x^*(0) &= 13000 \text{ м}; \quad y^*(0) = 3000 \text{ м}. \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

Пусть в процессе старта управление БЛА включается при $T_y = 15$ с. и на проверку его технического состояния затрачивается время $T_{пр} = 30$ с.

Результаты моделирования этапов 1 и 2 воздушного старта рассматриваемого БЛА, полученные путем интегрирования систем уравнений (3.5.4), (3.5.8) с начальными условиями вида (3.5.6), конкретизированными с помощью выражений (3.5.11), а также условий (3.5.9) при $P_{\text{раз}} = 600 \text{ Н}$, представлены в Табл. 3.21.

На Рис. 3.16 приведены графики изменения скорости и угла наклона траектории при воздушном старте БЛА, а также траектории движения ЛА-носителя и БЛА в координатной форме.

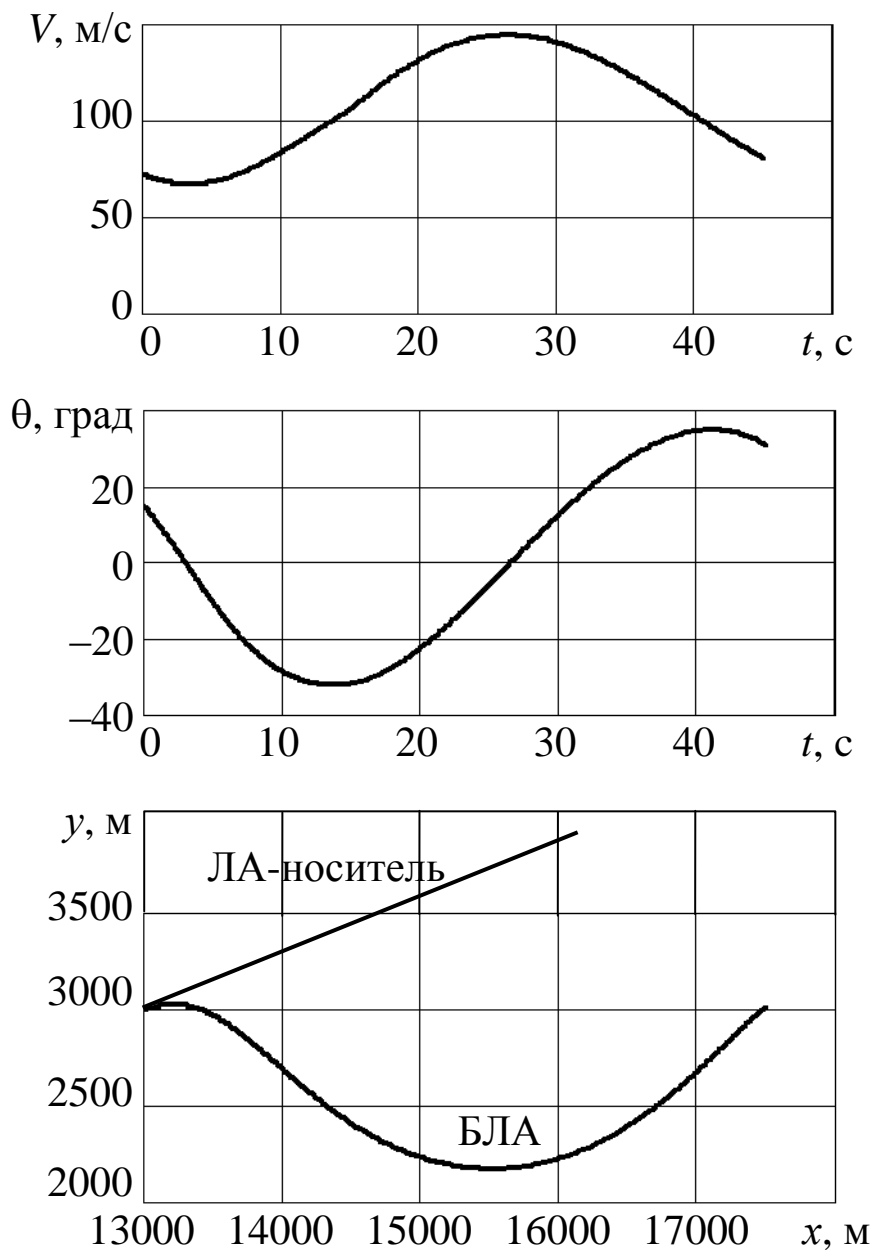


Рис. 3.16

Таблица 3.21

№ этапа	t , с	V , м/с	θ , град	x , м	y , м
1	0	72,2	15	13000	3000
	1	69,699	10,458	13070	3016
	2	68,024	5,455	13140	3025
	3	67,241	0,174	13200	3029
	4	67,372	-5,165	13270	3026
	5	68,395	-10,335	13340	3016
	6	70,246	-15,136	13410	3001
	7	72,825	-19,419	13470	2980
	8	76,016	-23,089	13540	2953
	9	79,693	-26,107	13610	2920
	10	83,736	-28,472	13690	2883
	11	88,031	-30,207	13760	2841
	12	92,476	-31,350	13840	2794
	13	96,978	-31,948	13920	2745
	14	101,455	-32,046	14000	2692
15	105,833	-31,691	14090	2637	
2	15	105,833	-31,691	14090	2637
	17	117,331	-29,247	14280	2524
	19	127,343	-25,028	14500	2411
	21	135,363	-19,439	14750	2312
	23	141,025	-12,859	15010	2234
	25	144,114	-5,665	15290	2188
	27	144,592	1,771	15580	2179
	29	142,588	9,094	15870	2206
	31	138,368	15,997	16140	2267
	33	132,300	22,135	16400	2356
	35	124,797	27,320	16630	2464
	37	116,287	31,313	16840	2582
	39	107,196	33,904	17030	2703
	41	97,949	34,867	17200	2819
43	88,998	33,949	17350	2925	
45	80,863	30,874	17500	3017	

Из Табл. 3.21 следует, что стартовые характеристики (3.5.10) рассматриваемого БЛА имеют следующие значения:

$$t_{\text{ст}} = 45 \text{ с}; \quad V_{\text{ст}} = 80,86 \text{ м/с}; \quad \theta_{\text{ст}} = 30,87^\circ;$$

$$x_{\text{ст}} = 17500 \text{ м}; \quad y_{\text{ст}} = 3017 \text{ м}.$$

При старте БЛА с направляющих ЛА-носителя (способ 2) считается, что в процессе схода с них БЛА и последующего полета выполняются условия (3.5.7). Кроме этого полагается, что в процессе старта БЛА угол атаки $\alpha(t) > 0$.

Моделирование данного способа старта БЛА осуществляется путем решения на интервале времени $[t_0, t_0 + T_y + T_{\text{пр}}]$ системы дифференциальных уравнений вида (3.5.8), в которых опущен индекс «2». Интегрирование этих уравнений с использованием выражений (3.5.5) производится при начальных условиях вида:

$$V(t_0) = V^*(t_0); \quad \theta(t_0) = \theta^*(t_0);$$

$$x(t_0) = x^*(t_0); \quad y(t_0) = y^*(t_0). \quad (3.5.12)$$

В связи с тем, что старт БЛА с такими начальными условиями осуществляется при значениях $P(t) > 0$ и $\alpha(t) > 0$, траектории ЛА-носителя и БЛА могут пересекаться. Поэтому для контроля возможности их столкновения предлагается в каждый момент времени $t \in [t_0, t_0 + T_y + T_{\text{пр}}]$ вычислять величину расстояния между ЛА-носителем и стартующим БЛА по следующей формуле:

$$\delta(t) = \sqrt{\left(x^*(t) - x(t)\right)^2 + \left(y^*(t) - y(t)\right)^2}, \quad (3.5.13)$$

где $x^*(t)$, $y^*(t)$ – результаты интегрирования системы уравнений (3.5.1) с начальными условиями (3.5.2).

Если в некоторый момент времени $\bar{t} \in [t_0, t_0 + T_y + T_{\text{пр}}]$ величина $\delta(\bar{t}) = 0$, то считается что при $t = \bar{t}$ произошло столк-

новение ЛА-носителя и БЛА. В этом случае необходимо изменить значения $P_{\text{разг}}$ и α так, чтобы выполнялось условие:

$$\delta(t) > 0, \quad t \in [t_0, t_0 + T_y + T_{\text{пр}}]. \quad (3.5.14)$$

Пример 3.8.

Пусть старт БЛА в момент времени $t_0 = 0$ при $P_{\text{разг}} = 600$ Н и $\alpha = 2^\circ$ производится с подкрыльевых направляющих самолета-носителя [10] при нормальных атмосферных условиях ($p_0 = 760$ мм.рт.ст., $\tau_0 = 15^\circ\text{C}$). Будем считать, что начальные параметры движения самолета имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} V^*(0) &= 102,7 \text{ м/с}; & \theta^*(0) &= 0^\circ; \\ x^*(0) &= 15000 \text{ м}; & y^*(0) &= 4000 \text{ м}. \end{aligned}$$

При этом предполагается, что:

$$V^*(t) = V^*(0); \quad \theta^*(t) = \theta^*(0); \quad y^*(t) = y^*(0).$$

то есть, носитель выполняет в процессе старта БЛА горизонтальный полет с постоянной скоростью.

Относительно рассматриваемого гипотетического БЛА будем предполагать, что он имеет параметры и характеристики, представленные в Табл. 2.1 и Примере 2.1.

Результаты моделирования старта и движения самолета-носителя при значениях $T_y = 15$ с. и $T_{\text{пр}} = 30$ с. представлены в Табл. 3.22.

Из этой таблицы следует, что условие (3.5.14) выполняется в любой момент времени:

$$0 < t < 45 \text{ с.}$$

На Рис. 3.17 приведены графики зависимостей $V(t)$ и $\theta(t)$ при $t \in [0, 45]$ с. и траектория старта БЛА в координатной форме, построенная по данным представленным в 4-м и 5-м столбцах Табл. 3.22.

Таблица 3.22

t, c	$V, m/c$	$\theta, \text{град}$	x, m	y, m	x^*, m	y^*, m
0	102,7	0	15000	4000	15000	4000
3	107,475	-7,063	15310	3980	15310	4000
6	115,133	-12,472	15640	3922	15620	4000
9	124,511	-15,811	15990	3833	15920	4000
12	134,419	-17,100	16360	3722	16230	4000
15	143,829	-16,591	16760	3600	16540	4000
18	151,939	-14,632	17190	3480	17850	4000
21	158,193	-11,595	17640	3374	17160	4000
24	162,267	-7,841	18120	3292	17460	4000
27	164,056	-3,715	18600	3243	17770	4000
30	163,640	0,471	19100	3229	18080	4000
33	161,254	4,434	19580	3250	18390	4000
36	157,244	7,926	20060	3302	18700	4000
39	152,029	10,738	20520	3378	19010	4000
42	146,072	12,694	20950	3469	19310	4000
45	139,859	13,663	21370	3567	19620	4000

При рассмотрении третьего способа старта БЛА будем считать, что для его вывода в поток из грузового отсека транспортного самолета-носителя применяется специальная парашютная система (СН), включающая в себя вытяжной (ВП) и основной (ОП) парашюты и трос (звено), соединяющий последний с хвостовой частью БЛА.

Также предполагается, что самолет-носитель в процессе старта БЛА совершает полет со скоростью $V^*(t) = \text{const}$ и углом наклона траектории $\theta^*(t) = \text{const} > 0$, $t \geq t_0$. Процесс этого вида старта схематично представлен на Рис. 3.18.

Выделим следующие этапы этого способа старта БЛА:

Этап 1. Выброс в момент времени t_0 из грузового отсека самолета ВП и вытягивание ОП (Рис. 3.18,а).

Этап 2. Наполнение купола ОП системы (Рис. 3.18,б).

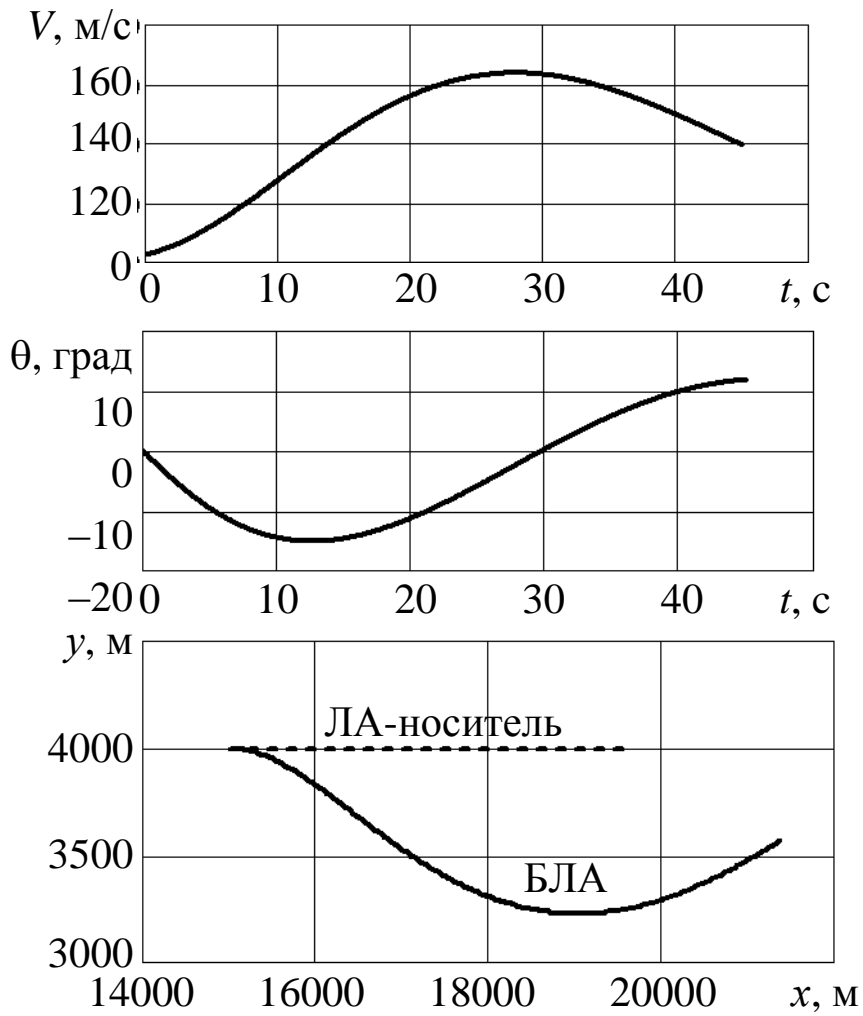


Рис. 3.17

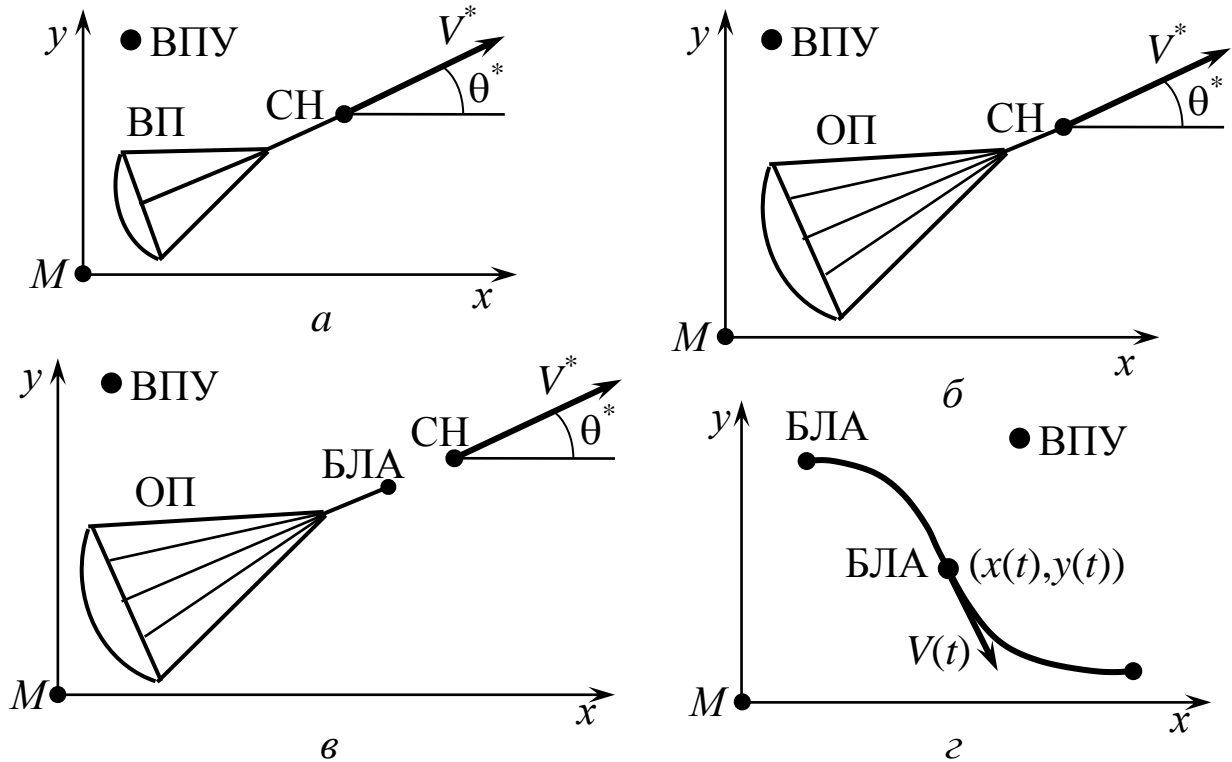


Рис. 3.18

Этап 1. Вытягивание БЛА из грузового отсека самолета-носителя (Рис. 3.18,в).

Этап 2. Отстрел ОП и спуск БЛА с неработающим МД (Рис. 3.18,г).

Этап 3. Включение МД и полет БЛА в зону выполнения задания.

При моделировании этих этапов старта БЛА будем использовать материалы Разд. 3.4 и приведенные выше соотношения, описывающие первый способ старта.

Используя системы уравнений (3.4.11), (3.4.15), (3.5.1) при $\theta_1(t) = \theta^* = \text{const}$ (см. Рис. 3.18), получаем следующую модель этапа 1 рассматриваемого способа воздушного старта БЛА:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -g \sin \theta^* - \Phi_{\text{ВП}} \frac{\rho V_1^2}{2m}; \\ \dot{x}_1 &= V_1 \cos \theta^*; \quad \dot{y}_1 = V_1 \sin \theta^*; \\ \dot{L} &= l; \quad \dot{l} = \frac{2\Phi_{\text{ВП}}\rho V_1^2}{\pi\mu d^2 L}; \\ \dot{x}_1^* &= V^* \cos \theta^*; \quad \dot{y}_1^* = V^* \sin \theta^*. \end{aligned} \tag{3.5.15}$$

В этой системе уравнений и ниже использованы обозначения, принятые в Разд. 3.4. Начальные условия для решения системы уравнений (3.5.15) имеют вид:

$$\begin{aligned} V_1(t_0) &= V^*(t_0); \quad x_1(t_0) = x^*(t_0); \quad y_1(t_0) = y^*(t_0); \\ L(t_0) &= L_0; \quad l(t_0) = 0; \quad x_1^*(t_0) = x_0^*; \quad y_1^*(t_0) = y_0^*. \end{aligned} \tag{3.5.16}$$

где $V^*(t_0)$, $x^*(t_0)$, $y^*(t_0)$ – скорость и координаты самолета-носителя в момент времени t_0 выброса из его грузового отсека вытяжного парашюта и начала вытягивания из укладки основного парашюта.

Данный этап завершается в момент времени t_1 , при котором выполняется условие:

$$L(t_1) = L_{\text{оп}}, \quad (3.5.17)$$

где $L_{\text{оп}}$ – длина вытянутого ОП.

При описании этапа 2 старта будем использовать уравнения (3.4.18) и (3.5.1), которые примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -g \sin \theta^* - \Phi(t, V_2) \frac{\rho V_2^2}{2m}; \\ \dot{x}_2 &= V_2 \cos \theta^*; \quad \dot{y}_2 = V_2 \sin \theta^*; \\ \dot{x}_2^* &= V^* \cos \theta^*; \quad \dot{y}_2^* = V^* \sin \theta^*. \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

Начальные условия для этой системы уравнений запишутся по аналогии с выражениями (3.4.19) как:

$$\begin{aligned} V_2(t_1) &= V_1(t_1); \quad x_2(t_1) = x_1(t_1); \quad y_2(t_1) = y_1(t_1); \\ x_2^*(t_1) &= x_1^*(t_1); \quad y_2^*(t_1) = y_1^*(t_1). \end{aligned} \quad (3.5.19)$$

Задача (3.5.18), (3.5.19) решается на интервале времени $[t_1, t_2]$, где момент времени t_2 завершения этапа 2 определяется из выполнения равенства:

$$u(t_2) = 1. \quad (3.5.20)$$

Здесь вспомогательная функция $u(t)$, как и в Разд. 3.4, имеет следующий вид:

$$u(t) = \frac{tV_2(t)}{nD_{\text{оп}}}. \quad (3.5.21)$$

Третий этап воздушного старта БЛА с использованием уравнений (3.4.21) и (3.5.1) будем описывать моделью:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= -g \sin \theta^* - \Phi_{\text{max}} \frac{\rho V_3^2}{2m}; \\ \dot{x}_3 &= V_3 \cos \theta^*; \quad \dot{y}_3 = V_3 \sin \theta^*; \\ \dot{x}_3^* &= V^* \cos \theta^*; \quad \dot{y}_3^* = V^* \sin \theta^*, \quad t \in [t_2, t_3] \end{aligned} \quad (3.5.22)$$

с начальными условиями:

$$\begin{aligned} V_3(t_2) = V_2(t_2); \quad x_3(t_2) = x_2(t_2); \quad y_3(t_2) = y_2(t_2); \\ x_3^*(t_2) = x_2^*(t_2); \quad y_3^*(t_2) = y_2^*(t_2). \end{aligned} \quad (3.5.23)$$

По аналогии с выражением (3.5.13) введем меру текущего расстояния между БЛА и самолетом-носителем:

$$S(t) = \sqrt{\left(x^*(t) - x_3(t)\right)^2 + \left(y^*(t) - y_3(t)\right)^2}, \quad (3.5.24)$$

Тогда момент времени t_3 завершения этапа 3 определяется из условия вида:

$$S(t_3) \geq S_{\text{без}}, \quad (3.5.25)$$

где $S_{\text{без}}$ – заданная величина безопасного расстояния между летательными аппаратами.

Этап 4 старта БЛА начинается в момент времени $t = t_3$ в точке с фазовыми координатами $V_3(t_3)$, $\theta_3(t_3) = \theta^*$, $x_3(t_3)$, $y_3(t_3)$ и продолжается до момента времени $t_4 = t_3 + T_y$. Для его описания будем использовать выражения (3.5.3)-(3.5.5) с заменой индекса «1» на индекс «4».

Начальные условия полученной модели будут иметь вид:

$$\begin{aligned} V_4(t_3) = V_3(t_3); \quad \theta_4(t_3) = \theta^*; \\ x_4(t_3) = x_3(t_3); \quad y_4(t_3) = y_3(t_3). \end{aligned} \quad (3.5.26)$$

На завершающем пятом этапе рассматриваемого способа старта БЛА применим выражения (3.5.7), (3.5.8) и (3.5.5) с заменой в них индекса «2» на индекс «5».

Полученная система уравнений решается на интервале времени $[t_3 + T_y; t_3 + T_y + T_{\text{пр}}]$ при следующих начальных условиях:

$$\begin{aligned} V_5(t_3 + T_y) = V_4(t_3 + T_y); \quad \theta_5(t_3 + T_y) = \theta_4(t_3 + T_y); \\ x_5(t_3 + T_y) = x_4(t_3 + T_y); \quad y_5(t_3 + T_y) = y_4(t_3 + T_y). \end{aligned} \quad (3.5.27)$$

В результате моделирования процесса данного способа воздушного старта БЛА получаются следующие характеристики:

$$\begin{aligned} t_{\text{ст}} &= t_3 + T_y + T_{\text{пр}}; \\ V_{\text{ст}} &= V_5(t_3 + T_y + T_{\text{пр}}); \quad \theta_{\text{ст}} = \theta_5(t_3 + T_y + T_{\text{пр}}); \quad (3.5.27) \\ x_{\text{ст}} &= x_5(t_3 + T_y + T_{\text{пр}}); \quad y_{\text{ст}} = y_5(t_3 + T_y + T_{\text{пр}}). \end{aligned}$$

Пример 3.9.

Проведем моделирование воздушного старта БЛА с характеристиками из Табл. 2.1 и Примера 2.1 из грузового отсека транспортного самолета, движущегося с набором высоты при $\theta^* = 10^\circ$ со скоростью $V^* = 320 \text{ км/ч} = 88,889 \text{ м/с}$.

Будем считать, что начальный момент времени старта $t_0 = 0 \text{ с}$, и старт производится в заданной маневренной СК Mxy при нормальных атмосферных условиях из следующего начального положения самолета-носителя:

$$x_0^* = 15000 \text{ м}; \quad y_0^* = 3000 \text{ м}.$$

При моделировании этапа 1 примем, что используется ВП и укладка ОП с параметрами:

$$\begin{aligned} c_{x,\text{ВП}} &= 0,86; \quad F_{\text{ВП}} = 1,02 \text{ м}^2; \quad \Phi_{\text{ВП}} = 0,877 \text{ м}^2; \\ \mu &= 1,36 \text{ кг/м}^2; \quad d = 0,25 \text{ м}; \quad L_0 = 0,2 \text{ м}; \quad L_{\text{оп}} = 20 \text{ м}. \end{aligned}$$

Результаты интегрирования системы уравнений (3.5.15) при начальных условиях (3.5.16) до момента времени t_1 выполнения условия (3.5.17) приведены в Табл. 3.23.

Будем считать, что необходимые для моделирования этапов 2 и 3 параметры ОП имеют вид:

$$\begin{aligned} c_{x,\text{оп}} &= 0,81; \quad D_{\text{оп}} = 6 \text{ м}; \quad F_{\text{оп}} = 8 \text{ м}^2; \\ \Phi_{\text{оп}} &= 6,48 \text{ м}^2; \quad m = 2; \quad k = 1,6. \end{aligned}$$

Таблица 3.23

t, c	$V, m/c$	$\theta, \text{град}$	x, m	y, m	L, m	$l, m/c$	x^*, m	y^*, m
0	88,889	10	15000	3000	0,200	0	15000	3000
0,002	88,861	10	15000,179	3000,032	0,698	398,559	15000,179	3000,032
0,004	88,832	10	15000,358	3000,063	1,654	518,185	15000,359	3000,063
0,006	88,804	10	15000,537	3000,095	2,782	578,404	15000,538	3000,095
0,008	88,776	10	15000,717	3000,126	4,008	617,173	15000,717	3000,126
0,010	88,747	10	15000,896	3000,158	5,302	645,275	15000,896	3000,158
0,012	88,719	10	15001,074	3000,189	6,647	667,099	15001,076	3000,190
0,014	88,691	10	15001,253	3000,221	8,032	684,828	15001,255	3000,221
0,016	88,663	10	15001,432	3000,253	9,449	699,692	15001,434	3000,253
0,018	88,635	10	15001,611	3000,284	10,896	712,448	15001,613	3000,284
0,020	88,606	10	15001,790	3000,316	12,366	723,593	15001,793	3000,316
0,023	88,578	10	15001,968	3000,347	13,858	733,469	15001,972	3000,348
0,025	88,550	10	15002,140	3000,379	15,369	742,323	15002,151	3000,379
0,027	88,522	10	15002,325	3000,410	16,898	750,337	15002,330	3000,411
0,029	88,494	10	15002,504	3000,442	18,442	757,649	15002,510	3000,442
0,031	88,466	10	15002,682	3000,473	20	764,365	15002,689	3000,474

Таблица 3.24

t, c	$V, m/c$	$\theta, \text{град}$	x_2, m	y_2, m	u	x_2^*, m	y_2^*, m
0,031	88,466	10	15002,682	3000,473	0,226	15002,689	3000,474
0,038	88,378	10	15003,338	3000,589	0,282	15003,348	3000,590
0,046	88,263	10	15003,993	3000,704	0,337	15004,007	3000,707
0,053	88,119	10	15004,647	3000,819	0,391	15004,666	3000,823
0,061	87,941	10	15005,300	3000,935	0,446	15005,326	3000,939
0,068	87,730	10	15005,951	3001,049	0,500	15005,985	3001,055
0,076	87,482	10	15006,601	3001,164	0,553	15006,644	3001,172
0,083	87,197	10	15007,349	3001,278	0,606	15007,303	3001,288
0,091	86,873	10	15007,894	3001,392	0,658	15007,962	3001,404
0,098	86,510	10	15008,537	3001,505	0,710	15008,622	3001,520
0,106	86,108	10	15009,178	3001,618	0,761	15009,281	3001,636
0,114	85,667	10	15009,814	3001,731	0,811	15009,940	3001,753
0,121	85,187	10	15010,448	3001,842	0,860	15010,599	3001,869
0,129	84,669	10	15011,078	3001,953	0,907	15011,259	3001,985
0,136	84,113	10	15011,704	3002,064	0,954	15011,918	3002,101
0,144	83,522	10	15012,325	3002,173	1	15012,577	3002,218

Решение системы уравнений (3.5.18) с начальными условиями (3.5.19), взятыми из последней строки Табл. 3.23, представлено в Табл. 3.24.

Из этой таблицы следует, что наполнение ОП (этап 2) завершается в момент времени $t_2 = 0,144$ с.

Параметры движения БЛА из самолета-носителя на этапе 3 воздушного старта, описываемые выражениями (3.5.22), (3.5.23), приведены в Табл. 3.25, из которой следует, что вытягивание БЛА из его грузового отсека с помощью ОП при $S_{\text{без}} = 30$ м. закончилось в момент времени $t_3 = 1,123$ с.

Результаты моделирования движения БЛА на этапе 3 при $T_y = 15$ с. представлены в Табл. 3.26.

Параметры движения БЛА при включении МД с тягой $P_{\text{раз}} = 600$ Н. на 15-й секунде при $T_{\text{пр}} = 30$ с. приведены в Табл. 3.27.

На основе данных из этой таблицы получаем следующие значения стартовых характеристик БЛА (см. выражения (3.5.28)):

$$t_{\text{ст}} = 45 \text{ с}; \quad V_{\text{ст}} = 65,039 \text{ м/с}; \quad \theta_{\text{ст}} = 40^\circ;$$
$$x_{\text{ст}} = 19050 \text{ м}; \quad y_{\text{ст}} = 2892 \text{ м}.$$

На Рис. 3.19 представлены графики зависимостей скорости и угла наклона траектории БЛА на интервале времени $[0, 45]$ с, а также вид его траектории на всех этапах воздушного старта.

Таблица 3.25

t, c	$V, m/c$	$\theta, \text{град}$	x_3, m	y_3, m	S, m	x_3^*, m	y_3^*, m
0,144	83,522	10	15012,325	3002,173	0,255	15012,577	3002,218
0,209	78,553	10	15017,534	3003,092	0,771	15018,293	3003,226
0,274	74,129	10	15022,440	3003,957	1,594	15024,010	3004,234
0,340	70,166	10	15027,078	3004,775	2,689	15029,726	3005,241
0,405	66,595	10	15031,473	3005,550	4,030	15035,442	3006,249
0,470	63,359	10	15035,650	3006,286	5,593	15041,159	3007,257
0,535	60,413	10	15039,629	3006,988	7,358	15046,875	3008,265
0,601	57,720	10	15043,426	3007,657	9,307	15052,591	3009,273
0,666	55,247	10	15047,057	3008,297	11,424	15058,308	3010,281
0,731	52,969	10	15050,536	3008,911	13,696	15064,024	3011,289
0,797	50,863	10	15053,874	3009,499	16,112	15069,740	3012,297
0,862	48,909	10	15057,081	3010,065	18,659	15075,457	3013,305
0,927	47,092	10	15060,167	3010,609	21,330	15081,173	3014,313
0,993	45,398	10	15063,140	3011,133	24,115	15086,889	3015,321
1,058	43,814	10	15066,008	3011,639	27,008	15092,606	3016,329
1,123	42,329	10	15068,778	3012,127	30	15098,322	3017,337

Таблица 3.26

t, c	$V_4, m/c$	$\theta, \text{град}$	x_4, m	y_4, m
0,123	42,329	10	15068,778	3012,127
2,048	41,489	-0,693	15107,232	3015,296
2,973	42,348	-11,354	15145,609	3011,204
3,899	44,787	-21,063	15184,127	2999,894
4,824	48,536	-29,257	15223,024	2981,463
5,749	53,278	-35,785	15262,576	2956,063
6,674	58,725	-40,760	15303,111	2923,896
7,599	64,644	-44,394	15345,015	2885,216
8,524	70,857	-46,905	15388,732	2840,333
9,449	77,227	-48,480	15434,759	2879,617
10,374	83,649	-49,271	15483,637	2733,506
11,300	90,037	-49,394	15535,940	2672,515
12,225	96,319	-48,941	15592,261	2607,244
13,150	102,431	-47,985	15653,191	2538,382
14,075	108,315	-46,583	15719,296	2466,713
15	113,917	-44,784	15791,095	2393,120

Таблица 3.27

t, c	$V_5, m/c$	$\theta, \text{град}$	x_5, m	y_5, m
15	113,917	-44,784	15791,095	2393,120
17	128,127	-39,232	15970,829	2230,622
19	139,939	-31,950	16188,835	074,1819
21	148,802	-23,347	16444,719	1939,854
23	154,322	-13,849	16732,185	1842,967
25	156,326	-3,902	17039,300	1794,966
27	154,904	6,039	17350,634	1800,832
29	150,378	15,553	17650,610	1858,189
31	143,243	24,277	17926,693	1958,451
33	143,066	31,918	18171,263	2089,346
35	123,417	38,245	18381,835	2237,646
37	111,814	43,054	18560,089	2391,211
39	99,717	46,122	18710,423	2540,053
41	87,555	47,142	18838,582	2676,566
43	75,790	45,636	18950,644	2795,250
45	65,039	40,859	19052,395	2892,213

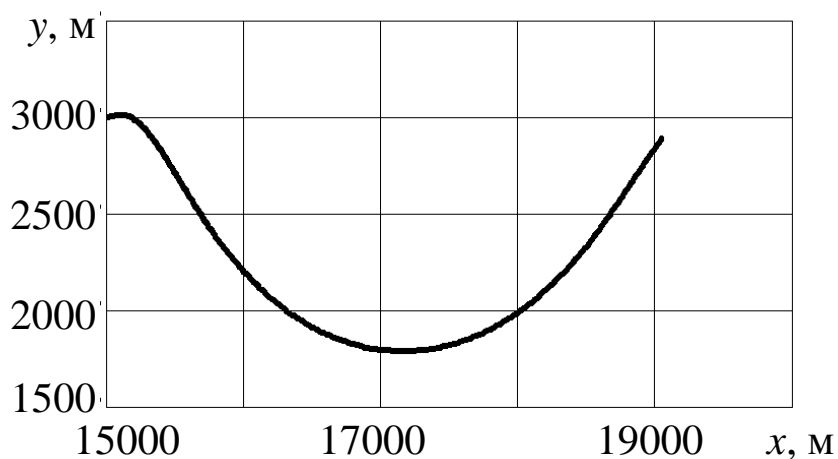
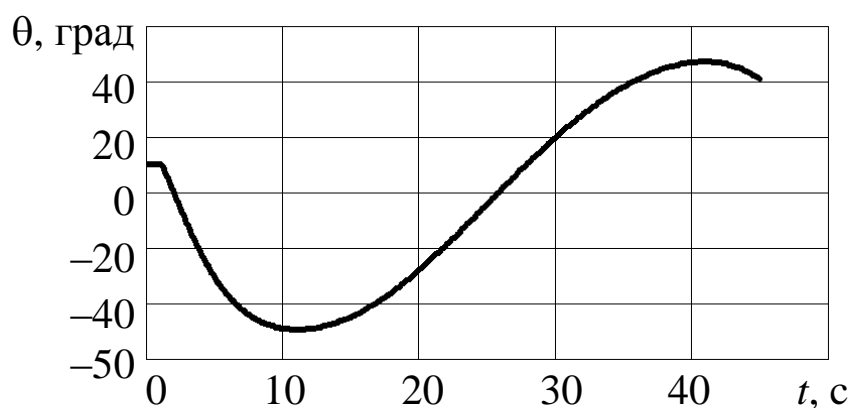
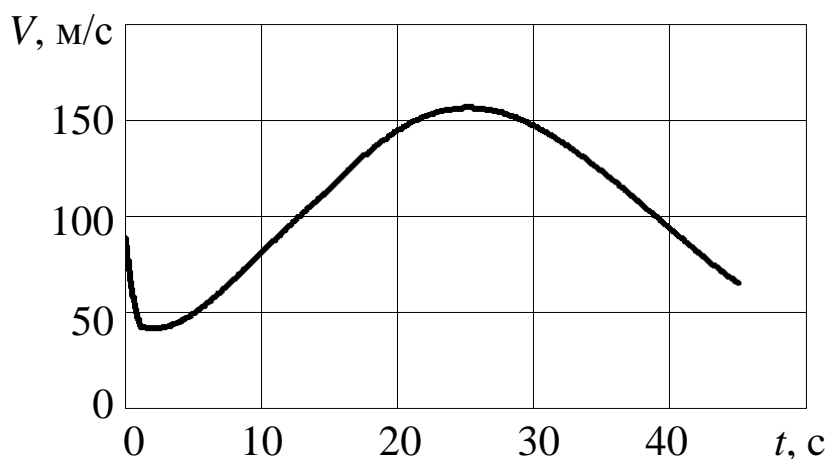


Рис. 3.19

3.6. Вертикальный взлет и посадка беспилотного вертолета

Общие вопросы моделирования процессов взлета и посадки беспилотного вертолета (БВ) одновинтовой схемы были рассмотрены в монографии [9].

В данном разделе будут представлены достаточно простые математические модели вертикального взлета и посадки БВ, которые на наш взгляд являются наиболее приемлемыми для практического использования беспилотной вертолетной техники.

Такие режимы полета БВ свободны от основных недостатков БЛА самолетных схем, которые требуют учета при их взлете возможных столкновений с природными и другими препятствиями (см. Разд. 3.1 и 3.2), а также неопределенность места их приземления (см. Разд. 3.3 и 3.4).

Отметим, что в существующей литературе по пилотируемой вертолетной технике [35, 48, 49 и др.] эти режимы рассматриваются только для случая постоянной скорости набора высоты и снижения.

В предлагаемых моделях взлета и посадки БВ на заданных интервалах времени используется переменная скорость их подъема и спуска, которая подразумевает выход вертолета в режим висения после набора высоты и начало снижения из этого режима. Такие модели не представлены в доступной отечественной и зарубежной литературе.

Будем считать, что взлет и посадка БВ производится в выбранной стартовой СК.

Схема сил, действующих на БВ при реализации этих режимов, приведена на Рис. 3.20.

На этом рисунке приняты следующие обозначения: V – вектор скорости БВ; $T_{\text{нв}}$ – сила тяги несущего винта вертолета; $X_{\text{вр}}$ – сила вредного сопротивления БВ; $G = mg$ – сила тяжести вертолета; $x_{0\text{в}}$, $x_{0\text{п}}$ – координаты соответственно дальности точек взлета и приземления БВ.

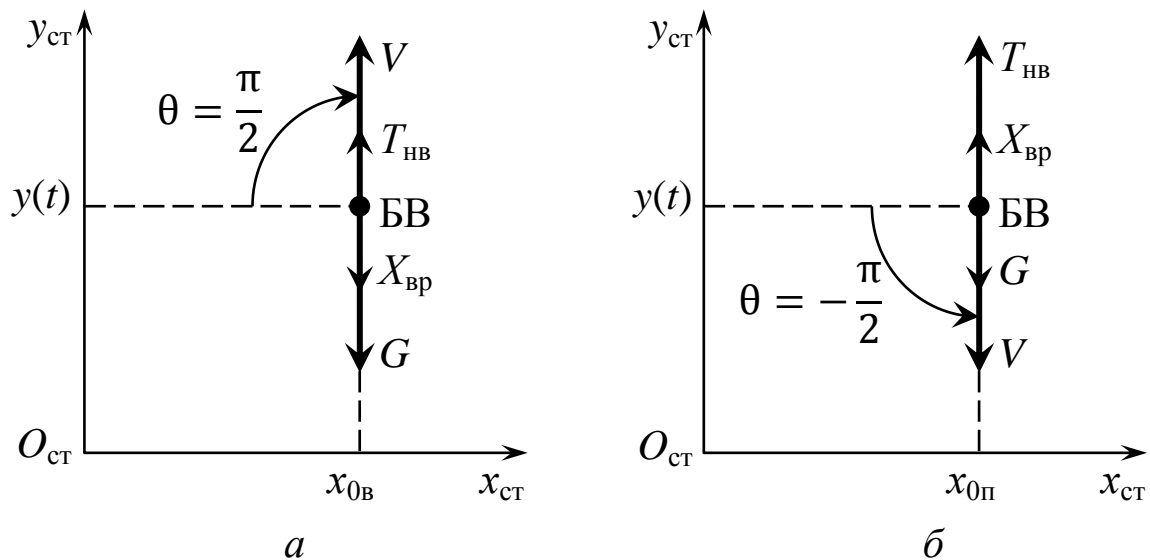


Рис. 3.20

Сформируем модели движения БВ на режимах вертикального взлета и посадки для последующего формирования программного управления их осуществлением.

Будем считать, что взлет БВ завершается режимом его висения, а посадка начинается из этого режима. Выполнение этих условий позволит БВ выполнить в режиме разворота (см. Разд. 2.6) требуемую ориентацию по курсу при его последующем полете и при приземлении.

Вертикальный взлет БВ, осуществляемый на заданном интервале времени $[t_0, t_k]$, характеризуется следующими условиями:

$$\begin{aligned}
 V &= V(t); \quad V(t_0) = 0; \quad V(t_k) = 0; \\
 T_{НВ} &= T_{НВ}(t); \quad T_{рв} = T_{рв}(t); \\
 T_{НВ}(t_0) &\geq G; \quad T_{НВ}(t_k) = G; \\
 x &= x(t) = x_{0В}; \quad y(t_0) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.6.1}$$

Используя схему сил, представленную на Рис. 3.20,а, и формализм второго закона Ньютона [24], запишем основные уравнения динамики взлета БВ вида:

$$\dot{V} = \frac{T_{\text{НВ}} - 0,5\bar{c}_x \rho V^2 F_{\text{НВ}}}{m} - g; \quad (3.6.2)$$

$$\dot{x} = 0; \quad \dot{y} = V, \quad t \in [t_0, t_{\text{к}}].$$

Здесь в первое уравнение системы подставлена формула (2.4.2), описывающая силу $X_{\text{вр}}$ вредного сопротивления БВ.

Эту модель можно получить из уравнений (2.4.3), (2.4.4), (2.4.15) при $\chi = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$.

При вертикальном взлете необходимо обеспечить заданный закон изменения ориентации БВ по курсовому углу $\Psi(t)$, $t \in [t_0, t_{\text{к}}]$.

Обычно такой вид старта вертолета осуществляется при постоянном значении этого угла, т.е. $\Psi(t) = \text{const}$, $t \in [t_0, t_{\text{к}}]$. Тогда сила $T_{\text{рв}}(t)$ тяги РВ должна обеспечить подъем БВ с заданным на стартовой позиции курсовым углом Ψ_0 . При $\Psi_0 = 0$ сила $T_{\text{рв}}$ используется только для компенсации реактивного момента НВ. Для реализации этих требований систему уравнений (3.6.2) необходимо дополнить уравнением (2.4.11).

Таким образом, модель вертикального взлета БВ примет следующий вид:

$$\dot{V} = \frac{T_{\text{НВ}} - 0,5\bar{c}_x \rho V^2 F_{\text{НВ}}}{m} - g;$$

$$\dot{\Psi} = \frac{T_{\text{рв}} L_{\text{рв}} - M_{\text{р}}(y)}{J_y}; \quad (3.6.3)$$

$$\dot{x} = 0; \quad \dot{y} = V.$$

Начальные условия для решения системы дифференциальных уравнений (3.6.3) записываются как:

$$V(t_0) = 0; \quad \Psi(t_0) = \Psi_0; \quad x(t_0) = x_{0\text{в}}; \quad y(t_0) = 0. \quad (3.6.4)$$

В данном режиме полета БВ используется следующий вектор управления:

$$u(t) = (T_{\text{нв}}(t), T_{\text{рв}}(t)), \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (3.6.5)$$

Пример 3.10.

Проведем моделирование вертикального взлета БВ при исходных данных, представленных в Табл. 2.9. Отметим, что здесь и ниже применяется значение коэффициента лобового сопротивления: $\bar{c}_x = 0,095554$ из Табл. 2.9.

Будем считать, что взлет БВ производится на интервале времени $[t_0, t_k] = [0, 30]$ с. из начальной точки $x_{0в} = 500$ м, $y_{0в} = 0$ м. при следующих компонентах вектора управления (3.6.5):

$$T_{\text{нв}}(t) = 27612,501 + 4,594(4,741 \cdot 10^{-3}t^3 - 0,284t^2 + 4,267t)^2 + 27,899t^2 - 1114,416t;$$

$$T_{\text{рв}}(t) = 944,813 - 1,477t, \quad t \in [0, 30] \text{ с.}$$

Результаты интегрирования системы уравнений (3.6.3) с начальными условиями (3.6.4) при $\Psi_0 = 0$ представлены в Табл. 3.29.

Таблица 3.29

$t, \text{ с}$	$V, \text{ м/с}$	$\Psi, \text{ град}$	$x, \text{ м}$	$y, \text{ м}$
0	0	0	500	0
3	10,368	0	500	16,736
6	16,384	0	500	57,856
9	18,816	0	500	111,456
12	18,432	0	500	167,936
15	16,000	0	500	220,000
18	12,288	0	500	262,656
21	8,064	0	500	293,216
24	4,096	0	500	311,296
27	1,152	0	500	318,816
30	0	0	500	320

Из таблицы следует, что в конечный момент времени $t = 30$ с. БВ зависает на высоте 320 м.

На Рис. 3.21 приведены полученные законы изменения скорости $V(t)$ и высоты подъема $y(t)$ вертолета при $t \in [0, 30]$ с.

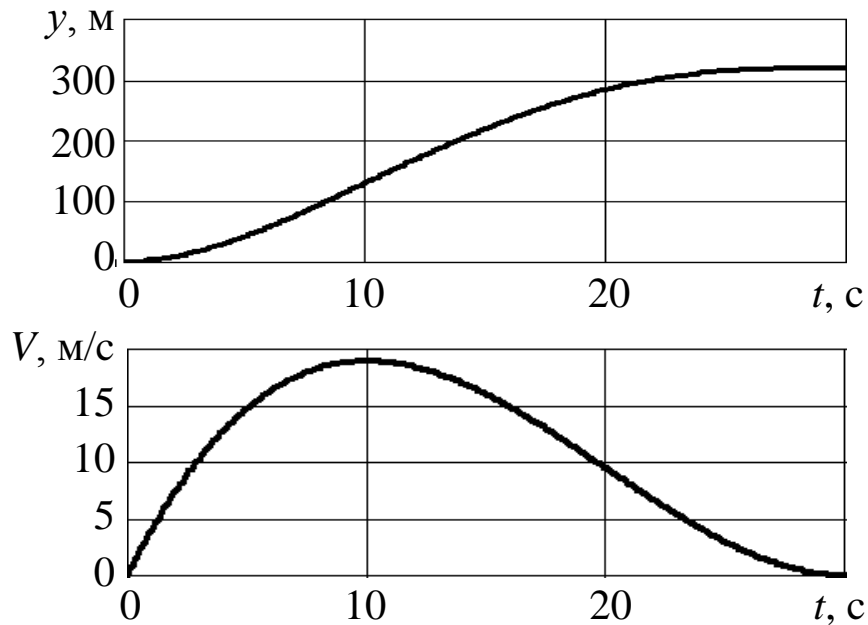


Рис. 3.21

Режим вертикальной посадки БВ, осуществляемый на интервале времени $[t_0, t_k]$ из начальной точки с координатами $(x_{0п}, y_{0п})$ реализуется при условиях вида (3.6.1) со следующими изменениями:

$$T_{\text{НВ}}(t_0) = G; \quad x = x(t_0) = x_{0п}; \quad y(t_0) = y_{0п}; \quad y(t_k) = 0.$$

Используя расчетную схему, представленную на Рис. 3.20,б, получаем модель процесса посадки БВ вида:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{-T_{\text{НВ}} - 0,5c_x \rho V^2 S}{m} + g; \\ \dot{\Psi} &= \frac{T_{\text{рв}} L_{\text{рв}} - M_p(y)}{J_y}; \\ \dot{x} &= 0; \quad \dot{y} = -V, \quad t \in [t_0, t_k]. \end{aligned} \tag{3.6.6}$$

Система (3.6.6) также получается из уравнений (2.4.3), (2.4.4) и (2.4.15) при значениях $\chi = \pi$, $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

Начальные условия для системы уравнений (3.6.6) записываются как:

$$V(t_0) = 0; \quad \Psi(t_0) = \Psi_0; \quad x(t_0) = x_{0п}; \quad y(t_0) = y_{0п}. \quad (3.6.7)$$

Отметим, что при выполнении посадки используется вектор управления БВ вида (3.6.5).

Пример 3.11.

Рассмотрим процесс вертикальной посадки БВ при исходных данных из Табл. 2.9.

Будем считать, что посадка БВ начинается в момент времени $t_0 = 60$ с. из режима висения в точке $(x_{0п}, y_{0п}) = (600; 400)$ м. при $\Psi_0 = 0$ и должна завершиться в момент времени $t_k = 104$ с. в точке с координатами $(600; 0)$ м.

При посадке БВ на заданном интервале времени используются управления вида:

$$T_{нв}(t) = -37363,05 - 4,594(1,231 \cdot 10^{-3}t^3 - 0,331t^2 + 28,850t - 805,488)^2 - 7,239t^2 + 1298,844t;$$

$$T_{рв}(t) = 822,533 + 1,257t, \quad t \in [60, 104].$$

Определение вида компонент векторов $u(t)$ управления взлетом и посадкой БВ вида (3.6.5) осуществляется методами, изложенными в Главе 5.

Результаты решения задачи (3.6.6), (3.6.7) представлены в Табл. 3.30.

Из этой таблицы следует, что при $t = 104$ с. значения скорости и высоты снижения БВ практически равны нулю. Динамика этих характеристик в процессе посадки БВ приведена на Рис. 3.22.

Таблица 3.30

t, c	$V, m/c$	$\Psi, \text{град}$	x, m	y, m
60	0	0	600	400
64,4	8,682	0	600	379,736
68,8	13,757	0	600	328,891
73,2	15,854	0	600	262,770
77,6	15,604	0	600	192,816
82,0	13,634	0	600	127,979
86,4	10,573	0	600	74,439
90,8	7,052	0	600	35,610
95,2	3,968	0	600	12,138
99,6	1,141	0	600	1,898
104	0,010	0	600	0,009

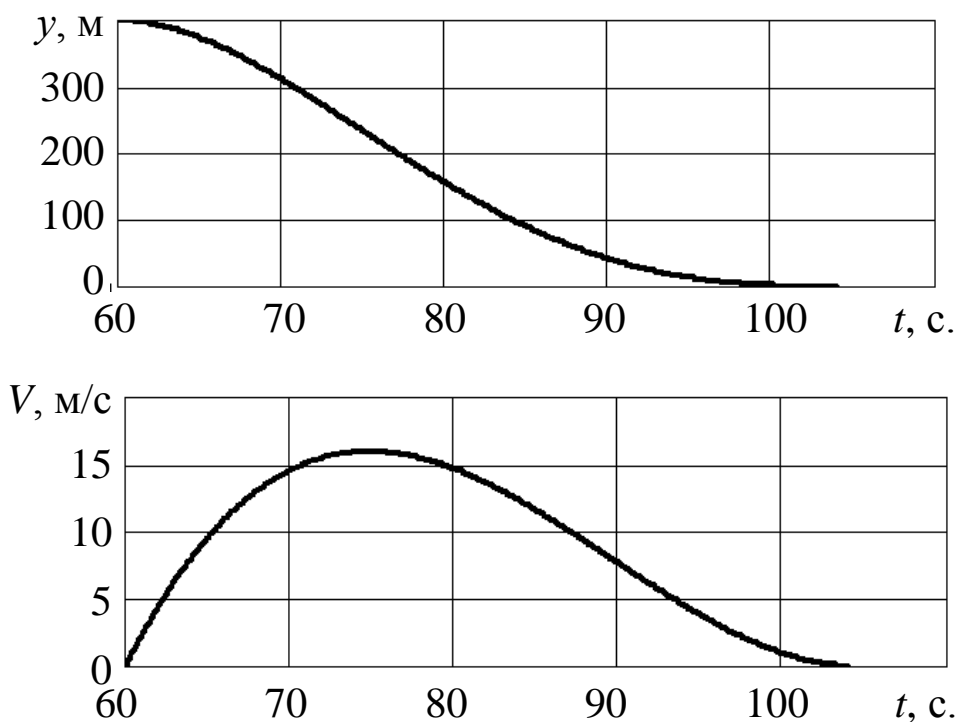


Рис. 3.22

Отметим, что другие виды взлета и посадки БВ, приведенные в работе [9], требуют использования достаточно сложных моделей, указания видов используемых траекторий и трудоемкого расчета соответствующих векторов управления $u = u(t)$, $t \in [t_0, t_k]$.

Глава 4. МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ ТРЕБУЕМЫХ СКОРОСТЕЙ И ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ БЛА

В данной главе рассматриваются задачи определения скоростей и траекторий БЛА самолетных и вертолетной схем, требуемых для выполнения соответствующих полетных заданий.

При этом постулируется, что формируемая траектория БЛА самолетных схем должна быть задана одной или несколькими непрерывными кривыми без точек разрыва их координат и производных (кривые второй степени гладкости [36]). Такой подход существенно отличается от существующего в настоящее время подхода задания траекторий движения таких БЛА с использованием поворотных пунктов маршрута (ППМ) и характерных точек траектории (ХТТ), в которых присутствуют разрывы производной.

На практике для ликвидации таких разрывов используются специальные законы управления, реализованные в САУ БЛА. Заметим, что разработка и, главное, наземная и летная отработка этих законов является весьма трудоемким процессом [40].

Реализация предложенного подхода к формированию траекторий БЛА самолетных схем позволит отказаться от таких законов и формировать для них полностью программное управление на всех этапах выполнения полетных заданий. Последнее позволит значительно упростить САУ БЛА, реализовав в их составе только законы стабилизации программного движения центра масс БЛА и угловых движений вокруг этого центра (см. Рис. 1.9).

Как следует из Раздела 2.4, для БЛА вертолетной схемы требование гладкости траекторий специальных режимов его полета может не соблюдаться.

Материал этой главы основан на результатах, изложенных в монографии [9], доработанных и дополненных большим числом примеров. Отметим, что в приведенных примерах были использованы условные исходные данные.

4.1. Определение требуемых скоростей полета БЛА

Установившиеся режимы полетов БЛА (см. Разд. 2.3) на практике реализуется с постоянной скоростью, равной их крейсерской скорости $V_{кр}$.

На отдельных участках их траекторий могут использоваться значения минимальной V_{min} и максимальной V_{max} скоростей полета рассматриваемого БЛА.

Для неустановившихся режимов полета БЛА в существующей литературе практически отсутствуют методы формирования требуемых законов (профилей) изменения во времени скорости $V = V(t)$, $t \in [t_0, t_k]$.

Рассмотрим различные подходы к решению этой задачи, которые в последующем будут использованы при описании требуемых траекторий полета БЛА самолетных и вертолетных схем и формировании программного управления их движением по таким траекториям.

Простейшим законом изменения скорости $V(t)$ БЛА на интервале времени $[t_0, t_k]$ от значения V_0 до значения V_k является закон его равноускоренного (равнозамедленного) движения [24], который описывается выражением вида:

$$V(t) = V_0 + \frac{V_k - V_0}{t_k - t_0} (t - t_0), \quad t \in [t_0, t_k].$$

Из этой формулы следует, что:

$$V(t_0) = V_0; \quad V(t_k) = V_k.$$

При этом ускорение БЛА на рассматриваемом интервале времени будет равно:

$$\dot{V}(t) = \frac{V_{\text{к}} - V_0}{t_{\text{к}} - t_0} = \text{const}, \quad t \in [t_0, t_{\text{к}}].$$

Будем считать заданной длину L траектории движения БЛА на интервале времени $[t_0, t_{\text{к}}]$.

Для каждого рассматриваемого БЛА, который осуществляет полет на интервале времени $[t_0, t_{\text{к}}]$ будем использовать известное из теоретической механики [24] соотношение:

$$\int_{t_0}^{t_{\text{к}}} V(t) dt = L. \quad (4.1.1)$$

Здесь $V(t)$ – искомый закон изменения скорости БЛА в момент времени $t \in [t_0, t_{\text{к}}]$.

Для случая, когда БЛА должен двигаться с постоянной заданной скоростью $V(t) = V_{\text{зад}} = \text{const}$, $t \in [t_0, t_{\text{к}}]$, проводя интегрирование левой части этого соотношения, имеем:

$$V_{\text{зад}}(t_{\text{к}} - t_0) = L.$$

Откуда получаем известную формулу скорости равномерного движения вида:

$$V = \frac{L}{t_{\text{к}} - t_0}. \quad (4.1.2)$$

На практике существуют случаи, когда для БЛА требуется обеспечить заданные значения его скорости в начальный и конечный моменты времени определенного режима его полета.

Эти требования запишутся как:

$$V(t_0) = V_0; \quad V(t_{\text{к}}) = V_{\text{к}}. \quad (4.1.3)$$

При $V_0 \neq V_{\text{к}}$ БЛА для выполнения условий (4.1.1) и (4.1.3) должен иметь переменную скорость его полета.

Для определения закона изменения скорости БЛА $V(t); t \in [t_0, t_k]$, удовлетворяющего условию (4.1.1) при заданном значении L , будем использовать две вспомогательные изопараметрические задачи вариационного исчисления [9].

Запишем функционал задачи 1 в следующем виде:

$$J^{(1)} = \int_{t_0}^{t_k} \dot{V}^2 dt \rightarrow \min, \quad (4.1.4)$$

где $\dot{V} = \dot{V}(t)$ – ускорение движения БЛА в момент времени $t \in [t_0, t_k]$.

Такой вид функционала (4.1.4) объясняется тем, что величина действующей на БЛА перегрузки пропорциональна текущему значению ускорения его движения [8, 9].

Решаемая вариационная задача имеет следующую формулировку: «Найти функцию $V(t)$, доставляющую минимум функционалу (4.1.4) при удовлетворении условиям (4.1.3) и (4.1.1)».

Для простоты и наглядности решения задачи перепишем ее в следующей форме:

$$J^{(1)} = \int_{t_0}^{t_k} \dot{V}^2 dt \rightarrow \min; \quad (4.1.5)$$

$V(t)$

$$\int_{t_0}^{t_k} V dt = L; \quad (4.1.6)$$

$$V(t_0) = V_0; \quad V(t_k) = V_k. \quad (4.1.7)$$

Согласно работе [9] общее решение этой задачи имеет вид:

$$V(t) = \frac{\lambda}{4} t^2 + C_1 t + C_2, \quad (4.1.8)$$

где $\lambda = \text{const}$ – множитель Лагранжа; C_1, C_2 – постоянные интегрирования уравнения Эйлера [9].

Определим эти постоянные с использованием выражений (4.1.8) и (4.1.7) из следующих соотношений:

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{4}t_0^2 + C_1t_0 + C_2 &= V_0; \\ \frac{\lambda}{4}t_K^2 + C_1t_K + C_2 &= V_K.\end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, имеем:

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{(V_K - V_0) - 0,25\lambda(t_K^2 - t_0^2)}{t_K - t_0}; \\ C_2 &= V_0 - 0,25\lambda t_0^2 - \frac{(V_K - V_0) - 0,25\lambda(t_K^2 - t_0^2)}{t_K - t_0}t_0.\end{aligned}\tag{4.1.9}$$

Подставляя выражения (4.1.9) в формулу (4.1.8) и проводя несложные преобразования, получим:

$$\begin{aligned}V(t) &= 0,25\lambda t^2 + \\ &+ \frac{(V_K - V_0) - 0,25\lambda(t_K^2 - t_0^2)}{t_K - t_0}(t - t_0) + V_0 - 0,25\lambda t_0^2.\end{aligned}\tag{4.1.10}$$

Множитель λ определим, подставляя выражение (4.1.10) в левую часть условия (4.1.6):

$$\begin{aligned}0,25\lambda \int_{t_0}^{t_K} t^2 dt + \frac{V_K - V_0}{t_K - t_0} \int_{t_0}^{t_K} (t - t_0) dt - \\ - \frac{0,25\lambda(t_K^2 - t_0^2)}{t_K - t_0} \int_{t_0}^{t_K} (t - t_0) dt + \\ + V_0 \int_{t_0}^{t_K} dt - 0,25\lambda t_0^2 \int_{t_0}^{t_K} dt = L.\end{aligned}$$

Вычисляя входящие в это выражение интегралы, и разрешая полученное равенство относительно искомого множителя

Лагранжа, после соответствующих преобразований получаем выражение вида:

$$\lambda = \frac{24L + 12(3V_0 - V_K)(t_K - t_0)}{2(t_K^3 - t_0^3) - 3(t_K + t_0)(t_K - t_0)^2 - 6t_0^2(t_K - t_0)}. \quad (4.1.11)$$

Таким образом, для БЛА при заданных граничных условиях по скорости вида (4.1.3) закон $V(t)$, $t \in [t_0, t_K]$ изменения его скорости определяется по формулам (4.1.11) и (4.1.10).

В работе [22] рассмотрена другая задача определения закона изменения скорости $V(t)$, основанная на модификации классической вариационной задачи Дидоны.

Задача 2 для определения скорости $V(t)$ рассматриваемого БЛА записывается как:

$$J^{(2)} = \int_{t_0}^{t_K} \sqrt{1 + \dot{V}^2(t)} dt \rightarrow \min_{V(t)};$$

$$\int_{t_0}^{t_K} V(t) dt = L;$$

$$V(t_0) = V_0; \quad V(t_K) = V_K.$$

Предлагаемый функционал $J^{(2)}$ в отличие от выражения (4.1.5) описывает требование минимального изменения (вариативности) искомой скорости $V(t)$ полета БЛА на интервале времени $[t_0, t_K]$ при удовлетворении условиям (4.1.6) и (4.1.7).

Решение этой задачи подробно описано в монографии [22]. В результате получаем два варианта искомой экстремали:

$$V_1(t) = c_2^{(1)} + \sqrt{R^2 - (t - c_1^{(1)})^2}, \quad t \in [t_0, t_K];$$

$$V_2(t) = c_2^{(2)} + \sqrt{R^2 - (t - c_1^{(2)})^2}, \quad t \in [t_0, t_K].$$

Здесь $c_1^{(1)}$, $c_1^{(2)}$ и $c_2^{(1)}$, $c_2^{(2)}$ – корни системы нелинейных уравнений:

$$(t_0 - c_1)^2 + (V_0 - c_0)^2 = R^2;$$

$$(t_k - c_1)^2 + (V_k - c_0)^2 = R^2.$$

Входящий в эту систему параметр R определяется из решения нелинейного уравнения вида:

$$R^2 \arcsin \frac{d}{2R} - 0,25\sqrt{4R^2 - d^2} = L - 0,5(t_k - t_0)(V_0 + V_k),$$

где $d = \sqrt{(t_k - t_0)^2 + (V_k - V_0)^2}$.

Из этих вариантов в качестве оптимального закона $V(t)$ изменения скорости БЛА выбирается зависимость, доставляющая минимальное значение функционалу $J^{(2)}$ решаемой задачи при удовлетворении всех ее ограничений.

Рассмотрим пример использования предлагаемых вариационных задач 1 и 2 для определения скорости $V(t)$ рассматриваемого БЛА. Отметим, что для простоты их решения были использованы условные единицы измерения времени полета и скорости БЛА.

Пример 4.1.

Пусть некоторый БЛА на интервале времени $[t_0, t_k] = [0; 0,5]$ ч. на траектории длиной $L = 80$ км должен осуществить разгон от скорости $V_0 = 80$ км/ч. до скорости $V_k = 150$ км/ч.

Вычисление по формулам (4.1.11) и (4.1.10) дает следующий закон изменения его скорости:

$$V(t) = -4920t^2 + 2600t + 80, \quad t \in [0; 0,5] \text{ ч.}$$

Результаты вычисления по этой формуле с шагом $\Delta t = 0,05$ ч. = 3 мин приведены в Табл. 4.1 и Рис. 4.2.

Значение функционала (4.1.4) для этой экстремали будет равно:

$$J_k^{(1)} = 1018400.$$

Таблица 4.1

№	t , ч.	$V(t)$, км/ч.
1	0	80
2	0,05	197,7
3	0,10	290,8
4	0,15	359,3
5	0,20	403,2
6	0,25	422,5
7	0,30	417,2
8	0,35	387,3
9	0,40	332,8
10	0,45	253,7
11	0,50	150,0

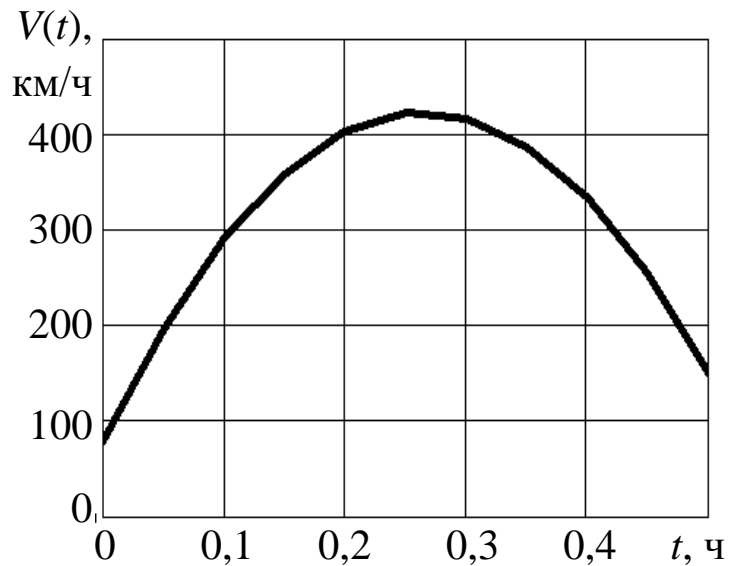


Рис. 4.1

Определим для последующего анализа длину дуги полученной кривой $V(t)$:

$$\int_0^{0,5} \sqrt{1 + (\dot{V}(t))^2} = 616,993.$$

Построим закон изменения скорости БЛА путем решения вариационной задачи 2.

Решение этой задачи дает следующие варианты законов изменения скорости БЛА [22]:

$$V(t) = -97,762 \pm \sqrt{100,878^2 - (t - 18,876)^2};$$

$$V(t) = 101,596 \pm \sqrt{100,878^2 - (t - 11,124)^2}.$$

В первом варианте в связи с тем, что функция $V(t)$ должна быть неотрицательна, имеем:

$$V_1(t) = \sqrt{100,878^2 - (t - 18,876)^2} - 97,762.$$

Показано [22], что для второго варианта при знаке «плюс» перед радикалом не выполняются заданные граничные условия задачи. Поэтому будем рассматривать функцию вида:

$$V_2(t) = 101,596 - \sqrt{100,878^2 - (t - 11,124)^2}.$$

По предположению [22] функция $V(t)$ должна быть выпуклой на интервале времени $[t_0, t_k]$.

Показано, что:

$$\ddot{V}_1(t) < 0; \quad \ddot{V}_2(t) > 0, \quad t \in [0; 30],$$

то есть функция $V_2(t)$ является вогнутой функцией.

Кроме этого, проводя проверку интегрального ограничения вариационной задачи для функций $V_1(t)$ и $V_2(t)$, имеем:

$$\int_0^{30} V_1(t) dt = 80,005 \cong L; \quad \int_0^{30} V_2(t) dt = 34,995 \neq L.$$

Таким образом, оптимальным законом изменения скорости БЛА является функция вида:

$$V(t) = \sqrt{100,878^2 - (t - 18,876)^2} - 97,762, \quad t \in [0; 30] \text{ мин.}$$

Значение функционала $J^{(2)}$ для этой экстремали будет равно:

$$J^{(2)} = \int_0^{30} \sqrt{1 + \dot{V}^2(t)} dt = 30,135.$$

Для полученной экстремали значение функционала вариационной задачи 1 определяется как:

$$J^{(1)} = \int_0^{30} \dot{V}^2(t) dt = 0,27.$$

Из сопоставления результатов использования двух вариационных задач следует, что вторая из них дает для использованных исходных данных менее изменчивый закон изменения скорости БЛА. Это иллюстрирует сравнение данных Табл. 4.1 и Табл. 4.2, а также видов графиков на Рис. 4.1 и Рис. 4.2.

Таблица 4.2

t , мин.	V , км/мин	t , ч.	V , км/ч
0	1,333	0	80
2,5	1,777	0,042	106,621
5,0	2,156	0,083	129,373
7,5	2,472	0,125	148,298
10,0	2,724	0,167	163,433
12,5	2,913	0,208	174,806
15,0	3,041	0,250	182,440
17,5	3,106	0,292	186,346
20,0	3,109	0,333	186,534
22,0	3,050	0,375	183,004
25,0	2,929	0,417	175,748
27,5	2,746	0,458	164,754
30,0	2,500	0,500	150,000

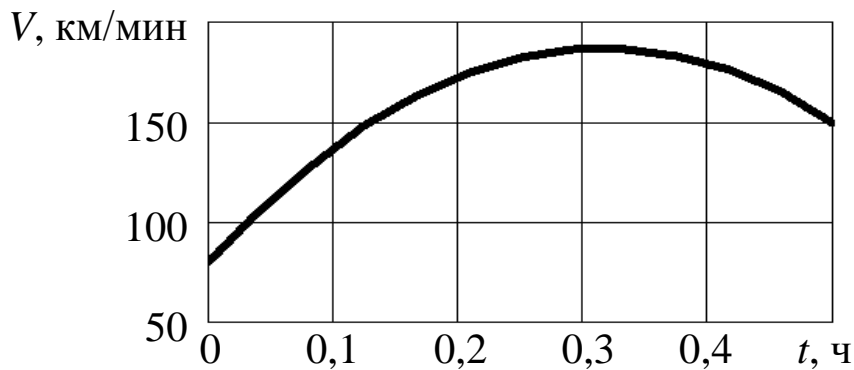


Рис. 4.2

Отметим, что при формировании требуемых законов изменения скорости $V(t)$ БЛА необходимо учитывать ограничения вида:

$$V_{\min} \leq V(t) \leq V_{\max}, \quad t \in [t_0, t_k],$$

где V_{\min} и V_{\max} – соответственно значения минимальной и максимальной эксплуатационной скорости рассматриваемого БЛА.

При нарушении этого условия закон изменения скорости $V(t)$ определяется с использованием принципа максимума

Л.С. Понтрягина, учитывающего двусторонние ограничения на искомое оптимальное управление [9].

Рассмотрим методы формирования требуемых законов изменения скорости $V = V(t)$ для некоторых специальных режимов полета беспилотных вертолетов (БВ).

В режиме торможения БВ на интервале времени $[t_0, t_k]$ с зависанием в конечном моменте времени t_k , описанном в Разд. 2.4, для его текущей скорости $V(t)$ должны выполняться условия вида:

$$V(t_0) > 0; \quad V(t_k) = 0; \quad \dot{V}(t_k) = 0. \quad (4.1.12)$$

Искомую зависимость $V = V(t)$ будем формировать в виде полинома:

$$V(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2, \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (4.1.13)$$

Пусть БВ начинает режим торможения со скорости:

$$V(t_0) = V_0. \quad (4.1.14)$$

Тогда значения коэффициентов a_0, a_1, a_2 полинома (4.1.13) будем определять из системы линейных алгебраических уравнений, сформированной с использованием условий (4.1.12), (4.1.14):

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 t_0 + a_2 t_0^2 &= V_0; \\ a_0 + a_1 t_k + a_2 t_k^2 &= 0; \\ a_1 + 2a_2 t_k &= 0. \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

Для режима разгона БВ на интервале времени $[t_0, t_k]$ из состояния висения при $t = t_0$ для представления закона изменения его скорости будем использовать полином вида:

$$V(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (4.1.16)$$

Такой полином выбран для выполнения следующих условий реализации рассматриваемого режима:

$$V(t_0) = V_0; \quad \dot{V}(t_0) = 0; \quad V(t_k) = V_{\text{зад}}; \quad \dot{V}(t_k) = 0. \quad (4.1.17)$$

Из этих условий вытекает следующая система уравнений для определения коэффициентов полинома (4.1.16):

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 t_0 + a_2 t_0^2 + a_3 t_0^3 &= 0; \\ a_1 + 2a_2 t_0 + 3a_3 t_0^2 &= 0 \\ a_0 + a_1 t_{\text{к}} + a_2 t_{\text{к}}^2 + a_3 t_{\text{к}}^3 &= V_{\text{зад}}; \\ a_1 + 2a_2 t_{\text{к}} + 3a_3 t_{\text{к}}^2 &= 0. \end{aligned} \tag{4.1.18}$$

Решение приведенных выше систем линейных уравнений осуществляется одним из численных методов, рассмотренных в работе [9].

Пример 4.2.

Сформируем требуемый закон изменения скорости движения БВ в режиме торможения вида (4.1.13) для исходных данных Примеров 2.6 и 2.7.

При рассмотрении движения БВ на интервале времени $[0, 60]$ с. условия (4.1.14) и (4.1.12) будут иметь вид:

$$V(0) = 72,2 \text{ м/с}; \quad V(60) = \dot{V}(60) = 0.$$

Тогда система уравнений (4.1.15) для определения коэффициентов a_0, a_1, a_2 запишется как:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 &= 72,2; \\ a_0 + a_1 \cdot 60 + a_2 \cdot 60^2 &= 0; \\ a_1 + 2a_2 \cdot 60^2 &= 0. \end{aligned}$$

Решения этой системы уравнений имеют вид:

$$a_0 = 72,2; \quad a_1 = -2,407; \quad a_2 = 0,020.$$

Подставляя их в выражение (4.1.13), получаем искомый закон вида:

$$V(t) = 72,2 - 2,407t + 0,020t^2, \quad t \in [0, 60] \text{ с.}$$

Результаты расчетов значений $V(t)$ и $\dot{V}(t)$ представлены в Табл. 4.3 и на Рис. 4.3.

Таблица 4.3

$t, \text{с.}$	$V, \text{м/с}$	$\dot{V}, \text{м/с}^2$
0	72,20	-2,407
6	64,98	-2,166
12	57,76	-1,925
18	50,54	-1,685
24	43,32	-1,444
30	36,10	-1,203
36	28,88	-0,963
42	21,66	-0,722
48	14,44	-0,481
54	7,22	-0,241
60	0	0

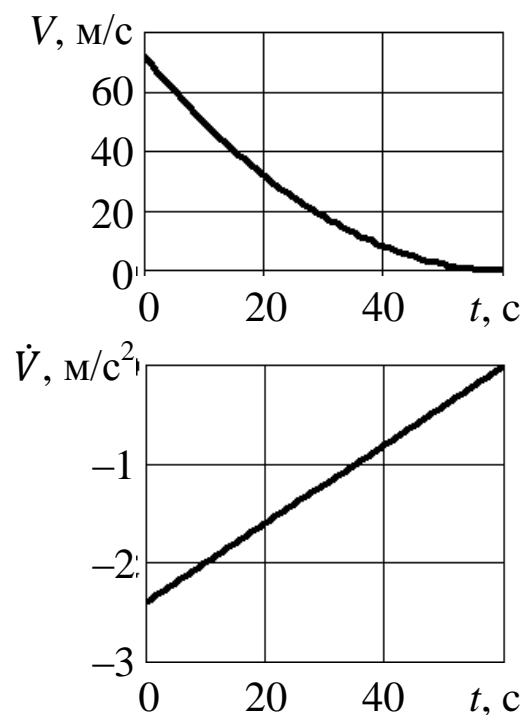


Рис. 4.3

Из полученных данных следует, что условия (4.1.12) и (4.1.14) полностью выполняются.

Сформируем закон изменения скорости $V(t)$ в процессе разгона БВ на интервале времени $[118,594; 148,594]$ с. от нулевой скорости до скорости $V_{\text{зад}} = 72,2$ м/с (см. Пример 2.10).

Решая систему уравнений (4.1.18), получаем следующий вид полинома (4.1.16):

$$V(t) = 1,231 \cdot 10^4 - 282,74t + 2,143t^2 - 5,348 \cdot 10^{-3}t^3.$$

Значения и графики функций $V(t)$ и $\dot{V}(t)$ при $t \in [118,6; 148,6]$ с. представлены в Табл.4.4 и на Рис. 4.4.

В режиме вертикального взлета БВ считаются заданными момент времени t_0 начала взлета и значение высоты $h_{\text{в}}$, которую БВ должен набрать в неизвестный конечный момент времени $t_{\text{к}}$.

Будем считать заданной величину максимальной вертикальной скорости V_y для рассматриваемого образца БВ.

Таблица 4.4

$t, c.$	$V, м/с$	$\dot{V}, м/с^2$
118,594	0	0
120,594	0,920	0,898
122,594	3,508	1,669
124,594	7,509	2,310
126,594	12,664	2,824
128,594	18,719	3,209
139,594	25,414	3,466
132,594	32,495	3,594
134,594	39,705	3,594
136,594	46,786	3,466
138,594	53,481	3,209
140,594	59,536	2,824
142,594	64,691	2,310
144,594	68,692	1,669
146,594	71,280	0,898
148,594	72,2	0

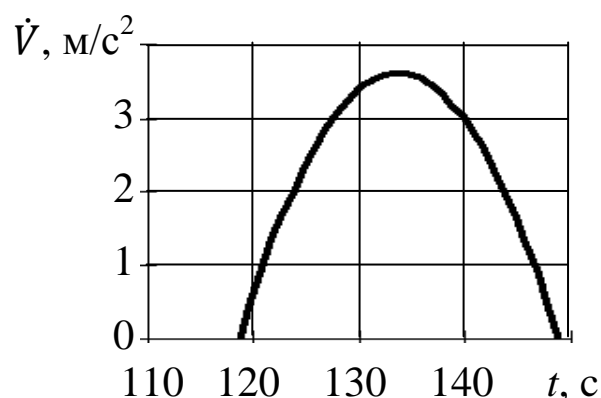
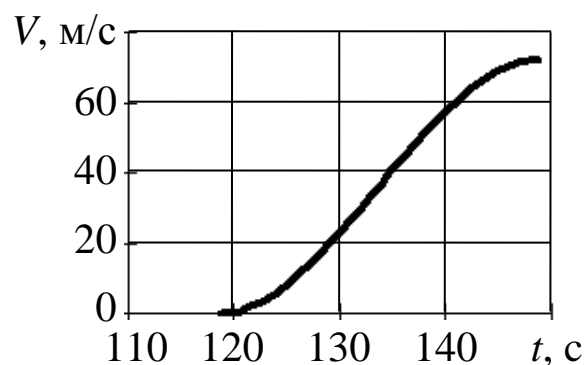


Рис. 4.4

Для формирования искомого закона изменения скорости $V(t)$ при взлете БВ предлагается использовать полином вида:

$$V(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4, \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (4.1.19)$$

С использованием выражения (4.1.1) условие достижения БВ заданной высоты запишется как:

$$\int_{t_0}^{t_k} V(t) dt = h_B.$$

Подставляя в левую часть этой формулы выражение (4.1.19) и вычисляя определенный интеграл, получим равенство вида:

$$\begin{aligned} & a_0(t_k - t_0) + \frac{a_1}{2}(t_k^2 - t_0^2) + \frac{a_2}{3}(t_k^3 - t_0^3) + \\ & + \frac{a_3}{4}(t_k^4 - t_0^4) + \frac{a_4}{5}(t_k^5 - t_0^5) = h_B. \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

Будем считать, что скорость $V(t)$ будет равна V_y в момент времени $t = (t_0 + t_k)/2$. Это условие формализуется следующим выражением:

$$a_0 + a_1 \left(\frac{t_0 + t_k}{2} \right) + a_2 \left(\frac{t_0 + t_k}{2} \right)^2 + a_3 \left(\frac{t_0 + t_k}{2} \right)^3 + a_4 \left(\frac{t_0 + t_k}{2} \right)^4 + a_5 \left(\frac{t_0 + t_k}{2} \right)^5 = V_y. \quad (4.1.21)$$

Условия равенства нулю скорости и ускорения БВ в начале и в конце процесса его взлета записываются как:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 t_0 + a_2 t_0^2 + a_3 t_0^3 + a_4 t_0^4 + a_5 t_0^5 &= 0; \\ a_1 + 2a_2 t_0 + 3a_3 t_0^2 + 4a_4 t_0^3 + 5a_5 t_0^4 &= 0; \\ a_k + a_1 t_k + a_2 t_k^2 + a_3 t_k^3 + a_4 t_k^4 + a_5 t_k^5 &= 0; \\ a_1 + 2a_2 t_k + 3a_3 t_k^2 + 4a_4 t_k^3 + 5a_5 t_k^4 &= 0. \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

Выражения (4.1.20)-(4.1.22) описывают систему нелинейных алгебраических уравнений 6-го порядка для определения значений коэффициентов полинома (4.1.19) и момента времени t_k завершения взлета БВ.

Для определения закона изменения скорости $V(t)$ в режиме вертикальной посадки БВ с заданными значениями высоты $h_{\text{п}}$ начала его снижения и интервала времени $[t_0, t_k]$ используются соотношения (4.1.19)-(4.1.22) с заменой параметра $h_{\text{в}}$ на $h_{\text{п}}$.

Сформированные для этих режимов движения БВ системы нелинейных уравнений решаются численными методами, описанными в работе [9].

Пример 4.3.

Рассмотрим процесс вертикального взлета БВ при следующих исходных данных:

$$h_{\text{в}} = 500 \text{ м}; \quad V_y = 16 \text{ м/с}; \quad t_0 = 0 \text{ с.}$$

Решение системы уравнений (4.1.20)-(4.1.22) имеет следующий вид:

$$t_k = 58,594; \quad a_0 = 0; \quad a_1 = 0; \quad a_2 = 0,075;$$

$$a_3 = -2,545 \cdot 10^{-3}; \quad a_4 = 2,172 \cdot 10^{-5}.$$

Таким образом, имеем, что рассматриваемый БВ осуществляет взлет за 58,594 с. со следующим законом изменения его скорости:

$$V(t) = 0,075t^2 - 2,545 \cdot 10^{-3}t^3 + 2,172 \cdot 10^{-5}t^4.$$

Результаты расчета функций $V(t)$ и $\dot{V}(t)$ при $t \in [0; 58,594]$ с. представлены в Табл. 4.5 и на Рис. 4.5.

Таблица 4.5

$t, \text{с.}$	$V, \text{м/с}$	$\dot{V}, \text{м/с}^2$
0	0	0
4	1,036	0,480
8	3,558	0,749
12	6,790	0,840
16	10,087	0,787
20	12,940	0,623
24	14,971	0,382
28	15,937	0,097
32	15,729	-0,200
36	14,369	-0,474
40	12,014	-0,692
44	8,955	-0,820
48	5,616	-0,826
52	2,553	-0,676
56	0,458	-0,337
68,594	0	0

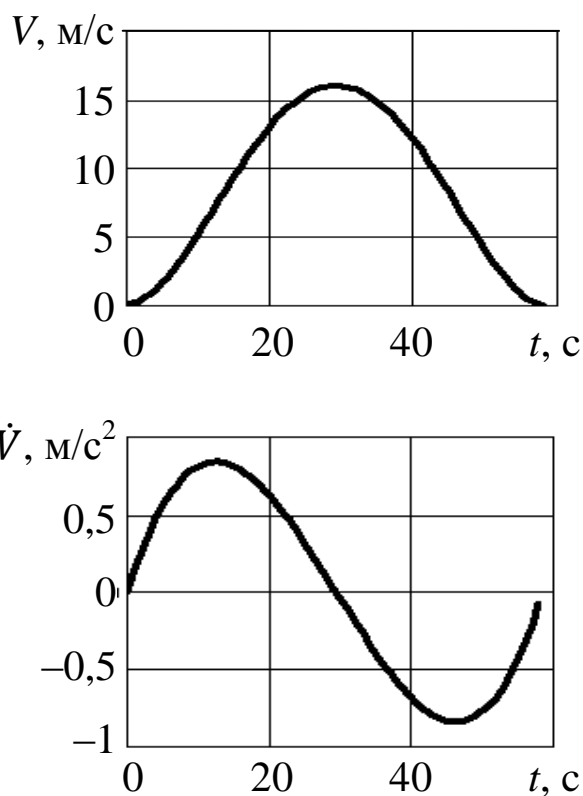


Рис. 4.5

4.2. Плоские траектории движения БЛА

Данный вид траекторий, реализуемых в горизонтальной и вертикальной плоскостях соответствующих маневренных СК, является наиболее распространенным в практике эксплуатации БЛА.

Рассмотрим методы формирования требуемых траекторий полетов БЛА в этих плоскостях. Такие траектории будем описывать в координатной форме уравнениями $z = z(x)$, $y = y(x)$ и параметрической форме функциями времени $x = x(t)$, $z = z(t)$ и $x = x(t)$, $y = y(t)$ [9].

Пусть БЛА на некотором этапе его полета должен осуществить в **горизонтальной плоскости** на постоянной высоте $y(t) = h$ с заданной скоростью $V_{\text{зад}}(t)$ перелет между точками с координатами (x_0, z_0) и (x_k, z_k) .

Необходимо сформировать уравнение траектории БЛА:

$$z = z(x), \quad x \in [x_0, x_k], \quad (4.2.1)$$

обеспечивающей такой перелет.

В связи с тем, что эта траектория должна гладким образом сопрягаться с траекториями предшествующего и последующего этапов полета БЛА, будем считать заданными в ее начальной и конечной точках значения производной функции (4.2.1).

В этом случае формируемая требуемая траектория $z = z(x)$ движения БЛА должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} z(x_0) &= z_0; & z(x_k) &= z_k; \\ z'(x_0) &= z'_0; & z'(x_k) &= z'_k. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

На Рис. 4.6,*a* представлены исходные данные для формирования требуемых траекторий полетов БЛА в горизонтальной плоскости в используемой маневренной СК.

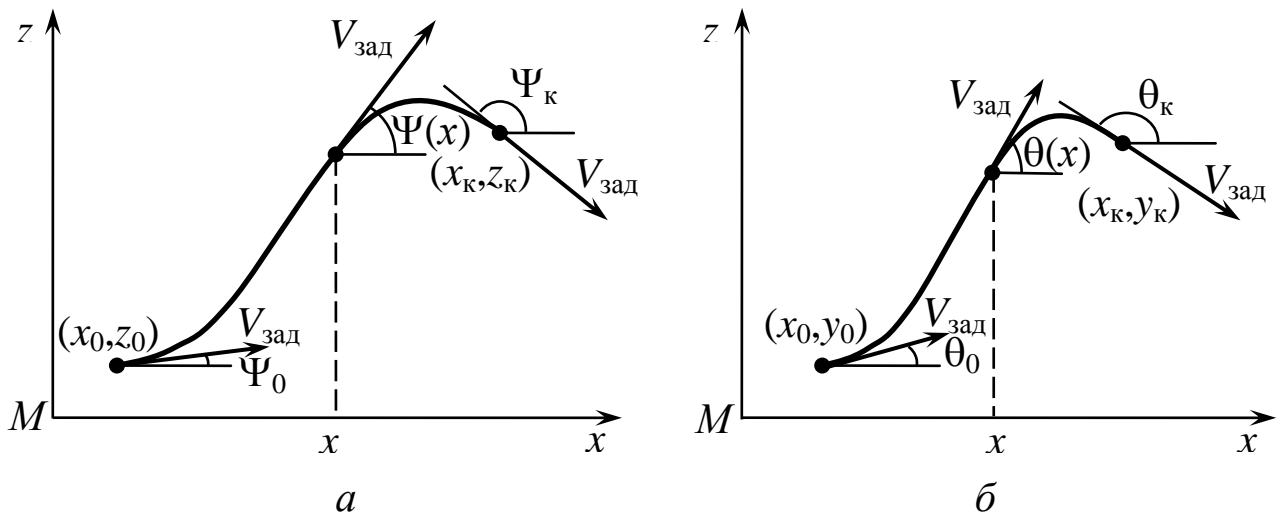


Рис. 4.6

Как известно, вектор V скорости БЛА лежит на касательной к траектории его полета [9]. Поэтому на этом рисунке касательные заданы соответствующими углами их наклона к оси Ox . При этом считается, что:

$$z'(x_0) = \operatorname{tg} \Psi_0; \quad z'(x) = \operatorname{tg} \Psi(x); \quad z'(x_k) = \operatorname{tg} \Psi_k. \quad (4.2.3)$$

В связи с тем, что любой полет БЛА сопровождается перегрузками, которые в общем случае в различные моменты времени имеют разные знаки, в работе [9] была решена вариационная задача, в которой при использовании формируемых траекторий БЛА перегрузка была бы минимальной.

Такое требование, как было показано в этой работе, позволяет сформировать траекторию (4.2.1), удовлетворяющую условиям (4.2.2), которая имеет минимальную кривизну и вследствие этого – минимальное значение перегрузки при движении БЛА по такой траектории с заданным законом $V_{\text{зад}}(t)$ изменения его скорости.

Из Рис. 4.6,а и соотношений (4.2.3) следует, что угол Ψ поворота траектории связан с уравнением траектории (4.2.1) выражением:

$$\Psi(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} z'(x).$$

Производная по времени этой сложной функции [19] с учетом выражения (4.2.1) записывается как:

$$\dot{\Psi}(t) = \frac{d\Psi}{dx} \cdot \dot{x} = \frac{z''(x)}{1 + z'^2(x)} \cdot \dot{x},$$

где $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ – производная по времени t от функции $x = x(t)$.

Сформируем дифференциальные уравнения для определения функций $x = x(t)$ и $z = z(t)$ [9].

Из разд. 2.1 следует, что кинематические уравнения движения БЛА в рассматриваемой плоскости имеют вид:

$$\dot{x} = V \cos \Psi; \quad \dot{z} = V \sin \Psi. \quad (4.2.4)$$

Используя очевидные тригонометрические соотношения:

$$\cos \Psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \Psi}}; \quad \sin \Psi = \frac{\operatorname{tg} \Psi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \Psi}}$$

и проводя в них замены скорости БЛА на зависимость $V_{\text{зад}} = V_{\text{зад}}(t)$ и $\operatorname{tg} \Psi = z'(x)$, получаем систему дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{x} = \frac{V_{\text{зад}}}{\sqrt{1 + z'^2(x)}}; \quad \dot{z} = \frac{V_{\text{зад}} z'(x)}{\sqrt{1 + z'^2(x)}}, \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (4.2.5)$$

Начальные условия для этой системы представим как:

$$x(t_0) = x_0; \quad z(t_0) = z_0. \quad (4.2.6)$$

Используя приведенное выше выражение для производной $\dot{\Psi}(t)$ и первое уравнение системы (4.2.5), имеем:

$$\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t) = \frac{V_{\text{зад}} z''(x(t))}{[1 + z'^2(x(t))]^{3/2}}. \quad (4.2.7)$$

где $x = x(t)$ – решение задачи Коши (4.2.5), (4.2.6).

Общее решение обозначенной выше вариационной задачи имеет вид [9]:

$$z(x) = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4, \quad (4.2.8)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные.

Производная от этой функции записывается как:

$$z'(x) = 3C_1x^2 + 2C_2x + C_3. \quad (4.2.9)$$

Значения постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 , входящих в уравнение (4.2.8) траектории БЛА, определяются с использованием выражений (4.2.2), (4.2.3) и (4.2.9) из решения следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} C_1x_0^3 + C_2x_0^2 + C_3x_0 + C_4 &= z_0; \\ 3C_1x_0^2 + 2C_2x_0 + C_3 &= \operatorname{tg}\Psi_0; \\ C_1x_k^3 + C_2x_k^2 + C_3x_k + C_4 &= z_k; \\ 3C_1x_k^2 + 2C_2x_k + C_3 &= \operatorname{tg}\Psi_k. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Данная система уравнений 4-го порядка в общем случае решается одним из известных численных методов, приведенных в работе [9].

Для случая, когда вторые требования из состава граничных условий (4.2.2) отсутствуют, уравнением кратчайшей траектории (4.2.1) является прямая, проходящая через точки с координатами (x_0, z_0) и (x_k, z_k) [9, 19].

В этом случае уравнение требуемой траектории движения БЛА будет иметь вид:

$$z(x) = \left(\frac{z_k - z_0}{x_k - x_0} \right) x + z_0 - \frac{x_0(z_k - z_0)}{x_k - x_0}. \quad (4.2.11)$$

Изменения значений координат БЛА во времени при его движении по траекториям (4.2.8) и (4.2.11) описываются сформированными путем решения задачи (4.2.5), (4.2.6) функциями:

$$x = x(t); \quad z = z(t); \quad t \in [t_0, t_k], \quad (4.2.12)$$

где t_0 и t_k – соответственно моменты времени начала и окончания движения БЛА по требуемой траектории $z = z(x)$.

Согласно работе [9], выражения (4.2.8), (4.2.11) и (4.2.12) являются соответственно *координатным и параметрическим представлением* требуемой траектории рассматриваемого БЛА.

Отметим, что система уравнений (4.2.5) описывает движение БЛА по любой траектории $z = z(x)$ с заданной скоростью $V_{\text{зад}} = V_{\text{зад}}(t)$.

Момент времени t_k окончания движения по этой траектории с использованием условий (4.2.2) определяется при выполнении равенств вида:

$$x(t_k) = x_k; \quad z(t_k) = z_k. \quad (4.2.13)$$

Конкретизируем полученные выше соотношения применительно к уравнению траектории (4.2.8), подставив в него решения $C_1^0, C_2^0, C_3^0, C_4^0$ системы (4.2.10).

Система дифференциальных уравнений (4.2.5), записанная с использованием выражения (4.2.9), примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{V_{\text{зад}}(t)}{\sqrt{1 + (3C_1^0 x^2 + 2C_2^0 x + C_3^0)^2}}; \\ \dot{z} &= \frac{V_{\text{зад}}(t)(3C_1^0 x^2 + 2C_2^0 x + C_3^0)}{\sqrt{1 + (3C_1^0 x^2 + 2C_2^0 x + C_3^0)^2}}. \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

Выражение (4.2.7) с учетом того, что:

$$z''(x) = 6C_1 x + 2C_2,$$

запишется как:

$$\dot{\Psi}(t) = \frac{2V_{\text{зад}}(t)(3C_1^0 x(t) + C_2^0)}{\left[1 + (3C_1^0 x^2(t) + 2C_2^0 x(t) + C_3^0)\right]^{3/2}},$$

где $x(t)$ – решение системы уравнений (4.2.14) с начальными условиями (4.2.6).

Для линейных траекторий БЛА, описываемых выражением (4.2.11), система уравнений (4.2.5) примет следующий вид:

$$\dot{x} = \frac{V_{\text{зад}}(x_{\text{к}} - x_0)}{\sqrt{(x_{\text{к}} - x_0)^2 + (z_{\text{к}} - z_0)^2}};$$

$$\dot{z} = \frac{V_{\text{зад}}(z_{\text{к}} - z_0)}{\sqrt{(x_{\text{к}} - x_0)^2 + (z_{\text{к}} - z_0)^2}}.$$

Полученная система при $V_{\text{зад}} = V_{\text{зад}}(t) = \text{const}$ характерна тем, что ее правые части не зависят от времени t и функций $x = x(t)$ и $z = z(t)$.

Вычисляя интегралы от этих частей и учитывая начальные условия (4.2.6), получаем следующие зависимости:

$$x(t) = x_0 + \frac{V_{\text{зад}}(x_{\text{к}} - x_0)}{\sqrt{(x_{\text{к}} - x_0)^2 + (z_{\text{к}} - z_0)^2}}(t - t_0);$$

$$z(t) = z_0 + \frac{V_{\text{зад}}(z_{\text{к}} - z_0)}{\sqrt{(x_{\text{к}} - x_0)^2 + (z_{\text{к}} - z_0)^2}}(t - t_0).$$

Используя первое соотношение из этих выражений и первое условие из состава выражений (4.2.13), определим момент времени $t_{\text{к}}$ окончания полета по прямой (4.2.11) из следующего уравнения:

$$x_{\text{к}} = x_0 + \frac{V_{\text{зад}}(x_{\text{к}} - x_0)}{\sqrt{(x_{\text{к}} - x_0)^2 + (z_{\text{к}} - z_0)^2}}(t_{\text{к}} - t_0).$$

Откуда имеем, что:

$$t_{\text{к}} = t_0 + \frac{1}{V_{\text{зад}}} \sqrt{(x_{\text{к}} - x_0)^2 + (z_{\text{к}} - z_0)^2}.$$

Аналогичный результат получается при использовании решения $z(t)$ и второго условия из состава равенств (4.2.13).

Пример 4.4.

Пусть некоторый БЛА, начиная с момента времени $t_0 = 0,5$ ч должен на заданной постоянной высоте со скоростью $V_{\text{зад}} = 40$ км/ч совершить перелет из точки с координатами

$(x_0, z_0) = (1, 15)$ км в точку $(x_k, z_k) = (10, 80)$ км. При этом необходимо выдержать заданные в начальной и конечной точках его траектории значения следующих курсовых углов:

$$\Psi_0 = 30^\circ; \quad \Psi_k = 80^\circ.$$

Тангенсы этих углов будут соответственно равны:

$$\operatorname{tg}30^\circ = 0,5777; \quad \operatorname{tg}80^\circ = 5,6713.$$

Для этих исходных данных система линейных алгебраических уравнений (4.2.10) конкретизируется как:

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 15;$$

$$3C_1 + 2C_2 + C_3 = 0,5777;$$

$$1000C_1 + 100C_2 + 10C_3 + C_4 = 80;$$

$$300C_1 + 20C_2 + C_3 = 5,6713.$$

Численное решение этой системы имеет вид:

$$C_1^0 = -0,101; \quad C_2^0 = 1,952; \quad C_3^0 = -3,024; \quad C_4^0 = 16,172.$$

При подстановке этих значений в выражение (4.2.8) получаем следующее уравнение траектории движения рассматриваемого БЛА в координатной форме:

$$z(x) = -0,101x^3 + 1,952x^2 - 3,024x + 16,172.$$

График этой функции и таблица ее значений представлены на Рис. 4.6 и в Табл. 4.6.

Система дифференциальных уравнений (4.2.14) и начальные условия (4.2.6) для этой траектории запишутся как:

$$\dot{x} = \frac{40}{\sqrt{1 + (-0,303x^2 + 3,904x - 3,024)^2}};$$

$$\dot{z} = \frac{40(-0,303x^2 + 3,904x - 3,024)}{\sqrt{1 + (-0,303x^2 + 3,904x - 3,024)^2}}.$$

$$x(0,5) = 1; \quad z(0,5) = 15.$$

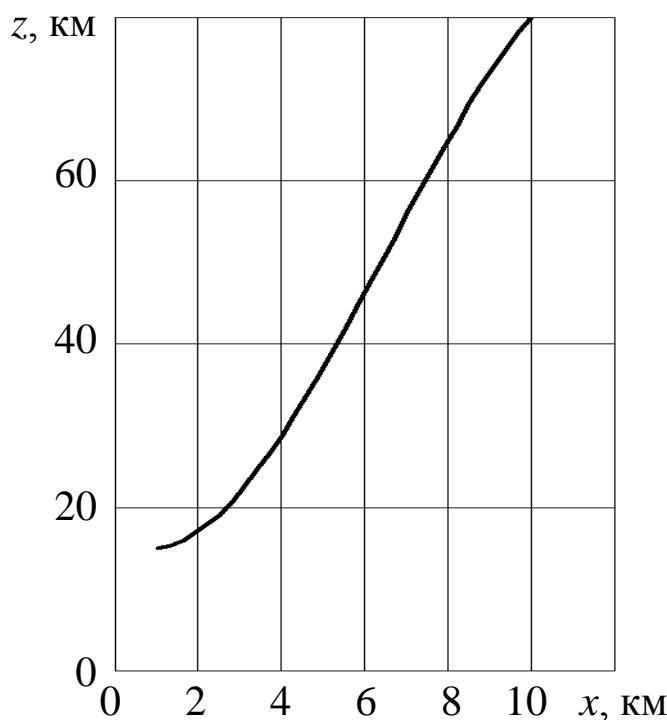


Рис. 4.6

Таблица 4.6

x, км	z, км
1	15
2,588	19,670
3,417	24,600
4,092	29,559
4,692	34,517
5,252	39,489
5,788	44,461
6,312	49,430
6,835	54,410
7,364	59,379
7,911	64,349
8,490	69,316
9,125	74,276
9,866	79,216
10,036	80,203

Результаты численного решения этой задачи приведены в Табл. 4.7.

Таблица 4.7

t, час	x, км	z, км
0,500	1	15
0,625	2,588	19,671
0,750	3,417	24,601
0,875	4,092	29,555
1,000	4,692	34,519
1,125	5,252	39,488
1,250	5,788	44,459
1,375	6,312	49,431
1,500	6,835	54,404
1,625	7,364	59,376
1,750	7,911	64,346
1,875	8,490	69,312
2,000	9,125	74,272
2,125	9,866	79,216
2,150	10,036	80,202
2,250	10,888	84,108
2,375	13,127	84,050

Из таблицы 4.7 и условий (4.2.13) определяем приближенное значение времени окончания движения БЛА по траектории $z(x)$, которое равно:

$$t_k = 2,15 \text{ ч.}$$

Сформируем, согласно Рис. 4.6,б, уравнение требуемой траектории полета БЛА в **вертикальной плоскости**:

$$y = y(x), \quad (4.2.15)$$

удовлетворяющей условиям:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0; & y(x_k) &= y_k; \\ y'(x_0) &= y'_0; & y'(x_k) &= y'_k. \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

Будем считать, что для движения БЛА по траектории (4.2.15) используется заданный закон изменения его скорости:

$$V_{\text{зад}} = V_{\text{зад}}(t), \quad t \in [t_0, t_k].$$

Здесь t_0 и t_k – моменты времени начала и окончания полета БЛА по сформированной траектории.

Как и выше, используя соответствующую вариационную задачу из работы [9], будем формировать траекторию (4.2.15) в виде следующей зависимости:

$$y(x) = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4, \quad (4.2.17)$$

где C_i – постоянные интегрирования, $i = \overline{1,4}$.

Производная этой функции записывается как:

$$y'(x) = 3C_1 x^2 + 2C_2 x + C_3. \quad (4.2.18)$$

Значения постоянных C_1, \dots, C_4 в выражениях (4.2.17) и (4.2.18) определяются из решения следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} C_1 x_0^3 + C_2 x_0^2 + C_3 x_0 + C_4 &= y_0; \\ 3C_1 x_0^2 + 2C_2 x_0 + C_3 &= \text{tg}\theta_0; \\ C_1 x_k^3 + C_2 x_k^2 + C_3 x_k + C_4 &= y_k; \\ 3C_1 x_k^2 + 2C_2 x_k + C_3 &= \text{tg}\theta_k, \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

полученной путем подстановки выражений (4.2.17) и (4.2.18) в левые части граничных условий (4.2.16).

Решения $C_1^0, C_2^0, C_3^0, C_4^0$ системы (4.2.19) получаются одним из известных численных методов [9].

Описанный выше подход предлагается использовать для формирования траекторий вида (4.2.15), описывающих требуемые виды маневров БЛА, совершаемых ими в вертикальной плоскости.

Для последующего программирования полета БЛА по траектории (4.2.15) необходимо сформировать систему дифференциальных уравнений, определяющую функции:

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (4.2.20)$$

и зависимости $\theta_{\text{тр}}(t)$ и $\dot{\theta}_{\text{тр}}(t)$, которые описывают требуемые законы изменения угла и угловой скорости наклона траектории в момент времени $t \in [t_0, t_k]$.

Из очевидного равенства (см. Рис. 4.6,б):

$$\theta(x) = \text{arctg } y'(x)$$

следует, что:

$$\begin{aligned} \theta_{\text{тр}}(t) &= \theta(x(t)) = \text{arctg } y'(x(t)), \\ \dot{\theta}_{\text{тр}}(t) &= \frac{d\theta}{dx} \dot{x} = \frac{V_{\text{зад}}(t) y''(x(t)) \dot{x}(t)}{1 + [y'(x(t))]^2}, \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

где $y''(x(t))$ вычисляется как:

$$y''(t) = 6C_1^0 x(t) + 2.$$

В работе [4] показано, что функции $x(t)$ и $y(t)$, описывающие движение БЛА по кривой $y(x)$ со скоростью $V_{\text{зад}}(t)$, являются решением системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = \frac{V_{\text{зад}}(t)}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}; \quad \dot{y} = \frac{V_{\text{зад}}(t) y'(x)}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}, \quad t \in [t_0, t_k] \quad (4.2.22)$$

с начальными условиями:

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0. \quad (4.2.23)$$

Для описания движения БЛА по траектории (4.2.15) в правых частях этих уравнений используется выражение (4.2.18) при $C_i = C_i^0, i = (\overline{1, 3})$.

При выводе этих уравнений были использованы известные кинематические уравнения движения БЛА в вертикальной плоскости:

$$\dot{x} = V \cos \theta; \quad \dot{y} = V \sin \theta$$

и соотношения вида:

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}};$$

$$\sin\theta = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta}} = \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}.$$

Функция $x(t)$, полученная в результате интегрирования системы (4.2.22) с начальными условиями (4.2.23), используется в зависимостях $\theta_{\text{тр}}(t)$ и $\dot{\theta}_{\text{тр}}(t)$, $t \in [t_0, t_k]$.

Конечный момент времени t_k полета БЛА определяется из условий вида:

$$x(t_k) = x_k; \quad y(t_k) = y_k. \quad (4.2.24)$$

Для перевода координат траекторий полета БЛА, описываемых функциями $x = x(t)$, $y = y(t)$, в другую СК используются формулы, приведенные в Разд. 1.3.

Пример 4.5.

Пусть некоторый БЛА в момент времени $t_0 = 0$ с. должен из горизонтального полета на высоте $h = 2000$ м произвести снижение из точки с координатами $(x_0, y_0) = (2000, 2000)$ м с выходом в точке $(x_k, y_k) = (20000, 1000)$ м в режим горизонтального полета.

Будем считать, что $V_{\text{зад}} = 360$ км/ч. = 100 м/с. Из условий выполнения этого режима полета рассматриваемого БЛА следует, что $\theta_0 = \theta_k = 0^\circ$.

Сформируем траекторию $y(x)$ вида (4.2.17). Система линейных алгебраических уравнений (4.2.19) конкретизируется как:

$$\begin{aligned} 2000^3 C_1 + 2000^2 C_2 + 2000 C_3 + C_4 &= 2000; \\ 3 \cdot 2000^2 C_1 + 2 \cdot 2000 C_2 + C_3 &= 0; \\ 20000^3 C_1 + 20000^2 C_2 + 20000 C_3 + C_4 &= 1000; \\ 3 \cdot 20000^2 C_1 + 2 \cdot 20000 C_2 + C_3 &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему, имеем:

$$\begin{aligned} C_1^0 &= 3,429 \cdot 10^{-10}; & C_2^0 &= -1,132 \cdot 10^{-5}; \\ C_3^0 &= 0,041; & C_4^0 &= -1,96 \cdot 10^3. \end{aligned}$$

Тогда уравнение требуемой траектории движения БЛА примет следующий вид:

$$y(x) = 3,429 \cdot 10^{-10} x^3 - 1,132 \cdot 10^{-5} x^2 + 0,041x - 1,96 \cdot 10^3, \\ x \in [2000; 20000] \text{ м.}$$

График этой функции представлен на Рис. 4.7. В Табл. 4.8 приведены значения функции $y(x)$ и ее производной:

$$y'(x) = 10,287 \cdot 10^{-10} x^2 - 2,264 \cdot 10^{-5} x + 0,041. \quad (4.2.25)$$

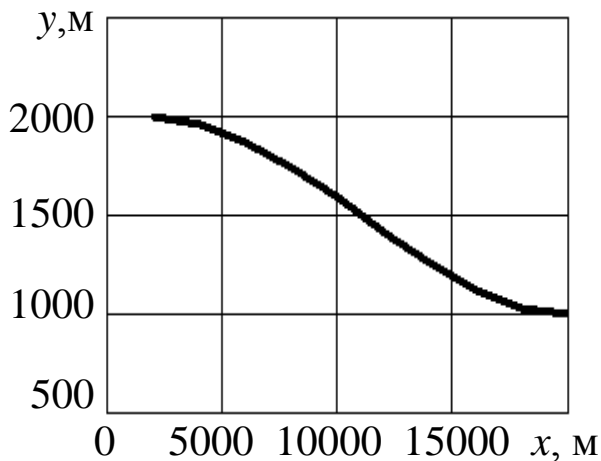


Рис. 4.7

Таблица 4.8

$x, \text{ м}$	$y, \text{ м}$	y'
2000	2000	0
4000	1966	-0,033
6000	1874	-0,058
8000	1741	-0,074
10000	1583	-0,082
12000	1417	-0,082
14000	1259	-0,074
16000	1126	-0,058
18000	1034	-0,033
20000	1000	0

Из этой таблицы видно, что при $x_0 = 2000$ м значения $y_0 = 2000$ м и $y'_0 = 0$. Аналогичным образом, при $x_k = 20000$ м имеем $y_k = 1000$ м и $y'_k = 0$.

Параметрическое представление траектории рассматриваемого БЛА вида (4.2.20) будем определять из решения системы дифференциальных уравнений вида (4.2.22) с начальными условиями (4.2.23), которые в нашем случае конкретизируются как:

$$\dot{x} = \frac{100}{\sqrt{1 + y'^2(x)}}; \quad \dot{y} = \frac{100y'(x)}{\sqrt{1 + y'^2(x)}};$$

$$x(0) = 2000; \quad y(0) = 2000,$$

где производная $y'(x)$ описывается выражением (4.2.25).

Применяя к результатам численного интегрирования этой системы условия (4.2.24), условия окончания рассматриваемого маневра БЛА, которые примут вид:

$$x(t_k) = 20000; \quad y(t_k) = 1000,$$

получаем приближенное значение момента времени окончания его снижения, равное:

$$t_k = 180,333 \text{ с.}$$

Параметрическое представление сформированной траектории движения БЛА приведено в Табл. 4.9.

Таблица 4.9

$t, \text{ с}$	$x, \text{ м}$	$z, \text{ м}$
0	2000	2000
18,033	3803	1972
36,067	5605	1896
54,100	7405	1784
72,133	9203	1648
90,166	11000	1500
108,200	12797	1352
126,233	14595	1216
144,266	16395	1104
162,300	18196	1028
180,333	20000	1000

Рассмотрим задачу формирования требуемой траектории БЛА при наборе заданной высоты.

Пример 4.6.

Сформируем траекторию БВ при наборе высоты из точки его висения $(x_0, y_0) = (500, 320)$ м. при окончании вертикального взлета (см. Пример 3.10), который завершается в точке с

координатами $(x_k, y_k) = (1500, 1000)$ м. переходом в режим горизонтального полета.

В этой задаче значения углов θ_0 и θ_k также равны нулю.

Система уравнений (4.2.19) при использовании для координат БВ километровой размерности будет иметь вид:

$$\begin{aligned} 0,5^3 C_1 + 0,5^2 C_2 + 0,5 C_3 + C_4 &= 0,320; \\ 3 \cdot 0,5^2 C_1 + 2 \cdot 0,5 C_2 + C_3 &= 0; \\ 1,5^3 C_1 + 1,5^2 C_2 + 1,5 C_3 + C_4 &= 1,000; \\ 3 \cdot 1,5^2 C_1 + 2 \cdot 1,5 C_2 + C_3 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет следующее решение:

$$C_1^0 = -1,36; \quad C_2^0 = 4,08; \quad C_3^0 = -3,06; \quad C_4^0 = 1,00.$$

Тогда искомая траектория (4.2.17), описывающая набор высоты БВ, конкретизируется как:

$$y(x) = -1,36x^3 + 4,08x^2 - 3,06x + 1,00, \quad x \in [0,5; 1,5] \text{ км.}$$

Значения этой функции приведены в Табл. 4.10, а график требуемой траектории движения БВ – на Рис. 4.8.

Таблица 4.10

x , км	$y(x)$, км	$y'(x)$
0,5	0,320	0
0,6	0,339	0,367
0,7	0,391	0,653
0,8	0,467	0,857
0,9	0,559	0,979
1,0	0,660	1,020
1,1	0,761	0,979
1,2	0,853	0,857
1,3	0,929	0,653
1,4	0,981	0,367
1,5	1	0

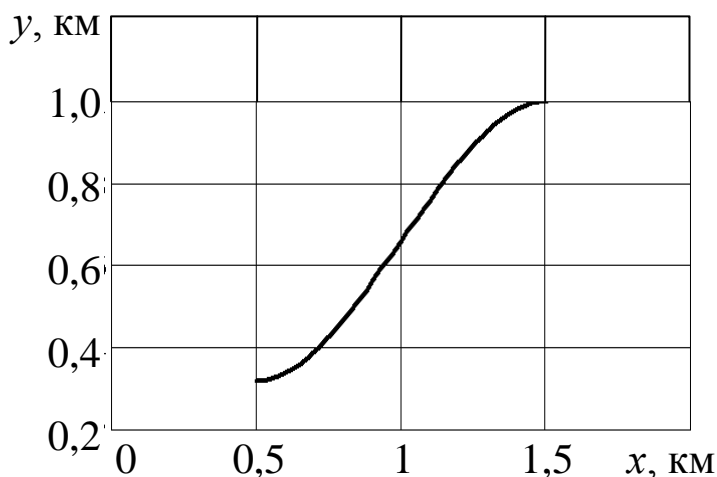


Рис. 4.8

Заметим, что подходы, рассмотренные в этих примерах, можно использовать при формировании требуемых траекторий воздушных участков аэродромного взлета и посадки БЛА

(см. Разд. 3.2 и 3.3), которые могут быть использованы при программном управлении этими процессами.

Линейные траектории $y(x)$ движения БЛА в вертикальной плоскости формируются с использованием выражения, аналогичного формуле (4.2.11), при замене в ней параметров z_0 на y_0 и z_k на y_k .

Как было установлено в ходе рассмотрения различных задач применения БЛА, некоторые уравнения траекторий их полетов являются многозначными функциями переменной x (Рис. 4.9).

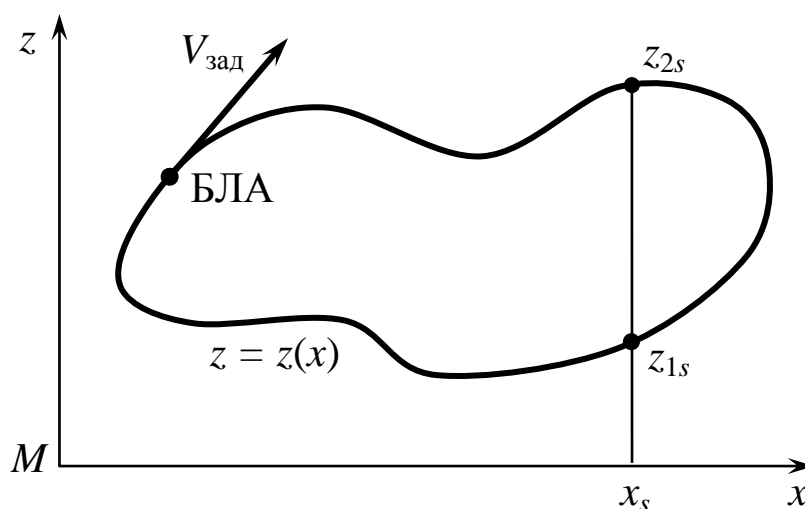


Рис. 4.9

Примером такой функции является уравнение замкнутой круговой траектории полета БЛА в горизонтальной плоскости:

$$\Phi(x, z) = (x - x_{ц})^2 + (z - z_{ц})^2 - R^2 = 0, \quad (4.2.26)$$

где R – радиус траектории; $(x_{ц}, z_{ц})$ – координаты центра траектории.

Представление этой траектории в форме выражения (4.2.1), которое конкретизируется как:

$$z = z_{ц} \pm \sqrt{R^2 - (x - x_{ц})^2},$$

показывает, что каждому значению координаты x соответствуют два значения координаты z такой траектории. Приведенные в работе [4] результаты формирования управления

БЛА для такой траектории показали отсутствие единого вектора управления $u(t) = (P(t), \alpha(t), \gamma(t))$, обеспечивающего его полет по замкнутой круговой траектории. В этой связи предлагается использовать подход, основанный на неявно заданных требуемых траекториях полетов БЛА в горизонтальной плоскости [9].

В этом случае требуемую траекторию $z(x)$ его полета будем задавать в форме неявно заданной функции [19, 25] вида:

$$\Phi(x, z) = 0. \quad (4.2.27)$$

Приведем некоторые примеры выражения (4.2.27).

Для формирования траектории БЛА при поиске объекта в заданном квадрате земной (морской) поверхности с центром в точке $(x_{ц}, z_{ц})$ в работе [16] предлагается использовать уравнение спирали $\rho = k\varphi$ [19], которая в геодезических координатах записывается как:

$$\Phi(x, z) = \sqrt{(x - x_{ц})^2 + (z - z_{ц})^2} - k \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{z - z_{ц}}{x - x_{ц}} \right) + (2i + j)\pi \right] = 0,$$

где i – количество полных оборотов спирали, а параметр j принимает следующие значения:

$$j = \begin{cases} 0, & \text{если БЛА движется в первой четверти;} \\ 1, & \text{при движении БЛА во второй и третьей четвертях;} \\ 2, & \text{если БЛА движется в четвертой четверти применяемой маневренной СК с началом в точке первоначального расположения БЛА.} \end{cases}$$

Отметим, что из этого выражения нельзя в явном виде получить уравнение $z = z(x)$ траектории БЛА.

Еще одним примером выражения (4.2.27) является общее уравнение суперэллипса:

$$\Phi(x, z) = \left(\frac{x - \alpha}{\beta} \right)^n + \left(\frac{z - \gamma}{\delta} \right)^m - \sigma = 0,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma, n, m$ – задаваемые параметры.

Конкретизация их значений позволяет получать различные виды требуемых траекторий полета БЛА (окружности, эллипсы, овалы и др.).

Представление траекторий полета БЛА в горизонтальной плоскости в форме (4.2.27) является более общим, так как при явном задании траекторий в виде $z = z(x)$ это выражение принимает вид:

$$\Phi(x, z) = z - f(x) = 0,$$

где $f(x)$ – обозначение правой части выражения (4.2.1).

Рассмотрим методику построения зависимости $\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t)$, описывающей требуемую скорость изменения угла поворота траектории БЛА при его полёте по кривой (4.2.27). Для обеспечения полёта БЛА по этой траектории необходимо построить связь между функцией $\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ и координатами БЛА $x(t)$ и $z(t)$, удовлетворяющими уравнению (4.2.27).

Последние предлагается определять из решения системы дифференциальных уравнений вида [9]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{V_{\text{зад}}(t) \Phi_z(x, z)}{\sqrt{\Phi_x^2(x, z) + \Phi_z^2(x, z)}}; \\ \dot{z} &= \frac{-V_{\text{зад}}(t) \Phi_x(x, z)}{\sqrt{\Phi_x^2(x, z) + \Phi_z^2(x, z)}}, \end{aligned} \quad t \in [t_0, t_k], \quad (4.2.28)$$

которые получаются из уравнений (4.2.5) путем подстановки в их правые части следующего известного представления производной от неявной функции (4.2.27) [19]:

$$z' = -\frac{\Phi_x(x, z)}{\Phi_z(x, z)}, \quad \Phi_z(x, z) \neq 0, \quad (4.2.29)$$

и проведения несложных преобразований. Здесь Φ_x и Φ_z – частные производные функции $\Phi(x, z)$:

$$\begin{aligned} \Phi_x(x, z) &= \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, z); \\ \Phi_z(x, z) &= \frac{\partial}{\partial z} \Phi(x, z). \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

Для функции (4.2.26) эти производные имеют вид:

$$\Phi_x(x, z) = 2(x - x_{ц}); \quad \Phi_z(x, z) = 2(z - z_{ц}).$$

Установлено, что при полёте по кривой (4.2.27) в том или ином направлении функция $V_{зад}(t)$ должна соответствующим образом менять знак [9].

Начальные условия для уравнений (4.2.28) записываются как:

$$x(t_0) = x_{н}, \quad z(t_0) = z_{н}. \quad (4.2.31)$$

Здесь $(x_{н}, z_{н})$ – координаты начальной точки траектории полёта БЛА, которые должны удовлетворять уравнению (4.2.27).

Пример 4.7.

Пусть траектория некоторого БЛА, осуществляющего полет в горизонтальной плоскости на интервале времени $[t_0, t_k] = [0; 0,088]$ ч. со скоростью $V_{зад} = 80$ км/ч. задана следующим приведенным выше уравнением суперэллипса при $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = \delta = \sigma = 1$, $n = m = 4$:

$$\Phi(x, z) = x^4 + z^4 - 1, \quad x \in [-1, +1] \text{ км.}$$

Используя частные производные:

$$\Phi_x(x, z) = 4x^3; \quad \Phi_z(x, z) = 4z^3,$$

получаем уравнения вида (4.2.28) для формирования параметрического представления $x(t)$, $z(t)$, траектории этого БЛА:

$$\dot{x} = \frac{80x^3}{\sqrt{x^6 + z^6}}; \quad \dot{z} = -\frac{80z^3}{\sqrt{x^6 + z^6}}, \quad t \in [0; 0,088] \text{ с.}$$

Начальные условия (4.2.31) в нашем случае конкретизируются как:

$$x(0) = -1; \quad z(0) = 0.$$

Результаты численного решения этой системы уравнений представлены на Рис. 4.9 и в Табл. 4.11. На этом рисунке приведено явное представление замкнутой траектории $z(x)$ БЛА, численно построенное по данным 2-го и 3-го столбцов Табл. 4.11.

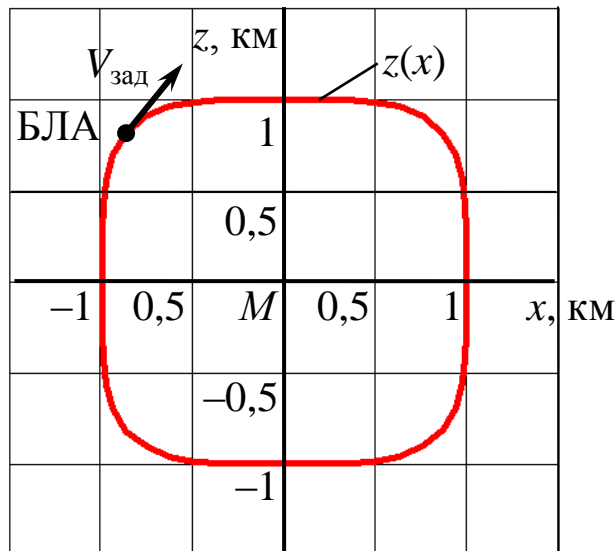


Рис. 4.9

Вычисление функции $\Psi_{\text{тр}}(t)$ для всех $t \in [t_0, t_k]$ предлагается проводить с использованием выражения (4.2.7), в котором производные $z'(x)$ и $z''(x)$ заменяются производными от неявной функции (4.2.27).

Таблица 4.11

t , ч.	x , км	z , км
0	-1	0
$4,385 \cdot 10^{-3}$	-0,996	0,351
$8,770 \cdot 10^{-3}$	-0,936	0,695
0,013	-0,695	0,936
0,018	-0,351	0,996
0,022	0	1
0,026	0,351	0,996
0,031	0,695	0,936
0,035	0,936	0,695
0,039	0,996	0,352
0,044	1	0
0,048	0,996	-0,352
0,053	0,936	-0,695
0,057	0,695	-0,936
0,061	0,351	-0,996
0,066	0	-1
0,070	-0,351	-0,996
0,075	-0,695	-0,936
0,079	-0,936	-0,695
0,083	-0,996	-0,352
0,088	-1	0

Используя представления (4.2.29), (4.2.30) производной z' , и частные производные 2-го порядка вида:

$$\begin{aligned}\Phi_{xx}(x, z) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x, z); \\ \Phi_{xz}(x, z) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \Phi(x, z); \\ \Phi_{zz}(x, z) &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi(x, z),\end{aligned}\tag{4.2.32}$$

получаем формулу вида:

$$\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t) = \frac{V_{\text{зад}}[\Phi_{xx} + 2\Phi_{xz}z' + \Phi_{zz}z'^2]}{(1 + z'^2)\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_z^2}}.\tag{4.2.33}$$

При вычислении этой функции используются выражения (4.2.29), (4.2.30), (4.2.32), в которых в качестве аргументов подставляются решения $x = x(t)$, $z = z(t)$ системы дифференциальных уравнений (4.2.28) с начальными условиями (4.2.31).

При описании траекторий полета БЛА в вертикальной плоскости также предлагается использовать их общее представление вида:

$$\Phi(x, y) = 0.$$

В этом случае система дифференциальных уравнений для определения координат $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_0, t_K]$ движения БЛА по этой кривой со скоростью $V_{\text{зад}}(t)$ записывается как [9]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{V_{\text{зад}}(t)\Phi_y(x, y)}{\sqrt{\Phi_x^2(x, y) + \Phi_y^2(x, y)}}; \\ \dot{y} &= \frac{-V_{\text{зад}}(t)\Phi_x(x, y)}{\sqrt{\Phi_x^2(x, y) + \Phi_y^2(x, y)}},\end{aligned}\tag{4.2.34}$$

которые получаются из системы уравнений(4.2.22) при использовании выражения вида [19]:

$$y' = -\frac{\Phi_x(x, y)}{\Phi_y(x, y)}, \quad \Phi_y(x, y) \neq 0. \quad (4.2.35)$$

Если траектория полета БЛА в вертикальной плоскости задана в явной форме как кривая $y = \varphi(x)$, то ее неявное представление записывается как:

$$\Phi(x, y) = y - \varphi(x) = 0.$$

В существующей практике программирования полетов БЛА широко используется координатный способ, основанный на задании в горизонтальной плоскости полета координат поворотных пунктов маршрута (ППМ) или характерных точек его траектории (ХТТ) в вертикальной плоскости. В последующем задаваемые координаты соединяются отрезками прямых, и полученная ломаная является описанием формируемой траектории БЛА (Рис. 4.10).

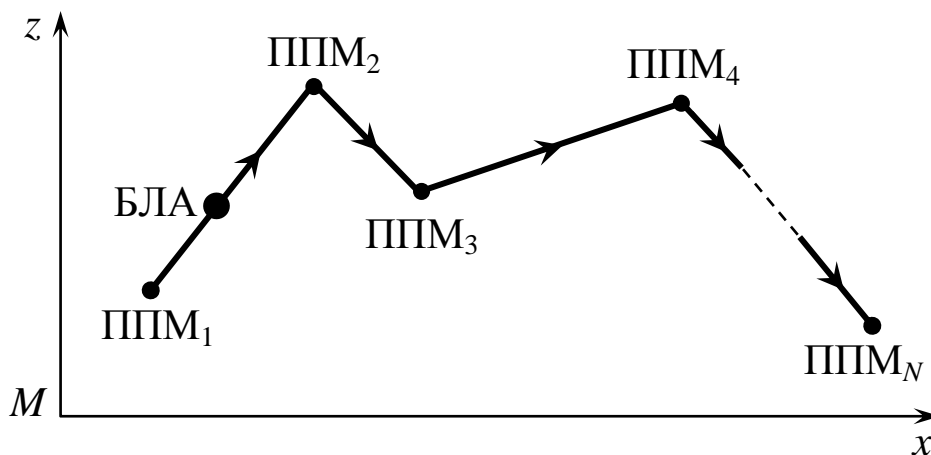


Рис. 4.10

Составная траектория движения БЛА между $ППМ_{r-1}$ и $ППМ_r$ с использованием уравнения прямой, проходящей через две заданные точки [19], и выражения (4.2.27) описывается формулой вида:

$$\Phi_{r-1}(x, z) = \frac{z - z_{r-1}}{z_r - z_{r-1}} - \frac{x - x_{r-1}}{x_r - x_{r-1}} = 0, \quad r = (\overline{2, N}).$$

Основным недостатком такого подхода является отсутствие гладкости составных траекторий (см. Рис. 4.10). Это вызывает необходимость использования для их сглаживания в окрестностях ППМ специальных переходных траекторий движения БЛА. Примеры таких траекторий представлены на Рис. 4.11.

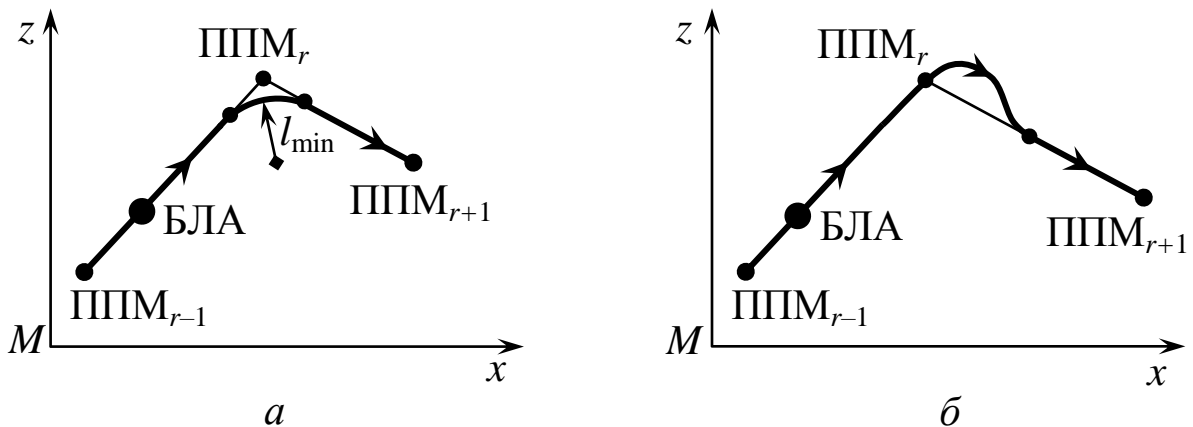


Рис. 4.11

Конкретизация параметров составной непрерывной траектории, приведенной на Рис. 4.11,а, где l_{\min} – минимальный радиус виража БЛА, описана в работе [9].

Траектория, представленная на Рис. 4.11,б, реализуется при движении БЛА с помощью специального закона управления, «зашифрованного» в его САУ [40].

Рассмотрим подход, позволяющий с использованием сплайн-интерполяции и обозначений из работы [36] и заданной совокупности ППМ получать непрерывное и гладкое представление требуемой криволинейной траектории движения БЛА в горизонтальной плоскости.

Будем считать, что при планировании операции в выбранной маневренной СК задана совокупность координат (x_k, z_k) , $k = (\overline{1, N})$ точек, описывающих ППМ требуемого движения

конкретного БЛА. Эти точки вместе с интерполирующей их сплайн-функцией $S(x)$ приведены на Рис. 4.12.

В качестве функции $S(x)$ будем использовать кубический сплайн [9, 36], который обладает следующими свойствами:

1) проходит через все заданные N точек с координатами (x_k, z_k) , $k = \overline{1, N}$;

2) на каждом отрезке между двумя соседними точками является кубическим полиномом;

3) является непрерывной функцией вместе со своими первой и второй производными во всех точках x_1, x_2, \dots, x_N .

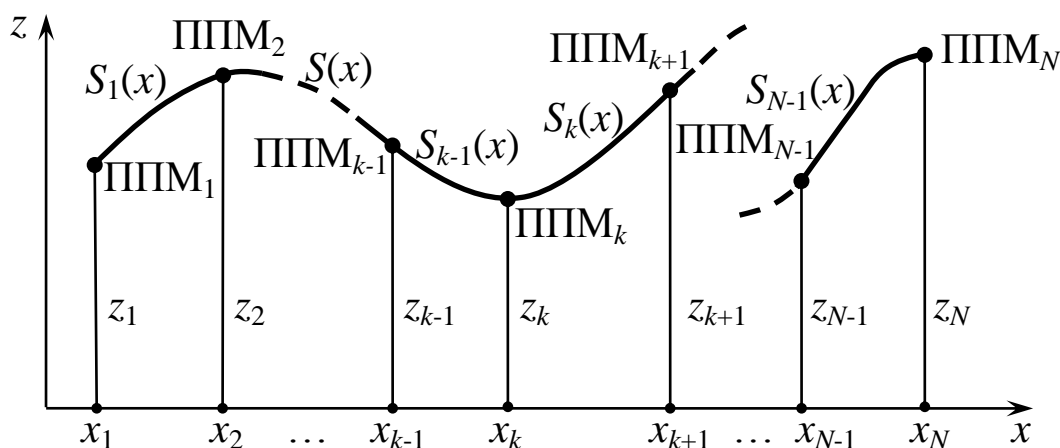


Рис. 4.12

Кубический сплайн записывается для каждого отрезка с номером k , левый конец которого имеет абсциссу x_k (см. Рис. 4.12). На этом отрезке для любого $x \in [x_k, x_{k+1}]$ результат интерполяции вычисляется по фрагменту общего сплайна, который имеет вид:

$$S_k(x) = z_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3. \quad (4.2.36)$$

При этом между N заданными точками расположен $(N - 1)$ отрезок, так что в этой формуле $k = 1, 2, \dots, N - 1$.

Если значение переменной x переходит на другой отрезок, то следует изменить номер k текущего отрезка и пересчитать значения коэффициентов b_k, c_k, d_k , входящих в формулу (4.2.36).

Коэффициенты b_k и d_k можно выразить через значения коэффициентов c_k по формулам вида [36]:

$$\begin{aligned} b_{k-1} &= \frac{z_k - z_{k-1}}{h_{k-1}} - \frac{h_{k-1}}{3} (c_k + 2c_{k-1}), \\ d_{k-1} &= \frac{1}{3h_{k-1}} (c_k - c_{k-1}), \quad k = 2, 3, \dots, N, \end{aligned} \quad (4.2.37)$$

где $h_{k-1} = x_k - x_{k-1}$ — длина интервала $[x_{k-1}, x_k]$.

Значения коэффициентов c_k , входящих в эти формулы определяются из решения следующей системы линейных алгебраических уравнений [36]:

$$\begin{aligned} &\frac{h_{k-1}}{3} c_{k-1} + \frac{2}{3} (h_{k-1} + h_k) c_k + \frac{h_k}{3} c_{k+1} = \\ &= \frac{z_{k+1} - z_k}{h_k} - \frac{z_k - z_{k-1}}{h_{k-1}}, \quad k = 2, 3, \dots, N - 1. \end{aligned} \quad (4.2.38)$$

При этом предполагается, что значения $c_1 = 0$, $c_N = 0$.

Система уравнений (4.2.38) решается одним из численных методов, приведенных в работе [9].

После построения фрагментов сплайна $S_k(x)$, $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 1, 2, \dots, N-1$, описывающего требуемую траекторию движения БЛА и проходящего через все заданные ППМ его маршрута, применяются выражения (4.2.5), (4.2.6), где считается, что $z(x) = S_k(x)$, $k = \overline{1, N-1}$. Далее с использованием указанных выше соотношений для каждого интервала определяются функции $x^{(k)}(t)$ и $z^{(k)}(t)$ путем интегрирования совокупности $(N-1)$ системы уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(k)} &= \frac{V_{\text{зад}}}{\sqrt{1 + [S'_k(x)]^2}}; \\ \dot{z}^{(k)} &= \frac{V_{\text{зад}} S'_k(x)}{\sqrt{1 + [S'_k(x)]^2}}. \end{aligned} \quad (4.2.39)$$

с начальными условиями:

$$\begin{aligned} x^{(k)}(t_k) &= x_k; & z^{(k)}(t_k) &= z_k; \\ k &= \overline{(1, N-1)}, & \kappa &= \overline{(0, N-1)}. \end{aligned} \quad (4.2.40)$$

Отметим, что применение кубических сплайнов позволяет также как и для уравнений вида (4.2.8) получить требуемую траекторию полета БЛА, имеющую минимальные значения кривизны и перегрузки n_z .

Описанный выше подход при задании совокупности (x_k, y_k) , $k = \overline{(1, N)}$ координат ХТТ, расположенных в соответствующей вертикальной плоскости, применим и при формировании требуемых сложных маневров полета БЛА в этой плоскости.

Пример 4.8.

Сформируем сплайн-интерполяцию траектории полета БЛА, которая должна проходить через ППМ₁, ППМ₂, ППМ₃ и ППМ₄ с координатами:

$$\begin{aligned} (x_1, z_1) &= (1, 2) \text{ км}; & (x_2, z_2) &= (2, 4) \text{ км}; \\ (x_3, z_3) &= (4, 10) \text{ км}; & (x_4, z_4) &= (8, 5) \text{ км}. \end{aligned}$$

Траектория движения будет описываться $N = 3$ сплайн-функциями вида (4.2.36). Для их конкретизации будем использовать выражения (4.2.38) и (4.2.37), предварительно вычислив значения параметров:

$$h_1 = x_2 - x_1 = 1; \quad h_2 = x_3 - x_2 = 2; \quad h_3 = x_4 - x_3 = 4.$$

Система линейных уравнений (4.2.38) в нашем случае конкретизируется как:

$$\begin{aligned} k = 2: & \frac{h_1}{3} c_1 + \frac{2}{3} (h_1 + h_2) c_2 + \frac{h_3}{3} c_3 = \frac{z_3 - z_2}{h_2} - \frac{z_2 - z_1}{h_1}; \\ k = 3: & \frac{h_2}{3} c_2 + \frac{2}{3} (h_2 + h_3) c_3 + \frac{h_3}{3} c_4 = \frac{z_4 - z_3}{h_3} - \frac{z_3 - z_2}{h_2}. \end{aligned}$$

В связи с тем, что $c_1 = 0$, $c_4 = 0$, эта система принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}(h_1 + h_2)c_2 + \frac{h_3}{3}c_3 &= \frac{z_3 - z_2}{h_2} - \frac{z_2 - z_1}{h_1}; \\ \frac{h_2}{3}c_2 + \frac{2}{3}(h_2 + h_3)c_3 &= \frac{z_4 - z_3}{h_3} - \frac{z_3 - z_2}{h_2}. \end{aligned}$$

Подставляя в эти выражения исходные данные задачи, имеем:

$$2c_2 + \frac{2}{3}c_3 = 1; \quad \frac{2}{3}c_2 + 4c_3 = -\frac{17}{4}.$$

Решая эту систему, получаем следующие значения:

$$c_2^0 = 0,904; \quad c_3^0 = -1,213.$$

Значения коэффициентов b_k и d_k вычисляются из выражений (4.2.37), которые конкретизируются как:

$$\begin{aligned} k = 2: \quad b_1^0 &= \frac{z_2 - z_1}{h_1} - \frac{h_1}{3}(c_2^0 + 2c_1^0); \\ d_1^0 &= \frac{1}{3h_1}(c_2^0 - 2c_1^0); \\ k = 3: \quad b_2^0 &= \frac{z_3 - z_2}{h_2} - \frac{h_2}{3}(c_3^0 + 2c_2^0); \\ d_2^0 &= \frac{1}{3h_2}(c_3^0 - 2c_2^0); \\ k = 4: \quad b_3^0 &= \frac{z_4 - z_3}{h_3} - \frac{h_3}{3}(c_4^0 + 2c_3^0); \\ d_3^0 &= \frac{1}{3h_3}(c_4^0 - 2c_3^0). \end{aligned}$$

Используя в этих соотношениях значения c_2^0 , c_3^0 и полагая, что $c_1^0 = c_4^0 = 0$, получаем следующие параметры формируемых сплайн-функций:

$$\begin{aligned} b_1^0 &= 1,699; & b_2^0 &= 2,603; & b_3^0 &= 1,985; \\ d_1^0 &= 0,301; & d_2^0 &= -0,305; & d_3^0 &= 0,101. \end{aligned}$$

Подставляя вычисленные значения коэффициентов b_k^0, c_k^0, d_k^0 , $k = (\overline{1, 3})$ в формулу (4.2.36), имеем:

$$S_1(x) = 2 + 1,699(x - 1) + 0,301(x - 4)^3, \quad x \in [1, 2], \text{ км};$$

$$S_2(x) = 4 + 2,603(x - 2) + 0,904(x - 2)^2 - 0,305(x - 2)^3, \quad x \in [2, 4], \text{ км}.$$

$$S_3(x) = 10 + 1,985(x - 4) - 1,213(x - 4)^2 + 0,101(x - 4)^3, \quad x \in [4, 8], \text{ км}.$$

Результаты вычислений по этим формулам представлены в Табл. 4.12 и на Рис. 4.13.

Таблица 4.12

x, км	z(x)		
	S ₁ (x), км	S ₂ (x), км	S ₃ (x), км
1,0	2,000	—	—
1,5	2,880	—	—
2,0	4,000	4,000	—
2,5	—	5,512	—
3,0	—	7,211	—
3,5	—	8,805	—
4,0	—	10,000	10,000
4,5	—	—	10,888
5,0	—	—	11,170
5,5	—	—	10,934
6,0	—	—	10,266
6,5	—	—	9,251
7,0	—	—	7,977
7,5	—	—	6,530
8,0	—	—	5,000

Из приведенного рисунка видно, что полученная гладкая составная траектория БЛА минимальным образом отличается от ломаной, соединяющей заданные ППМ.

Производные от сформированных сплайн-функций имеют следующий вид:

$$S_1'(x) = 1,699 + 0,903(x - 1)^2,$$

$$S_1''(x) = 1,806(x - 1), \quad x \in [1, 2];$$

$$S_2'(x) = 2,603 + 1,808(x - 2) - 0,915(x - 2)^2,$$

$$S_2''(x) = 1,808 - 1,830(x - 2), \quad x \in [2, 4];$$

$$S_3'(x) = 1,985 - 2,426(x - 4) + 0,303(x - 4)^2,$$

$$S_3''(x) = -2,426 + 0,606(x - 4), \quad x \in [4, 8].$$

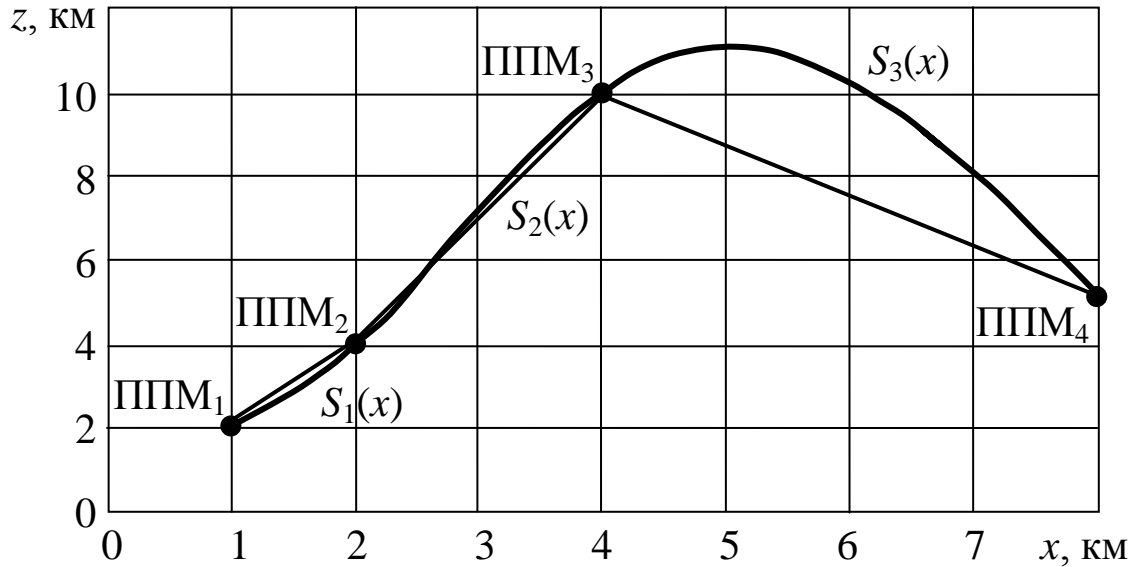


Рис. 4.13

Запишем совокупность систем дифференциальных уравнений (4.2.39) для определения параметрического представления координат $x^{(k)}(t)$, $z^{(k)}(t)$, описывающих движение БЛА по траекториям $z(x) = S_k(x)$, $k = (\overline{1,3})$, с заданной скоростью $V_{\text{зад}}(t)$. Покажем их представление на примере участка траектории БЛА между ППМ₁ и ППМ₂.

Функции $x^{(1)}(t)$ и $z^{(1)}(t)$ получаются из решения системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}^{(1)} = \frac{V_{\text{зад}}(t)}{\sqrt{1 + [1,699 + 0,903(x^{(1)} - 1)^2]^2}};$$

$$\dot{z}^{(1)} = \frac{V_{\text{зад}}(t)[1,699 + 0,903(x^{(1)} - 1)^2]}{\sqrt{1 + [1,699 + 0,903(x^{(1)} - 1)^2]^2}}$$

с начальными условиями:

$$x^{(1)}(t_0) = x_1; \quad z^{(1)}(t_0) = z_1.$$

Здесь $(x_1, z_1) = (1, 2)$ км – координаты ППМ₁.

Требуемое изменение угловой скорости поворота траектории БЛА на этом участке его маршрута согласно формуле (4.2.7) описывается выражением вида:

$$\dot{\Psi}_{\text{тр}}^{(1)}(t) = \frac{1,806V_{\text{зад}}(t)(x^{(1)}(t) - 1)}{\left[1 + \left(1,699 + 0,903(x^{(1)}(t) - 1)^2\right)^2\right]^{3/2}},$$

где $x^{(1)}(t)$ – решение приведенной выше системы дифференциальных уравнений.

Момент времени t_1 окончания движения БЛА по первому участку его составной траектории определяется как момент времени выполнения условий:

$$x^{(1)}(t_1) = x_2; \quad z^{(1)}(t_1) = z_2.$$

Аналогичным образом с использованием функций $S_2'(x)$, $S_2''(x)$ и $S_3'(x)$, $S_3''(x)$ записываются уравнения вида (4.2.39) и формулы для зависимостей $\dot{\Psi}_{\text{тр}}^{(k)}(t)$, $k = (\overline{2, 3})$.

Моменты времени t_2 и t_3 находятся из условий вида:

$$x^{(k-1)}(t_{k-1}) = x_k; \quad z^{(k-1)}(t_{k-1}) = z_k, \quad k = (\overline{3, 4}),$$

где (x_k, z_k) – координаты ППМ_k, $k = (\overline{3, 4})$.

Отметим, что наряду с алгебраическим представлением требуемых траекторий движения БЛА могут использоваться представления в виде трансцендентных функций. Например, траектория БЛА вида «змейка» описывается уравнением:

$$z = C_1 \sin C_2 x,$$

где C_1 и C_2 – параметры требуемой траектории [9].

Рассмотрим задачи формирования *переходных траекторий* движения БЛА, которые используются при перелетах между различными этапами их полетов, формировании и рос-

пуске их группировки [22], а также и при оперативной смене в полете действующих программ управления БЛА.

Будем считать, что при необходимости сохранения направления полета БЛА по смежным траекториям переходная траектория $z_0(x)$ с координатами точек начала (x_H, z_H) и конца (x_K, z_K) будет иметь вид, представленный на Рис. 4.14.

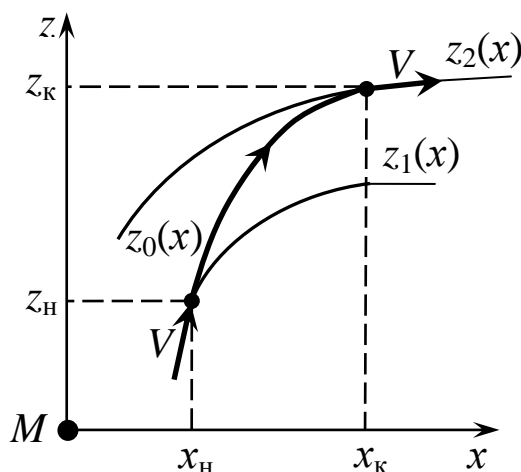


Рис. 4.14

На этом рисунке $z = z_1(x)$ и $z = z_2(x)$ – общий вид записи уравнений рассматриваемых смежных траекторий БЛА.

Особенностями переходной траектории $z_0(x)$ являются:

- заданные значения координат (x_H, z_H) и свободные (искомые) значения координат (x_K, z_K) ;
- необходимость обеспечения в точках (x_H, z_H) и (x_K, z_K) выполнения условий ее гладкости вида:

$$\begin{aligned} z_0(x_H) &= z_1(x_H), & z'_0(x_H) &= z'_1(x_H); \\ z_0(x_K) &= z_2(x_K), & z'_0(x_K) &= z'_2(x_K). \end{aligned} \quad (4.2.41)$$

- непрерывность и минимальная кривизна траектории $z_0(x)$ при $x \in [x_H, x_K]$.

Для формирования траектории $z_0(x)$, удовлетворяющей этим требованиям, будем использовать вспомогательную ва-

риационную задачу с подвижными границами, описанную в работе [9].

Введем функционал, определяющий интегральную оценку кривизны искомой функции $z_0(x)$:

$$J(x_K) = \int_{x_H}^{x_K} (z_0''(x))^2 dx \rightarrow \min_{z_0(x), x_K}. \quad (4.2.42)$$

Выражения (4.2.41), (4.2.42) описывают решаемую вариационную задачу со свободным правым концом [9].

Для функционала J дифференциальное уравнение Эйлера, определяющее искомую экстремаль, записывается как [9]:

$$z_0^{IV}(x) = 0.$$

Интегрируя это уравнение 4-го порядка, получаем функцию вида:

$$z_0(x) = c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4,$$

где c_i – постоянные интегрирования, $i = (\overline{1,4})$.

Производные от функции $z_0(x)$ записываются как:

$$\begin{aligned} z_0'(x) &= 3c_1 x^2 + 2c_2 x + c_3; \\ z_0''(x) &= 6c_1 x + 2c_2. \end{aligned} \quad (4.2.43)$$

В связи с тем, что правый конец экстремали $z_0(x)$ является свободным, будем использовать второе условие трансверсальности для такого класса вариационных задач [9]. Это условие с учетом того, что $F(x) = z_0''(x)$ и $F'_{z_0} = 0$ примет вид:

$$z_0''(x_K) = 0.$$

Подставляя это соотношение во второе выражение из состава формул (4.2.43), получим следующее уравнение:

$$3c_1 x_K + c_2 = 0.$$

Тогда задача построения переходной траектории $z_0(x)$ формулируется следующим образом: «Определить значения

параметров c_1, c_2, c_3, c_4, x_k из решения системы нелинейных алгебраических уравнений вида:

$$\begin{aligned} 3c_1x_k + c_2 &= 0; \\ c_1x_H^3 + c_2x_H^2 + c_3x_H + c_4 - z_1(x_H) &= 0; \\ 3c_1x_H^2 + 2c_2x_H + c_3 - z_1'(x_H) &= 0; \\ c_1x_k^3 + c_2x_k^2 + c_3x_H + c_4 - z_2(x_k) &= 0; \\ 3c_1x_k^2 + 2c_2x_k + c_3 - z_2'(x_k) &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.44)$$

Эта система уравнений 5-го порядка решается одним из известных численных методов, описанных в работе [9].

Сформированная траектория $z_0(x)$ записывается как:

$$z_0(x) = c_1^0 x^3 + c_2^0 x^2 + c_3^0 x + c_4^0, \quad x \in [x_H, x_k^0], \quad (4.2.45)$$

где $c_1^0, c_2^0, c_3^0, c_4^0, x_k^0$ – действительные корни системы (4.2.44).

Пример 4.9.

Пусть некоторый БЛА, совершая полет по прямолинейной траектории вида (4.2.11) с уравнением:

$$z_1(x) = 4x,$$

должен в точке с координатами $(x_H, z_H) = (2, 8)$ км перейти на траекторию полета, описываемую уравнением вида:

$$z_2(x) = 2x + 8.$$

Требуется построить уравнение переходной траектории $z_0(x)$ и определить координату x_k ее завершения.

В начальной точке $x_H = 2$ км значения функции $z_1(x)$ и ее производной будут соответственно равны:

$$z_1(x_H) = 8; \quad z_1'(x_H) = 4.$$

В искомой конечной точке x_k функции $z_2(x_k)$ и $z_2'(x_k)$ конкретизируются как:

$$z_2(x_k) = 2x_k + 8; \quad z_2'(x_k) = 2.$$

Тогда система уравнений (4.2.44) примет вид:

$$\begin{aligned}
3c_1x_K + c_2 &= 0; \\
8c_1 + 4c_2 + 2c_3 + c_4 - 8 &= 0; \\
12c_1 + 4c_2 + c_3 - 4 &= 0; \\
c_1x_K^3 + c_2x_K^2 + c_3x_K + c_4 - 2x_K - 8 &= 0; \\
3c_1x_K^2 + 2c_2x_K + c_3 - 2 &= 0.
\end{aligned}$$

Решая эту систему при начальном приближении:

$$c_{1,0} = c_{2,0} = c_{3,0} = c_{K,0} = 1,$$

получаем следующие значения ее корней:

$$c_1^0 = 0,019; \quad c_2^0 = -0,444; \quad c_3^0 = 5,556; \quad c_4^0 = -1,481; \quad x_K^0 = 8.$$

Таким образом, уравнение искомой переходной траектории вида (4.2.45) конкретизируется как:

$$z_0(x) = 0,019x^3 - 0,444x^2 + 5,556x - 1,481, \quad x \in [2,8], \text{ км.}$$

Координаты составной траектории БЛА, состоящей из участков функций $z_1(x)$, $z_0(x)$ и $z_2(x)$ при $x \in [1, 10]$ км приведены в Табл. 4.13.

В этой таблице в трех последних столбцах для подтверждения гладкости составной траектории справочно представлены значения производных $z_1'(t)$, $z_0'(t)$ и $z_2'(t)$ при $x \in [1, 10]$ км.

На Рис. 4.15 представлен вид смежных и переходной траекторий движения БЛА.

Таблица 4.13

x , км	z_1 , км	z_0 , км	z_2 , км	z_1'	z_0'	z_2'
1	4,000	—	—	4,000	—	—
2	8,000	8,000	—	4,000	4,000	—
3	—	11,685	—	—	3,389	—
4	—	14,815	—	—	2,889	—
5	—	17,500	—	—	2,500	—
6	—	19,852	—	—	2,222	—
7	—	21,981	—	—	2,056	—
8	—	24,000	24,000	—	2,000	2,000
9	—	—	26,000	—	—	2,000
10	—	—	28,000	—	—	2,000

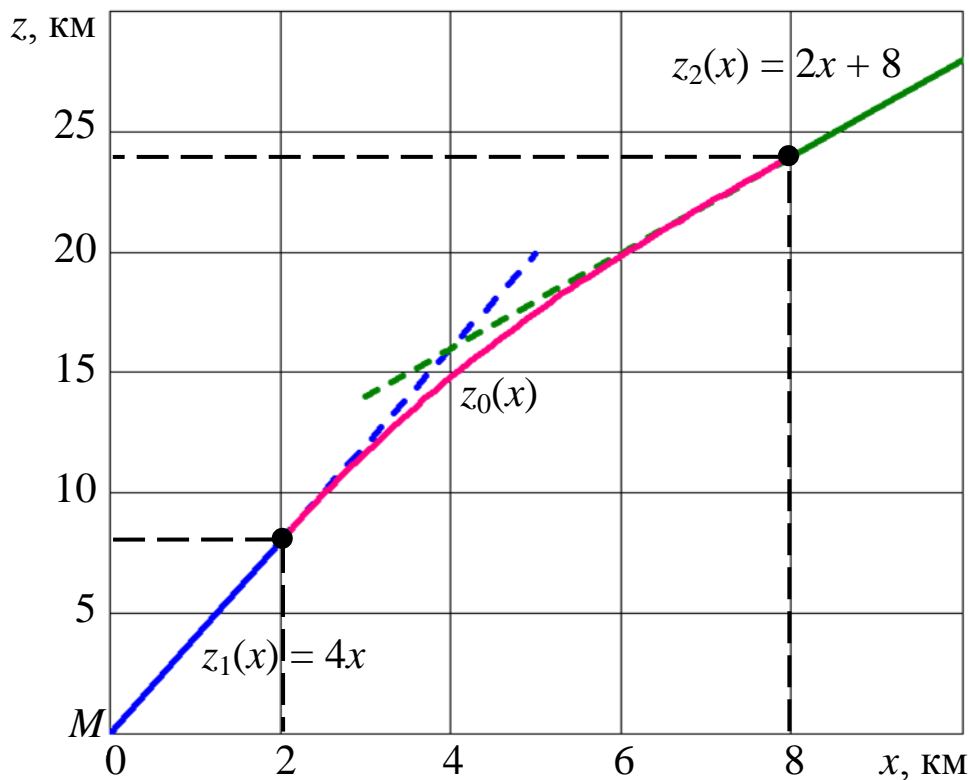


Рис. 4.15

Рассмотрим случай, когда БЛА из некоторой точки с координатами (x_0, z_0) должен переместиться гладким образом на заданную траекторию $z = z(x)$ (Рис. 4.16).

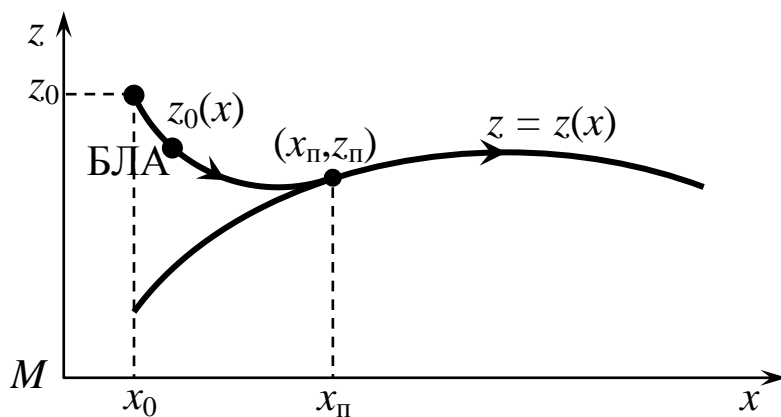


Рис. 4.16

На этом рисунке переходная траектория БЛА обозначена как $z_0(x)$.

Особенность этой задачи состоит в том, что наряду с формированием траектории $z_0(x)$ необходимо определить

наименее удаленные от начальной точки (x_0, z_0) координаты (x_{Π}, z_{Π}) точки перехода БЛА на заданную траекторию $z = z(x)$, удовлетворяющие при этом условиям вида:

$$z_0(x_{\Pi}) = z(x_{\Pi}); \quad z'_0(x_{\Pi}) = z'(x_{\Pi}). \quad (4.2.46)$$

Траекторию $z_0(x)$ будем формировать в виде полинома 2-й степени:

$$z_0(x) = C_1 x^2 + C_2 x + C_3. \quad (4.2.47)$$

Производная от этой функции имеет вид:

$$z'_0(x) = 2C_1 x + C_2. \quad (4.2.48)$$

Коэффициенты C_1, C_2, C_3 должны удовлетворять следующим равенствам:

$$\begin{aligned} C_1 x_0^2 + C_2 x_0 + C_3 &= z_0; \\ C_1 x_{\Pi}^2 + C_2 x_{\Pi} + C_3 &= z(x_{\Pi}); \\ 2C_1 x_{\Pi} + C_2 &= z'(x_{\Pi}). \end{aligned} \quad (4.2.49)$$

Для определения входящего в эти уравнения значения x_{Π} используем критерий вида:

$$J = (x - x_0)^2 \rightarrow \min. \quad (4.2.50)$$

Тогда для формирования траектории (4.2.47) будем решать следующую задачу условной оптимизации:

«Определить значения параметров C_1, C_2, C_3 и x_{Π} , доставляющих минимум целевой функции (4.2.50) при выполнении ограничений вида (4.2.49)».

Функция Лагранжа [9, 19] этой задачи записывается как:

$$\begin{aligned} L = L(C_1, C_2, C_3, x_{\Pi}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= (x_{\Pi} - x_0)^2 + \\ &+ \lambda_1 (C_1 x_0^2 + C_2 x_0 + C_3 - z_0) + \\ &+ \lambda_2 (C_1 x_{\Pi}^2 + C_2 x_{\Pi} + C_3 - z(x_{\Pi})) + \\ &+ \lambda_3 (2C_1 x_{\Pi} + C_2 - z'(x_{\Pi})), \end{aligned} \quad (4.2.51)$$

где λ_i – неопределенные множители Лагранжа, $i = (\overline{1, 3})$.

Необходимые условия минимума этой функции [9] имеют вид:

$$\frac{\partial L}{\partial C_1} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial C_2} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial C_3} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial x_{\Pi}} = 0; \quad (4.2.52)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = 0. \quad (4.2.53)$$

Выражения (4.2.52) конкретизируются как:

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 x_{\Pi}^2 + 2\lambda_3 x_{\Pi} &= 0; \\ \lambda_1 x_0 + \lambda_2 x_{\Pi} + \lambda_3 &= 0; \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0; \\ 2(x_{\Pi} - x_0) + \lambda_2(2C_1 x_{\Pi} + C_2 z'(x_{\Pi})) + \lambda_3(2C_1 - z''(x_{\Pi})) &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.54)$$

Искомые значения параметров $C_1^0, C_2^0, C_3^0, x^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \lambda_3^0$ определяются из численного решения системы нелинейных уравнений, определяемой выражениями (4.2.49) и (4.2.54).

При этом выбирается тот вариант корней, для которого выполняется условие вида:

$$x_{\Pi}^0 > x_0. \quad (4.2.55)$$

Пример 4.10.

Пусть БЛА должен из точки с координатами $(x_0, z_0) = (4, 20)$ км перейти на траекторию:

$$z(x) = 2x + 8, \quad (4.2.56)$$

для которой $z'(x) = 2$; $z''(x) = 0$ при всех $x \geq 4$.

Система уравнений (4.2.49), (4.2.54) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} 16C_1 + 4C_2 + C_3 &= 20; \\ C_1 x_{\Pi}^2 + C_2 x_{\Pi} + C_3 &= 2x_{\Pi} + 8; \\ 2C_1 x_{\Pi} + C_2 &= 2; \\ 16\lambda_1 + \lambda_2 x_{\Pi}^2 + 2\lambda_3 x_{\Pi} &= 0; \\ 4\lambda_1 + \lambda_2 x_{\Pi} + \lambda_3 &= 0; \\ 2(x_{\Pi} - 4) + \lambda_2(2C_1 x_{\Pi} + C_2 - 2) + 2\lambda_3 C_1 &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.57)$$

Система (4.2.57) является нелинейной системой алгебраических уравнений 7-го порядка, которая решалась соответствующим численным методом, описанным в работе [9].

Следует отметить неединственность получаемых решений, значения которых зависят от выбора их начальных приближений.

Проведенные вычислительные эксперименты показали следующие результаты:

1. При начальных приближениях:

$$C_{1,0} = 10; \quad C_{2,0} = C_{3,0} = 1; \quad x_{п,0} = 4; \quad \lambda_{1,0} = \lambda_{2,0} = \lambda_{3,0} = 0,5$$

корни системы (4.2.57) имеют следующие значения:

$$C_1^0 = 1,726; \quad C_2^0 = -6,551; \quad C_3^0 = 18,593; \quad x_{п}^0 = 2,478; \\ \lambda_1^0 = -0,359; \quad \lambda_2^0 = 0,223; \quad \lambda_3^0 = 0,882.$$

2. Изменение значения одного начального приближения $x_{п,0}$ на значение, равное 5 дает корни:

$$C_1^0 = 1,638; \quad C_2^0 = -16,219; \quad C_3^0 = 58,675; \quad x_{п}^0 = 5,563; \\ \lambda_1^0 = -0,849; \quad \lambda_2^0 = 0,782; \quad \lambda_3^0 = -0,954.$$

3. При задании $x_{п,0} = 10$ корни будут равны:

$$C_1^0 = 0,867; \quad C_2^0 = -8,660; \quad C_3^0 = 40,770; \quad x_{п}^0 = 6,148; \\ \lambda_1^0 = -1,773; \quad \lambda_2^0 = 1,556; \quad \lambda_3^0 = -2,477.$$

Из полученных вариантов следует, что:

а) основным критичным начальным приближением является значение $x_{п,0}$, которое должно быть больше значения x_0 .

б) условию (4.2.55) удовлетворяют варианты №№ 2, 3,

в) из этих вариантов требованию (4.2.50) соответствует вариант №2.

Выражения (4.2.47) и (4.2.48) для этого варианта конкретизируется как:

$$z_0(x) = 1,638x^2 - 16,219x + 58,675; \quad (4.2.58)$$

$$z'_0(x) = 3,276x - 16,219, \quad x \in [4; 5,563];$$

Значение z_{Π}^0 в точке перехода БЛА на траекторию (4.2.56) будет равно:

$$z_{\Pi} = 2x_{\Pi}^0 + 8 = 2 \cdot 5,563 + 8 = 19,126 \text{ км.}$$

При этом:

$$z_0(5,563) = 19,126; \quad z'_0(5,563) = 2,000.$$

Результаты вычислений функций (4.2.56) и (4.2.58) приведены в Табл. 4.14. Графики траекторий $z(x)$ и $z_0(x)$ представлены на Рис. 4.17.

Одно из практических применений рассмотренной задачи связано с реализацией воздушного старта БЛА с самолета-носителя (см. Разд. 3.5). В этом случае БЛА должен из точки (x_0, y_0) запуска двигателя по траектории $y_0(x)$ выйти в точке (x_{Π}, y_{Π}) на заданную для него траекторию полета $y(x)$, $x \geq x_{\Pi}$.

Таблица 4.14

x , км	z , км	z_0 , км	$z'_0(x)$
4,0	16,0	20,000	-3,119
4,2	16,4	19,442	-2,464
4,4	16,8	19,015	-1,809
4,6	17,2	18,718	-1,154
4,8	17,6	18,553	-0,499
5,0	18,0	18,519	0,156
5,2	18,4	18,616	0,811
5,4	18,8	18,843	1,466
5,563	19,126	19,126	2,000

Другим приложением этой задачи является возвращение БЛА на требуемую траекторию полета $z(x)$ или $y(x)$ при ее резком возмущении (например, резкий порыв ветра), при котором БЛА оказывается в точке (x_0, z_0) или (x_0, y_0) и его САУ не может отработать существующее отклонение от заданной траектории.

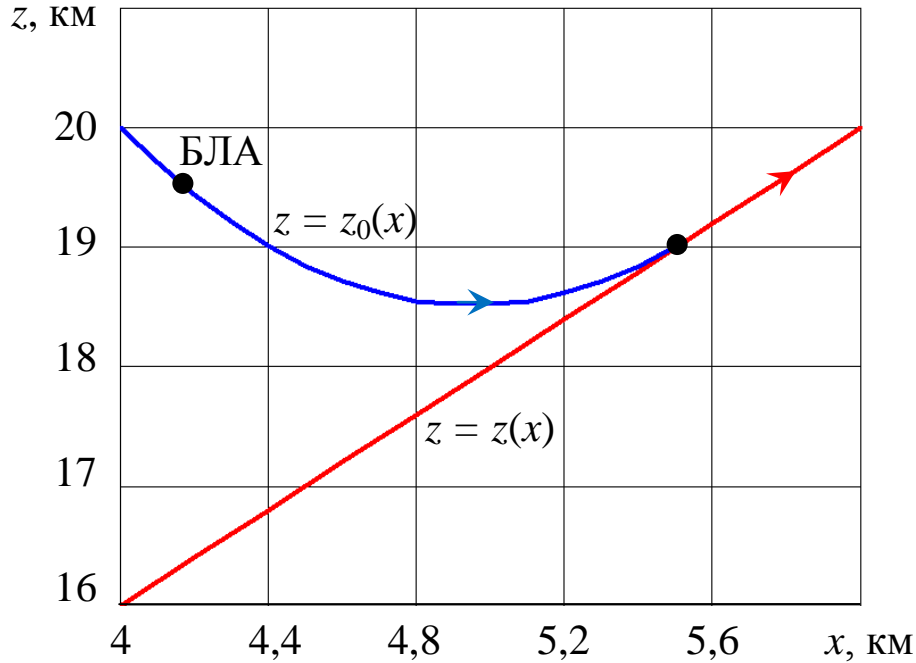


Рис. 4.17

В рассмотренных выше случаях формирование переходных траекторий и управлений для их реализации должно осуществляться в бортовом вычислительном комплексе САУ БЛА.

4.3. Пространственные траектории движения БЛА

Для описания пространственных траекторий БЛА могут быть использованы следующие существующие подходы [17, 19]:

1. Параметрическое представление траекторий вида:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t), \quad t \in [t_0, t_k] \quad (4.3.1)$$

в земной СК.

2. Классическое представление траекторий в форме пространственной кривой как линии пересечения двух поверхностей:

$$F_1(x, y, z) = 0; \quad F_2(x, y, z) = 0, \quad (4.3.2)$$

построенных в земной СК.

На наш взгляд, такие представления в настоящее время не обладают практической ценностью при их формировании специалистами по управлению БЛА из-за отсутствия четких методик адекватного выбора функций, входящих в приведенные выше выражения (4.3.1) и (4.3.2) [9].

В данном разделе предлагается при формировании координатного представления вида (4.3.2) использовать проекционный подход, суть которого заключается в задании такими специалистами проекций формируемой траектории на одну или обе из координатных плоскостей в виде плоской кривой с ее последующим преобразованием в пространственную кривую, описывающую требуемую траекторию полета БЛА. Далее на ее основе формируется параметрическое представление траектории БЛА вида (4.3.1).

Кроме этого, предлагается метод непосредственного формирования параметрического представления требуемой траектории полета БЛА вида (4.3.1), который отсутствует в существующей литературе [9, 16, 17, 22].

Будем считать, что требуемая пространственная траектория формируется в специально выбранной маневренной СК ($Mx_My_Mz_M$). В последующем для простоты изложения индекс « M » у применяемых координат и переменных будет опущен.

Рассмотрим различные методы формирования пространственной траектории БЛА.

Пусть в общем случае проекция искомой траектории на координатную плоскость Mxz задана в неявной форме уравнением вида:

$$\Phi(x, z) = 0. \quad (4.3.3)$$

Геометрически кривая (4.3.3) представляет собой в СК $Mxuz$ направляющую криволинейного цилиндра с образующей, параллельной оси Mu [19].

Будем считать заданным требуемый для выполнения полетного задания закон изменения высоты полета БЛА:

$$y_{\text{тр}} = y_{\text{тр}}(t), \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (4.3.4)$$

В этом случае пространственная траектория движения БЛА будет иметь вид, представленный на Рис. 4.18.

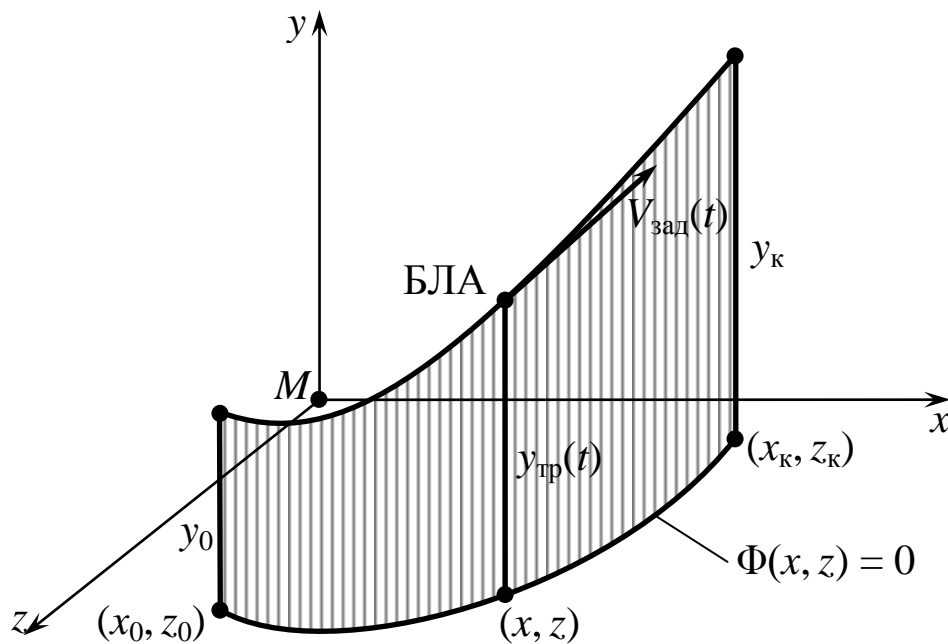


Рис. 4.18

На этом рисунке $V_{\text{зад}}(t)$ – требуемый закон изменения скорости БЛА, определенный методами Разд. 4.1; (x_0, y_0, z_0) и (x_k, y_k, z_k) – координаты начальной и конечной точек формируемой траектории БЛА, которые должны удовлетворять условиям:

$$\begin{aligned} \Phi(x_0, z_0) = 0; \quad \Phi(x_k, z_k) = 0; \\ y_0 = y_{\text{тр}}(t_0); \quad y_k = y_{\text{тр}}(t_k). \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Рассмотрим методы формирования требуемого закона (4.3.4) изменения высоты полета БЛА.

В общем случае он задается как функция вида:

$$y_{\text{тр}}(t) = f(t, c_1, c_2, \dots, c_n),$$

где коэффициенты c_i и вид функции f выбираются из требуемых условий полета БЛА.

Если по условиям проведения операции требуется, чтобы выполнялась только вторая группа условий из состава соотношений (4.3.5), то можно использовать линейную зависимость вида:

$$y_{\text{тр}}(t) = c_1 t + c_2, \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (4.3.6)$$

Постоянные c_1, c_2 определяются из уравнения прямой, проходящей через две заданные точки (t_0, y_0) и (t_k, y_k) [19]:

$$\frac{y_{\text{тр}}(t) - y_0}{y_k - y_0} = \frac{t - t_0}{t_k - t_0}.$$

Проводя необходимые преобразования, получим:

$$y_{\text{тр}}(t) = \frac{y_k - y_0}{t_k - t_0} t + y_0 + \frac{y_k - y_0}{t_k - t_0} t_0.$$

Отсюда получаем следующие формулы для вычисления искомых коэффициентов, входящих в выражение (4.3.6):

$$c_1 = \frac{y_k - y_0}{t_k - t_0}; \quad c_2 = y_0 - \frac{y_k - y_0}{t_k - t_0} t_0. \quad (4.3.7)$$

Пример 4.10.

Пусть БЛА должен с высоты $y_0 = 2000$ м. в момент времени $t_0 = 10$ с. снизиться к моменту времени $t_k = 30$ с. до высоты $y_k = 1000$ м.

Требуется построить закон (4.3.6) изменения высоты БЛА.

Используя формулы (4.3.7), имеем:

$$c_1 = \frac{1000 - 2000}{30 - 10} = -50; \quad c_2 = 2000 - \frac{1000 - 2000}{30 - 10} \cdot 10 = 2500.$$

Тогда выражение (4.3.6) конкретизируется как:

$$y_{\text{тр}}(t) = -50t + 2500, \quad t \in [10, 30], \text{ с.}$$

Если в интервале времени $[t_0, t_k]$ имеется промежуточный момент времени τ , в который БЛА должен иметь высоту полета $y_{\text{тр}}(\tau)$, то закон (4.3.4) может быть представлен в виде квадратичной зависимости:

$$y_{\text{тр}}(t) = c_1 t^2 + c_2 t + c_3, \quad t \in [t_0, t_k], \quad (4.3.8)$$

в которой коэффициенты c_1 , c_2 и c_3 вычисляются как решения следующей системы линейных алгебраических уравнений 3-го порядка:

$$\begin{aligned} c_1 t_0^2 + c_2 t_0 + c_3 &= y_0; \\ c_1 \tau^2 + c_2 \tau + c_3 &= y_{\text{тр}}(\tau); \\ c_1 t_k^2 + c_2 t_k + c_3 &= y_k. \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

В общем случае решение этой системы осуществляется известными численными методами [9].

Пример 4.11.

Пусть в условиях Примера 4.10 заданы значения $\tau = 20$ с. и $y_{\text{тр}}(20) = 3000$ м. Требуется построить зависимость вида (4.3.8).

Система уравнений (4.3.9) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} 10^2 c_1 + 10c_2 + c_3 &= 2000; \\ 20^2 c_1 + 20c_2 + c_3 &= 3000; \\ 30^2 c_1 + 30c_2 + c_3 &= 1000. \end{aligned}$$

Численное решение этой системы дает следующие результаты:

$$c_1 = -15; \quad c_2 = 550; \quad c_3 = -2000.$$

Таким образом, закон изменения высоты полета БЛА вида (4.3.8) конкретизируется как:

$$y_{\text{тр}}(t) = -15t^2 + 550t - 2000, \quad t \in [10, 30], \text{ с.} \quad (4.3.10)$$

Производная от функции (4.3.10) имеет вид:

$$\dot{y}_{\text{тр}}(t) = -30t + 550, \quad t \in [10, 30], \text{ с.} \quad (4.3.11)$$

Приравнивая к нулю это выражение, получаем, что БЛА достигает максимальной высоты полета в момент времени:

$$t_{\text{max}} = \frac{550}{30} = 18,33 \text{ с.}$$

Эта высота будет равна:

$$y_{\text{тр}}(t_{\text{max}}) = -15 \cdot 18,33^2 + 550 \cdot 18,33 - 2000 = 3039,83 \text{ м.}$$

При дальнейшем изложении предлагаемого подхода будем использовать кинематические уравнения пространственного движения БЛА:

$$\dot{x} = V \cos \theta \cos \Psi; \quad (4.3.12)$$

$$\dot{y} = V \sin \theta; \quad (4.3.13)$$

$$\dot{z} = V \cos \theta \sin \Psi. \quad (4.3.14)$$

Определим функции $\theta_{\text{тр}}(t)$, $\dot{\theta}_{\text{тр}}(t)$, $\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t)$, $t \in [t_0, t_k]$, обеспечивающие движение БЛА по траектории, изображенной на Рис. 4.18.

Подставляя в уравнение (4.3.13) функцию $V_{\text{зад}} = V_{\text{зад}}(t)$ и производную от функции (4.3.4), имеем:

$$\sin \theta = \dot{y}_{\text{тр}} / V_{\text{зад}}. \quad (4.3.15)$$

Отсюда получаем, что:

$$\theta_{\text{тр}}(t) = \arcsin(\dot{y}_{\text{тр}}(t) / V_{\text{зад}}(t)). \quad (4.3.16)$$

Производная от этой функции будет иметь следующий вид:

$$\dot{\theta}_{\text{тр}}(t) = \frac{\ddot{y}_{\text{тр}}(t)V_{\text{зад}}(t) - \dot{y}_{\text{тр}}(t)\dot{V}_{\text{зад}}(t)}{V_{\text{зад}}(t)\sqrt{V_{\text{зад}}^2(t) - \dot{y}_{\text{тр}}^2(t)}}. \quad (4.3.17)$$

Используя выражение (4.3.15), вычислим функцию:

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{\sqrt{V_{\text{зад}}^2 - \dot{y}_{\text{тр}}^2}}{V_{\text{зад}}}. \quad (4.3.18)$$

Выше (см. Разд. 4.2) были использованы следующие представления тригонометрических функций угла Ψ через производные функции $\Phi(x, z)$:

$$\cos \Psi = \frac{\Phi_z}{\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_z^2}}; \quad \sin \Psi = -\frac{\Phi_x}{\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_z^2}}. \quad (4.3.19)$$

Откуда:

$$\Psi(x, z) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\Phi_x}{\Phi_z}\right).$$

Подставляя выражения (4.3.18), (4.3.19) в уравнения (4.3.12) и (4.3.14) и добавляя к ним очевидное требование $\dot{y} = \dot{y}_{\text{тр}}(t)$, получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \Phi_z(x, z) \sqrt{\frac{V_{\text{зад}}^2(t) - \dot{y}_{\text{тр}}^2(t)}{\Phi_x^2(x, z) + \Phi_z^2(x, z)}}; \\ \dot{y} &= \dot{y}_{\text{тр}}(t); \\ \dot{z} &= -\Phi_x(x, z) \sqrt{\frac{V_{\text{зад}}^2(t) - \dot{y}_{\text{тр}}^2(t)}{\Phi_x^2(x, z) + \Phi_z^2(x, z)}}, \\ t &\in [t_0, t_k] \end{aligned} \quad (4.3.20)$$

для получения параметрического представления траектории БЛА в форме (4.3.1).

Начальные условия для этой системы имеют вид:

$$x(t_0) = x_0; \quad y(t_0) = y_{\text{тр}}(t_0); \quad z(t_0) = z_0, \quad (4.3.21)$$

где значения x_0, z_0 должны удовлетворять первым двум равенствам из состава выражений (4.3.5).

Условие существования решений задачи (4.3.20), (4.3.21) представляется как:

$$V_{\text{зад}}(t) > \max_{t \in [t_0, t_k]} \{\dot{y}_{\text{тр}}(t)\}, \quad t \in [t_0, t_k].$$

Пример 4.12.

Пусть проекция вида (4.3.3) требуемой пространственной траектории движения перспективного сверхзвукового БЛА на координатную плоскость Mxz имеет вид окружности радиуса $R = 500$ м:

$$\Phi(x, z) = x^2 + z^2 - 250\,000 = 0.$$

Будем считать заданными скорость $V_{\text{зад}} = 400$ м/с полета БЛА и требуемый закон изменения его высоты, описываемый выражениями (4.3.10) и (4.3.11) из Примера 4.11.

Для формирования параметрического представления траектории БЛА вида (4.3.1) запишем систему уравнений (4.3.20):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= z \sqrt{\frac{400^2 - (-30t + 550)^2}{x^2 + z^2}}; \\ \dot{y} &= -30t + 550; \\ \dot{z} &= -x \sqrt{\frac{400^2 - (-30t + 550)^2}{x^2 + z^2}}, \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

которую будем решать на интервале времени $[10; 30]$ с. (см. Пример 4.11).

Начальные условия вида (4.3.21) для этой системы конкретизируются как:

$$x(10) = 500; \quad y(10) = 2000; \quad z(10) = 0. \quad (4.3.23)$$

Отметим, что приведенные выше условия существования решения задачи выполняются, так как $V_{\text{зад}}$ больше значения $\dot{y}_{\text{max}} = 250$ м/с.

Результаты численного решения системы уравнений (4.3.22) с начальными условиями (4.3.23) приведены в Табл. 4.15. Вид траектории рассматриваемого БЛА представлен на Рис. 4.19.

В частном случае зависимость вида (4.3.4) может быть представлена как:

$$y_{\text{тр}}(t) = y_0 + V_y(t - t_0), \quad t \in [t_0, t_k],$$

где V_y – вертикальная скорость рассматриваемого образца БЛА.

Таблица 4.15

№	t , с.	x , м	y , м	z , м
0	10	500	2000	0
1	11	398,825	2235	-301,137
2	12	117,479	2440	-485,417
3	13	-231,337	2615	-442,200
4	14	-469,644	2760	-167,518
5	15	-453,870	2875	205,316
6	16	-176373	2960	465,331
7	17	208,520	3015	451,248
8	18	468,807	3040	163,661
9	19	442,558	3035	-224,002
10	20	146,420	3000	-473,387
11	21	-235,386	2935	-435,512
12	22	-473,795	2840	-142,117
13	23	-439,416	2715	226,419
14	24	-169,378	2560	464,126
15	25	177,251	2375	460,991
16	26	428,149	2160	246,015
17	27	490,330	1915	-58,159
18	28	375,885	1640	-320,218
19	29	165,607	1335	-465,251
20	30	-48,998	1000	-491,477

При использовании такой зависимости уравнения (4.3.20) конкретизируются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \Phi_z(x, z) \sqrt{\frac{V_{\text{зад}}^2(t) - V_y^2}{\Phi_x^2(x, z) + \Phi_z^2(x, z)}}; \\ \dot{y} &= V_y; \\ \dot{z} &= -\Phi_x(x, z) \sqrt{\frac{V_{\text{зад}}^2(t) - V_y^2}{\Phi_x^2(x, z) + \Phi_z^2(x, z)}}. \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

Из этих выражений следует, что при $V_y = 0$ получаем ранее построенную систему уравнений вида (4.2.31).

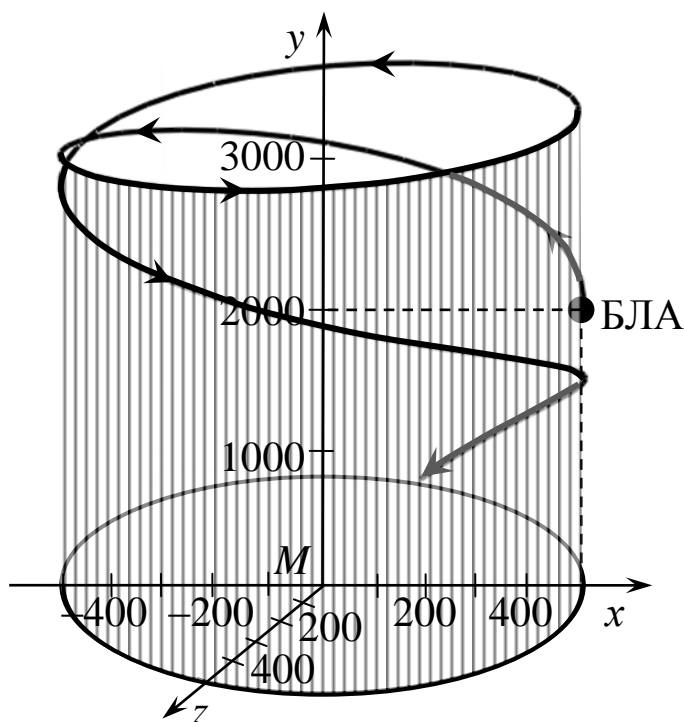


Рис. 4.19

Пример 4.13.

Пусть известно, что рассматриваемый БЛА имеет вертикальную скорость $V_y = 5$ м/с. Будем использовать следующие исходные данные:

$$R = 90 \text{ м}; \quad V_{\text{зад}} = 40 \text{ м/с}; \quad t_0 = 10 \text{ с};$$

$$x_0 = 90 \text{ м}; \quad y_0 = 2000 \text{ м}; \quad z_0 = 0 \text{ м}.$$

Дополнительное требование состоит в том, что пространственная траектория должна представлять собой винтовую линию радиуса R с числом оборотов БЛА не менее четырех. Такие траектории БЛА используются для мониторинга воздушного пространства [9].

Вычислим конечный момент времени полета БЛА:

$$t_{\text{к}} = 10 + 4 \cdot \frac{2\pi \cdot 90}{40} = 66,52 \text{ с}.$$

Система уравнений (4.3.24) примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= z \sqrt{\frac{40^2 - 5^2}{x^2 + z^2}}; \\ \dot{y} &= 5; \\ \dot{z} &= -x \sqrt{\frac{40^2 - 5^2}{x^2 + z^2}}, \quad t \in [10; 66,5] \text{ с.} \end{aligned}$$

Решение этой системы с начальными условиями:

$$x(10) = 90; \quad y(10) = 2000; \quad z(10) = 0$$

представлено в Табл. 4.16 и на Рис. 4.20.

Таблица 4.16

№	t , с.	x , м.	y , м.	z , м.
0	10	90	2000	0
1	12,825	28,913	2014	-84,012
2	15,650	-69,910	2028	-52,832
3	18,475	-70,005	2042	50,518
4	21,300	28,749	2057	79,930
5	24,125	83,144	2071	-7,173
6	26,950	12,253	2085	-80,920
7	29,775	-74,926	2099	-28,291
8	32,600	-40,376	2113	66,927
9	35,425	58,564	2127	48,478
10	38,250	52,888	2141	-51,217
11	41,075	-45,942	2155	-53,971
12	43,900	-51,897	2170	43,430
13	46,725	43,896	2184	46,337
14	49,550	36,178	2198	-46,665
15	52,375	-49,037	2212	-19,610
16	55,200	3,763	2226	44,105
17	58,025	21,440	2240	-24,587
18	60,850	-16,985	2254	12,025
19	63,675	9,339	2268	-15,234
20	66,500	-0,623	2283	18,381

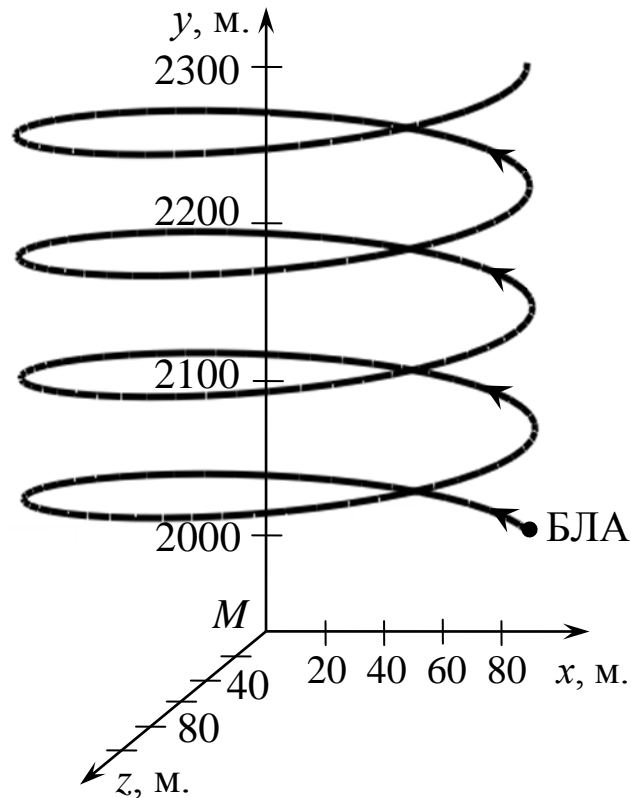


Рис. 4.20

Требуемый закон изменения угловой скорости $\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t)$ формируется с помощью подхода, описанного в Разд. 4.2, в котором используются функции $x = x(t)$, $z = z(t)$, полученные при решении задачи Коши (4.3.20), (4.3.21).

В некоторых режимах применения БЛА-АЛЦ [10] их траектории должны располагаться в заданной плоскости. Иллюстрацией к этому является рассмотрение групповых полетов боевых вертолетов в наклонной плоскости [49].

Пусть требуется, чтобы пространственная траектория БЛА была расположена на плоскости, которая представляется следующим уравнением [19]:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (4.3.25)$$

Кроме общего уравнения плоскости этого вида плоскость полета БЛА может быть задана ее уравнением в отрезках [19]:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (4.3.26)$$

где a, b, c – длины отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях Mx, My, Mz .

Нормальное уравнение плоскости полета БЛА записывается как [19]:

$$x \cos \alpha_x + y \cos \alpha_y + z \cos \alpha_z - p = 0. \quad (4.3.27)$$

Здесь p – длина перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость; $\cos \alpha_x, \cos \alpha_y, \cos \alpha_z$ – направляющие косинусы этого перпендикуляра; $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ – углы между перпендикуляром и положительными направлениями осей Mx, My и Mz . При этом должно выполняться равенство:

$$\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y + \cos^2 \alpha_z = 1. \quad (4.3.28)$$

Формулы связи между уравнениями видов (4.3.25) и (4.3.26) имеют вид:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{a}; & B &= \frac{1}{b}; \\ C &= \frac{1}{c}; & D &= -1. \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

Значения углов $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ и параметра p с использованием уравнения плоскости, заданного в форме (4.3.25), вычисляются из следующих соотношений [19]:

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \arccos \left(\frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right); \\ \alpha_y &= \arccos \left(\frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right); \\ \alpha_z &= \arccos \left(\frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right); \end{aligned} \quad (4.3.30)$$

$$p = \frac{D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

где знак перед корнем выбирается так, чтобы параметр p был положительным.

В случае если коэффициент $D = 0$, то есть плоскость проходит через точку M , то выбор знака в выражениях (4.3.30) произволен [19].

Положение в пространстве введенного выше перпендикуляра длиной p может на практике быть задано его углами азимута φ и места λ .

В этом случае имеем, что:

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \arccos(\cos \varphi \cos \lambda); \\ \alpha_y &= \frac{\pi}{2} - \lambda; \\ \alpha_z &= \arccos(\sin \varphi \cos \lambda). \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

Ниже будут использованы общее уравнение плоскости в форме (4.3.26) и выражения (4.3.27), (4.3.30) или (4.3.31).

Будем считать, что проекция искомой траектории на координатную плоскость Mxz описывается уравнением (4.3.3).

В этом случае формируемая траектория получается как представленная на Рис. 4.21 линия пересечения цилиндра (4.3.3) с плоскостью (4.3.25).

Рассмотрим метод формирования функций $\theta_{\text{тр}}(t)$, $\dot{\theta}_{\text{тр}}(t)$, $\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t)$, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, учитывающий отмеченную выше специфику требуемой пространственной траектории полета БЛА.

Преобразуем выражение (4.3.25) к виду:

$$y = -\frac{1}{B}(Ax + Cz + D). \quad (4.3.32)$$

Как было отмечено выше, уравнение (4.3.3) определяет неявно заданную функцию $z = z(x)$.

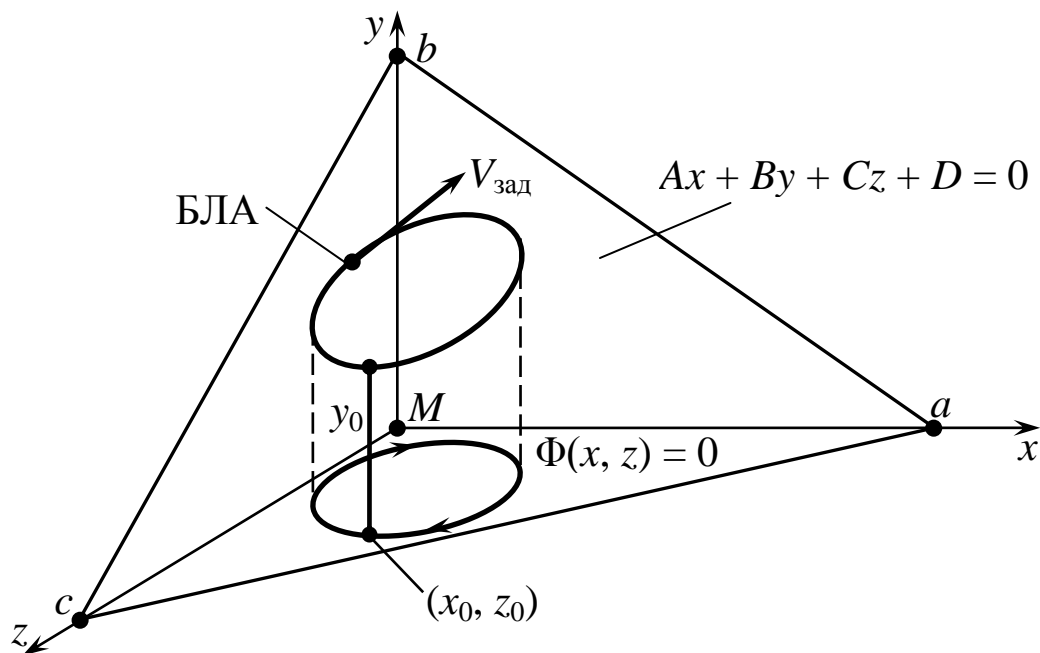


Рис. 4.21

С учетом этого перепишем полученную формулу как:

$$y = -\frac{1}{B}(Ax + Cz(x) + D).$$

Дифференцируя это выражение по x и заменяя производную z' правой частью формулы (4.2.32), получим:

$$y' = -\frac{1}{B} \left(A - \frac{C\Phi_x(x, z)}{\Phi_z(x, z)} \right).$$

Преобразуем эту функцию к виду:

$$y' = \frac{C\Phi_x(x, z) - A\Phi_z(x, z)}{B\Phi_z(x, z)}, \quad (4.3.33)$$

Из очевидного соотношения:

$$\operatorname{tg} \theta = y'$$

с использованием выражения (4.3.33) требуемый закон $\theta_{\text{тр}}(t)$ изменения угла наклона искомой пространственной траектории БЛА можно представить как:

$$\theta_{\text{тр}}(t) = \text{arctg} \left(\frac{C\Phi_x(x(t), z(t)) - A\Phi_z(x(t), z(t))}{B\Phi_z(x(t), z(t))} \right), \quad (4.3.34)$$

$$t \in [t_0, t_k].$$

В этом выражении функции $x = x(t)$ и $z = z(t)$ являются параметрическим представлением изменения координат БЛА во времени.

Функцию $\dot{\theta}_{\text{тр}}(t)$ можно приближенно численно определять по формуле:

$$\dot{\theta}_{\text{тр}}(t) \cong \frac{\theta_{\text{тр}}(t + \Delta t) - \theta_{\text{тр}}(t)}{\Delta t}, \quad t \in [t_0, t_k], \quad (4.3.35)$$

где Δt – достаточно малая величина приращения времени t .

При недостаточной точности приведенного выше представления производной $\dot{\theta}_{\text{тр}}(t)$ могут быть использованы другие формулы численного дифференцирования функции (4.3.34), приведенные в работе [19].

В рассматриваемом виде пространственных траекторий полета БЛА вектор $V_{\text{зад}}(t)$ его скорости должен лежать в плоскости (4.3.25), а точка с координатами $x = x(t)$, $z = z(t)$, удовлетворять уравнению (4.3.3) и двигаться по координатной плоскости Mxz (см. Рис. 4.21). При этом вектор скорости $V_{\text{зад}}(t)$ точки будет иметь компоненты $V_{x \text{ зад}}(t)$ и $V_{z \text{ зад}}(t)$, которые являются проекциями этого вектора на оси Mx и Mz .

Из определения углов α_x и α_z следует, что:

$$V_{x \text{ зад}}(t) = V_{\text{зад}}(t) \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_x \right) = V_{\text{зад}}(t) \sin \alpha_x;$$

$$V_{z \text{ зад}}(t) = V_{\text{зад}}(t) \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_z \right) = V_{\text{зад}}(t) \sin \alpha_z,$$
(4.3.36)

где α_x и α_z вычисляются по формулам (4.3.19) или (4.3.20).

В этом случае дифференциальные уравнения для вычисления функций $x = x(t)$ и $z = z(t)$ будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{V_{\text{зад}}(t) \sin \alpha_x \Phi_z(x, z)}{\sqrt{\Phi_x^2(x, z) + \Phi_z^2(x, z)}}; \\ \dot{z} &= -\frac{V_{\text{зад}}(t) \sin \alpha_z \Phi_x(x, z)}{\sqrt{\Phi_x^2(x, z) + \Phi_z^2(x, z)}}.\end{aligned}\tag{4.3.37}$$

В общем случае эта система интегрируется при начальных условиях:

$$x(t_0) = x_0, \quad z(t_0) = z_0 \tag{4.3.38}$$

выбранным численным методом [9] с некоторым достаточно малым шагом Δt , значение которого должно использоваться в формуле (4.3.35).

Заметим, что если плоскость полета БЛА будет параллельна координатной плоскости Mxz , то углы $\alpha_x = \alpha_z = \pi/2$.

В этом случае из выражений (4.3.27) и (4.3.28) следует, что полученное уравнение плоскости:

$$y - p = 0$$

соответствует полету БЛА в горизонтальной плоскости на высоте $y = p$.

Подставляя приведенные выше значения углов α_x и α_z в выражения (4.3.37), получаем систему дифференциальных уравнений (4.2.31), описывающую движение БЛА в горизонтальной плоскости.

Функция $\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t)$ формируется путем применения подхода, изложенного в Разд. 4.2, с использованием результатов интегрирования системы (4.3.37) и заменой сомножителя $V_{\text{зад}}(t)$ функцией $V_{x \text{ зад}}(t)$ из состава формул (4.3.36).

Изменение во времени координаты $y(t)$ при движении БЛА со скоростью $V_{\text{зад}}(t)$ по заданной плоскости его полета можно вычислить двумя способами.

Первый способ использует выражение (4.3.32), которое записывается в следующей форме:

$$y(t) = -\frac{1}{B}(Ax(t) + Cz(t) + D), \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (4.3.39)$$

Здесь $x(t)$ и $z(t)$ – предварительно полученные решения задачи Коши (4.3.37), (4.3.38).

Во втором способе функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ получаются из решения системы дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{V_{\text{зад}}(t) \sin \alpha_x \Phi_z(x, z)}{\sqrt{\Phi_x^2(x, z) + \Phi_z^2(x, z)}}; \\ \dot{y} &= -\frac{V_{\text{зад}}(t)[A \sin \alpha_x \Phi_z(x, z) - C \sin \alpha_z \Phi_x(x, z)]}{B \sqrt{\Phi_x^2(x, z) + \Phi_z^2(x, z)}}; \\ \dot{z} &= -\frac{V_{\text{зад}}(t) \sin \alpha_z \Phi_x(x, z)}{\sqrt{\Phi_x^2(x, z) + \Phi_z^2(x, z)}}, \quad t \in [t_0, t_k]. \end{aligned} \quad (4.3.40)$$

с начальными условиями:

$$x(t_0) = x_0; \quad y(t_0) = y_0; \quad z(t_0) = z_0, \quad (4.3.41)$$

где значение y_0 вычисляется как:

$$y_0 = -\frac{1}{B}(Ax_0 + Cz_0 + D). \quad (4.3.42)$$

Второе уравнение системы (4.3.40) получено путем дифференцирования по времени выражения (4.3.39), которое приводит к соотношению вида:

$$\dot{y} = -\frac{1}{B}(A\dot{x} + C\dot{z}),$$

и подстановки в это выражение правых частей уравнений (4.3.37).

Пример 4.14.

Пусть уравнение требуемой плоскости движения БЛА, представленное в форме (4.3.26), имеет вид:

$$\frac{x}{10} + \frac{y}{10} + \frac{z}{10} = 1,$$

где значения отрезков a, b, c заданы в километрах.

Согласно формулам (4.3.29) имеем следующие значения параметров ее описания в форме (4.3.25):

$$A = B = C = 0,1; \quad D = -1.$$

Будем считать, что проекция пространственной траектории БЛА на координатную плоскость Mxz представляет собой окружность радиуса $R = 4$ км с центром в точке M .

Уравнение этой кривой имеет вид:

$$x^2 + z^2 - 16 = 0.$$

В качестве начальных координат $x(t)$ и $z(t)$ выберем значения:

$$x_0 = 4 \text{ км}; \quad z_0 = 0 \text{ км}.$$

Начальное значение координаты $y(t)$, вычисленное по формуле (4.3.42), будет равно:

$$y_0 = -\frac{1}{0,1} (0,1 \cdot 4 + 0,1 \cdot 0 - 1) = 6 \text{ км}.$$

Для построения системы уравнений (4.3.40) определим значения углов α_x и α_z . Используя выражения (4.3.30), получим:

$$\alpha_x = \arccos \left(\frac{0,1}{\sqrt{0,1^2 + 0,1^2 + 0,1^2}} \right) = \arccos 0,577 = 54,735^\circ;$$

$$\sin \alpha_x = 0,816.$$

Из этих выражений и равенств $A = C$ следует, что $\alpha_x = \alpha_z$.

Считая $V_{\text{зад}}(t) = 100$ км/ч, $t \in [0, t_k]$ ч, а также имея, что

$$\Phi_x(x, z) = 2x; \quad \Phi_z(x, z) = 2z,$$

конкретизируем систему уравнений (4.3.40) и начальные условия (4.3.41) в виде следующих выражений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{81,6z}{\sqrt{x^2 + z^2}}; \\ \dot{y} &= -\frac{81,6(z-x)}{\sqrt{x^2 + z^2}}; \\ \dot{z} &= -\frac{81,6x}{\sqrt{x^2 + z^2}}, \quad t \in [0, t_k] \text{ ч,} \\ x(0) &= 4; \quad y(0) = 6; \quad z(0) = 0. \end{aligned}$$

Конечное значение времени t_k полета БЛА будем определять из условия: $x(t_k) = 4$ км.

Численное решение этой задачи приведено в Табл. 4.17 и на Рис. 4.22.

Таблица 4.17

№	t , ч.	x , км	y , км	z , км
0	0	4	6	0
1	0,015	3,804	7,431	-1,235
2	0,031	3,237	9,113	-2,350
3	0,046	2,353	10,882	-3,235
4	0,062	1,239	12,564	-3,803
5	0,077	0	13,996	-4,000
6	0,092	-1,232	15,037	-3,806
7	0,108	-2,347	15,586	-3,239
8	0,123	-3,232	15,588	-2,356
9	0,139	-3,802	15,045	-1,243
10	0,154	-4,000	14,008	0
11	0,169	-3,807	12,579	1,228
12	0,185	-3,241	10,898	2,344
13	0,200	-2,359	9,129	3,230
14	0,215	-1,246	7,445	3,801
15	0,231	-0,011	6,012	4,000
16	0,246	1,225	4,968	3,808
17	0,262	2,341	4,416	3,243
18	0,277	3,228	4,410	2,362
19	0,292	3,800	4,951	1,249
20	0,308	4	5,985	0,015

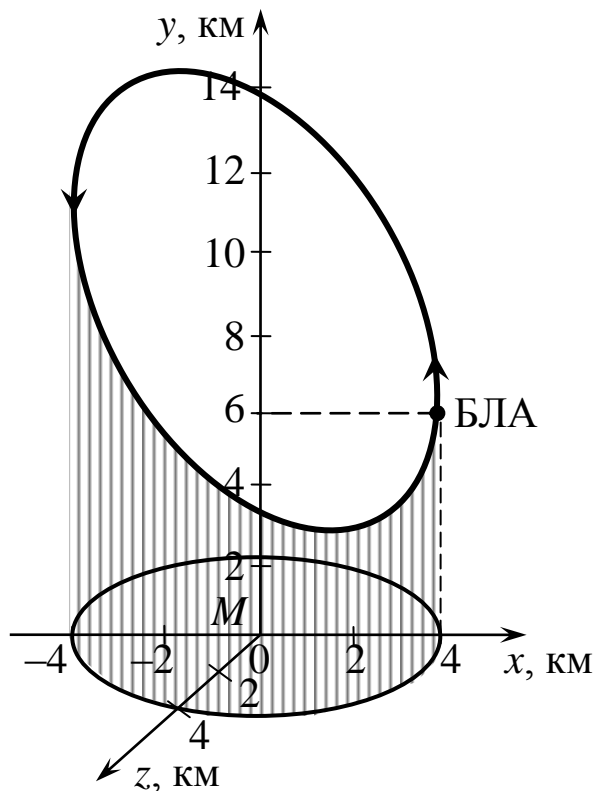


Рис. 4.22

Из приведенной выше таблицы следует, что рассматриваемый БЛА совершает полет по замкнутой эллиптической траектории за 0,308 ч. = 18,5 мин.

Уравнения, аналогичные выражениям (4.3.40), могут быть достаточно просто сформированы и для представлений плоскости полета БЛА в виде соотношений (4.3.26) и (4.3.27).

На наш взгляд для использования на практике предложенного подхода наиболее подходящим является описание плоскости полета БЛА с помощью расстояния ρ и углов азимута φ и места λ .

Рассмотрим подход к формированию требуемой траектории БЛА в виде зависимостей (4.3.1), основанный на их представлении в форме выражений (4.3.2).

Пусть уравнения проекций требуемой пространственной траектории БЛА заданы на координатных плоскостях Mxy и Mxz в общем случае выражениями:

$$F(x,y) = 0; \quad \Phi(x,z) = 0.$$

Будем рассматривать эти проекции как направляющие цилиндрических поверхностей, параллельных осям Mz и Mx .

Тогда искомая пространственная траектория БЛА будет линией пересечения таких цилиндров, представленной на Рис. 4.23.

Сформируем дифференциальные уравнения для записи параметрического представления $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [t_0, t_k]$ пространственной траектории БЛА при использовании выражений (4.3.43).

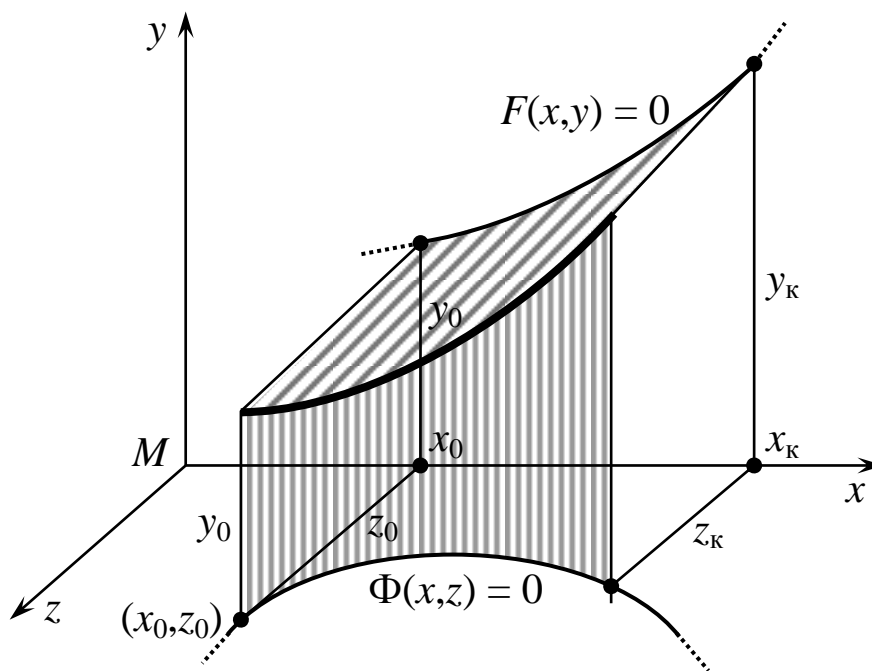


Рис. 4.23

При проекционном подходе будем использовать первое из кинематических уравнений пространственного движения БЛА (4.3.12)-(4.3.14) вида:

$$\dot{x} = V \cos \theta \cos \Psi,$$

где $\theta = \theta(x)$, $\Psi = \Psi(x)$ – углы наклона и поворота траектории БЛА при $x = x(t)$, $t \in [t_0, t_k]$.

Пусть проекции формируемой траектории БЛА на координатные плоскости заданы в явной форме:

$$F(x,y) = y(x) - y = 0; \quad \Phi(x,z) = z(x) - z = 0. \quad (4.3.44)$$

Продифференцируем по t выражения (4.3.44) и представим их как:

$$\dot{y} - \frac{dy}{dx} \dot{x} = 0; \quad \dot{z} - \frac{dz}{dx} \dot{x} = 0.$$

Применяя использованные ранее соотношения:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta(x); \quad \frac{dz}{dx} = \operatorname{tg}\Psi(x),$$

перепишем эти выражения в следующей форме:

$$\dot{y} = \dot{x} \operatorname{tg}\theta(x); \quad \dot{z} = \dot{x} \operatorname{tg}\Psi(x). \quad (4.3.45)$$

Подставляя в правые части выражений (4.3.45) уравнение (4.3.43), после несложных преобразований получаем:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= V \sin \theta(x) \cos \Psi(x); \\ \dot{z} &= V \cos \theta(x) \sin \Psi(x). \end{aligned} \quad (4.3.46)$$

Заменим тригонометрические функции в приведенных уравнениях (4.3.43) и (4.3.46) использованными выше выражениями:

$$\begin{aligned} \cos \theta(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2(x)}}; \\ \sin \theta(x) &= \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'^2(x)}}; \\ \cos \Psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2(x)}}; \\ \sin \Psi(x) &= \frac{z'(x)}{\sqrt{1 + z'^2(x)}}, \end{aligned}$$

где $y'(x)$, $z'(x)$ – производные функций $y(x)$ и $z(x)$.

В этом случае получаем общий вид системы дифференциальных уравнений для формирования параметрического представления требуемой пространственной траектории БЛА:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{V_{\text{зад}}(t)}{\sqrt{(1+y'^2(x))(1+z'^2(x))}}; \\ \dot{y} &= \frac{V_{\text{зад}}(t)y'(x)}{\sqrt{(1+y'^2(x))(1+z'^2(x))}}; \\ \dot{z} &= \frac{V_{\text{зад}}(t)z'(x)}{\sqrt{(1+y'^2(x))(1+z'^2(x))}}, \quad t \in [t_0, t_k]. \end{aligned} \quad (4.3.47)$$

Начальные условия, согласно Рис. 4.23, для этой системы записываются как:

$$x(t_0) = x_0; \quad y(t_0) = y_0; \quad z(t_0) = z_0. \quad (4.3.48)$$

Значение конечного момента времени t_k движения БЛА по формируемой пространственной траектории уточняется из условия:

$$x(t_k) = x_k. \quad (4.3.49)$$

Отметим, что предложенный подход в обязательном порядке требует задания функций $y = y(x)$ и $z = z(x)$ на одном интервале $[x_0, x_k]$ значений их аргумента.

Входящий в систему дифференциальных уравнений (4.3.47) закон $V_{\text{зад}}(t)$ изменения скорости БЛА при $t \in [t_0, t_k]$ определяется путем решения вариационной задачи 2, приведенной в Разд. 4.1. При ее решении используется величина L длины пространственной траектории движения БЛА, которая вычисляется по следующей формуле [19]:

$$L = \int_{x_0}^{x_k} \sqrt{1 + y'^2(x) + z'^2(x)} dx.$$

Отметим, что это уточнение отсутствует в работах автора [9, 22].

Для функции $y(x) \equiv 0$ из системы (4.3.47) получаются уравнения движения БЛА в горизонтальной плоскости по кривой $z(x)$ на высоте y_0 . Для $z(x) \equiv 0$ эта система дает описание движения БЛА в вертикальной плоскости по кривой $y(x)$.

Пример 4.15.

Пусть, согласно преобразованным для упрощения вычислений данным Примера 4.5, на интервале дальности $[x_0, x_k] = [2, 4]$ км со скоростью $V_{\text{зад}} = 360$ км/ч БЛА должен совершить снижение с высоты $y_0 = 6$ км до высоты $y_k = 1$ км по траектории, проекция которой на плоскость Mxy имеет вид:

$$y(x) = 1,25x^3 - 11,25x^2 + 30x - 19, \quad x \in [2, 4] \text{ км.}$$

Сформируем, согласно требованиям Примера 4.4, уравнение проекции $z = z(x)$ для интервала значений $x \in [2, 4]$ км.

Для значений $x_0 = 2$ км; $z_0 = 15$ км; $x_k = 4$ км; $z_k = 80$ км; $\text{tg}\Psi_0 = 0,5777$; $\text{tg}\Psi_k = 5,6713$ система уравнений (4.2.10) примет вид:

$$2^3 C_1 + 2^2 C_2 + 2C_3 + C_4 = 15;$$

$$12C_1 + 4C_2 + C_3 = 0,5777;$$

$$4^3 C_1 + 4^2 C_2 + 4C_3 + C_4 = 80;$$

$$48C_1 + 8C_2 + C_3 = 5,6713.$$

Численное решение этой системы линейных уравнений 4-го порядка дает следующие значения искомым коэффициентов:

$$C_1 = -14,688; \quad C_2 = 133,463; \quad C_3 = -357,022; \quad C_4 = 312,693.$$

Тогда проекция на плоскость Mxz траектории БЛА конкретизируется как:

$$z(x) = -14,688x^3 + 133,463x^2 - 357,022x + 312,693.$$

Для записи системы уравнений (4.3.47) вычислим производные:

$$y'(x) = 3,75x^2 - 22,5x + 30; \quad (4.3.50)$$

$$z'(x) = -44,064x^2 + 266,926x - 357,022.$$

При $t_0 = 0$ начальные условия (4.3.48) примут вид:

$$x(0) = 2; \quad y(0) = 6; \quad z(0) = 15. \quad (4.3.51)$$

Подставляя производные (4.3.50) в систему (4.3.47) и проводя ее численное интегрирование с начальными условиями (4.3.51) до момента времени t_k , удовлетворяющего условию вида (4.3.49), которое конкретизируется как:

$$x(t_k) = 4 \text{ км}, \quad (4.3.52)$$

получаем результаты, представленные в Табл. 4.18 с шагом печати $\Delta t = 0,032 \text{ ч} = 1,92 \text{ мин}$ и на Рис. 4.24.

Таблица 4.18

№	t , час	x , км	y , км	z , км
0	0	2	6	15
1	0,032	2,375	5,601	20,056
2	0,064	2,492	5,303	23,764
3	0,095	2,582	5,039	27,029
4	0,127	2,658	4,796	30,054
5	0,159	2,726	4,565	32,927
6	0,191	2,789	4,343	35,698
7	0,222	2,848	4,126	38,400
8	0,254	2,906	3,914	41,056
9	0,286	2,962	3,704	43,686
10	0,318	3,018	3,496	46,305
11	0,349	3,073	3,288	48,929
12	0,381	3,130	3,079	51,573
13	0,413	3,187	2,868	54,255
14	0,445	3,247	2,654	56,994
15	0,476	3,311	2,434	59,818
16	0,508	3,380	2,207	62,763
17	0,540	3,457	1,968	65,888
18	0,572	3,548	1,712	69,301
19	0,603	3,671	1,424	73,262
20	0,635	4	1,062	79,240

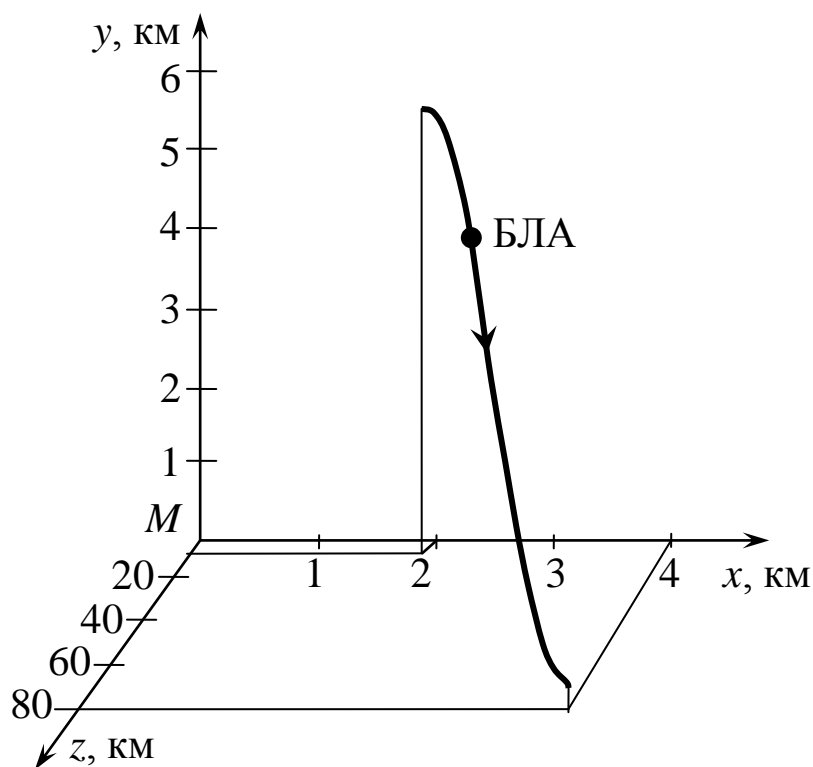


Рис. 4.24

На Рис. 4.25 справочно представлены графики проекций требуемой траектории и их производных.

Из Табл. 4.18 следует, что условие (4.3.52) выполняется при $t_k = 0,635$ ч ≈ 38 мин. Требуемые значения $y(t_k) = 1$ км и $z(t_k) = 80$ км за счет погрешностей численного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений достигнуты с ошибками (+0,062 км = 62 м) и (-0,76 км = -760 м).

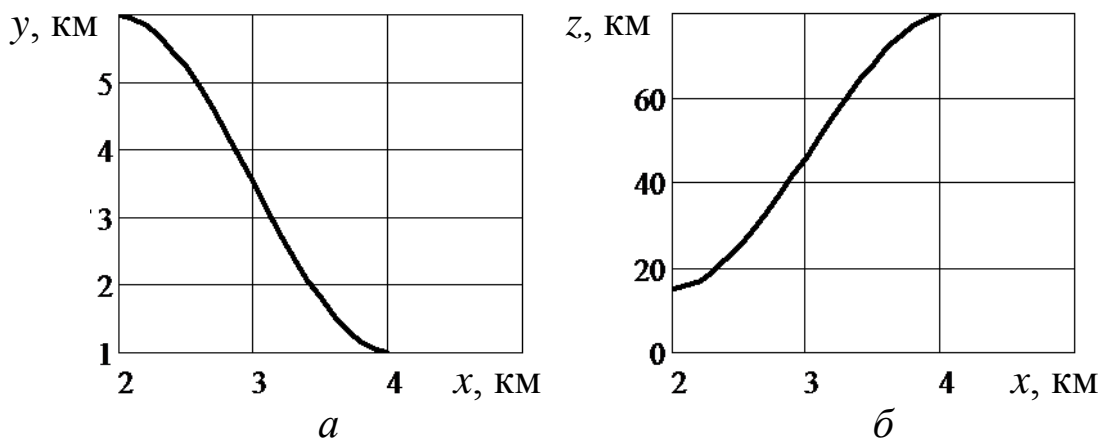


Рис. 4.25

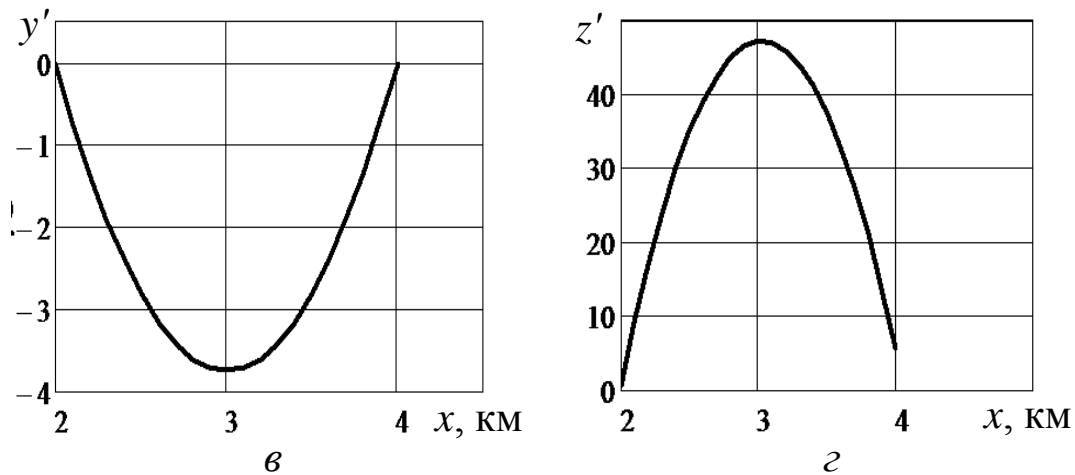


Рис. 4.25

Рассмотрим метод определения пространственной переходной траектории $x_0(t)$, $y_0(t)$, $z_0(t)$ для перехода БЛА на требуемую пространственную траекторию полета $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $t \in [t_0, t_k]$.

Пусть в момент времени $\bar{t} \in [t_0, t_k]$ БЛА оказался в точке с координатами $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, таких что $\bar{x} \neq x(\bar{t})$, $\bar{y} \neq y(\bar{t})$, $\bar{z} \neq z(\bar{t})$.

Обозначим через $z_0(x)$ и $y_0(x)$ проекции искомой переходной траектории на координатные плоскости Mxz и Mxy .

В качестве функции $z = z_0(x)$ будем использовать зависимость вида (4.2.47). Функцию $y = y_0(x)$ представим в виде полинома 2-й степени:

$$y_0(x) = D_1 x^2 + D_2 x + D_3. \quad (4.3.53)$$

Производная от этой функции записывается как:

$$y'_0(x) = 2D_1 x + D_2. \quad (4.3.54)$$

Для определения коэффициентов C_1 , C_2 , C_3 и координат точки x_{Π} перехода на кривую $z(x)$ предлагается решить вспомогательную задачу оптимизации (4.2.50), (4.2.49) с заменой x_0 на \bar{x} и z_0 на \bar{z} .

Решая с учетом этого систему уравнений (4.2.55), получаем требуемые значения C_1^0, C_2^0, C_3^0 и x_{Π}^0 . Тогда выражение (4.2.48) конкретизируется как:

$$z'_0(x) = 2C_1^0 x + C_2^0. \quad (4.3.55)$$

Коэффициенты D_1, D_2, D_3 , входящие в выражение (4.3.53) будем определять из решения следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} D_1 \bar{x}^2 + D_2 \bar{x} + D_3 &= \bar{y}; \\ D_1 (x_{\Pi}^0)^2 + D_2 x_{\Pi}^0 + D_3 &= y(x_{\Pi}^0); \\ 2D_1 x_{\Pi}^0 + D_2 &= y'(x_{\Pi}^0). \end{aligned}$$

С учетом корней D_1^0, D_2^0, D_3^0 этой системы выражение (4.3.54) примет вид:

$$y'_0(x) = 2D_1^0 x + D_2^0. \quad (4.3.56)$$

Для получения искомого параметрического представления переходной траектории $x_0(t), y_0(t), z(t), t \geq \bar{\tau}$ используется система уравнений (4.3.47), в которую подставляются зависимости (4.3.55) и (4.3.56).

Начальные условия для полученной системы записываются как:

$$x_0(\bar{\tau}) = \bar{x}; \quad y_0(\bar{\tau}) = \bar{y}; \quad z_0(\bar{\tau}) = \bar{z}.$$

Конечный момент времени $\hat{\tau}$ движения БЛА по переходной траектории определяется из условия:

$$x_0(\hat{\tau}) = x_{\Pi}^0.$$

Рассмотрим один из подходов непосредственного формирования параметрического представления $x(t), y(t), z(t), t \in [t_0, t_k]$ требуемой траектории движения БЛА, который не требует задания зависимости $V_{\text{зад}}(t)$.

Будем формировать искомые функции в виде следующих полиномов 3-го порядка:

$$\begin{aligned}
x(t) &= C_1 t^3 + C_2 t^2 + C_3 t + C_4; \\
y(t) &= C_5 t^3 + C_6 t^2 + C_7 t + C_8; \\
z(t) &= C_9 t^3 + C_{10} t^2 + C_{11} t + C_{12}, \quad t \in [t_0, t_k].
\end{aligned}
\tag{4.3.57}$$

Сформируем условия для определения коэффициентов C_i , $i = \overline{(1, 12)}$, входящих в эти зависимости. Будем считать заданными в момент времени t_0 и t_k следующие граничные значения координат (x_0, y_0, z_0) , (x_k, y_k, z_k) и углов $\theta_0, \theta_k, \Psi_0, \Psi_k$ требуемой траектории движения БЛА. Отсюда получаем первую группу уравнений для определения коэффициентов в выражениях (4.3.57):

$$\begin{aligned}
C_1 t_0^3 + C_2 t_0^2 + C_3 t_0 + C_4 &= x_0; \\
C_5 t_0^3 + C_6 t_0^2 + C_7 t_0 + C_8 &= y_0; \\
C_9 t_0^3 + C_{10} t_0^2 + C_{11} t_0 + C_{12} &= z_0; \\
C_1 t_k^3 + C_2 t_k^2 + C_3 t_k + C_4 &= x_k; \\
C_5 t_k^3 + C_6 t_k^2 + C_7 t_k + C_8 &= y_k; \\
C_9 t_k^3 + C_{10} t_k^2 + C_{11} t_k + C_{12} &= z_k.
\end{aligned}
\tag{4.3.58}$$

Из выражений (4.3.45) следует, что:

$$\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \operatorname{tg}\theta(t); \quad \frac{\dot{z}(t)}{\dot{x}(t)} = \operatorname{tg}\Psi(t).
\tag{4.3.59}$$

Входящие в эти формулы производные, вычисленные на основе выражений (4.3.57), имеет вид:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= 3C_1 t^2 + 2C_2 t + C_3; \\
\dot{y}(t) &= 3C_5 t^2 + 2C_6 t + C_7; \\
\dot{z}(t) &= 3C_9 t^2 + 2C_{10} t + C_{11}.
\end{aligned}
\tag{4.3.60}$$

Используя выражения (4.3.59), (4.3.60) при $t = t_0$ и $t = t_k$, получаем вторую группу уравнений для определения коэффициентов C_i , $i = \overline{(1, 12)}$:

$$\begin{aligned}
3C_5t_0^2 + 2C_6t_0 + C_7 &= \operatorname{tg}\theta_0(3C_1t_0^2 + 2C_2t_0 + C_3); \\
3C_9t_0^2 + 2C_{10}t_0 + C_{11} &= \operatorname{tg}\Psi_0(3C_1t_0^2 + 2C_2t_0 + C_3); \\
3C_5t_k^2 + 2C_6t_k + C_7 &= \operatorname{tg}\theta_k(3C_1t_k^2 + 2C_2t_k + C_3); \\
3C_9t_k^2 + 2C_{10}t_k + C_{11} &= \operatorname{tg}\Psi_k(3C_1t_k^2 + 2C_2t_k + C_3).
\end{aligned} \tag{4.3.61}$$

Будем считать заданными требуемые начальное и конечное значения скорости БЛА:

$$V(t_0) = V_0; \quad V(t_k) = V_k. \tag{4.3.62}$$

Используя известное из теоретической механики соотношение [24]:

$$V(t) = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}, \tag{4.3.63}$$

получаем последнюю группу уравнений для нахождения коэффициентов C_i , $i = \overline{(1, 12)}$:

$$\begin{aligned}
\dot{x}^2(t_0) + \dot{y}^2(t_0) + \dot{z}^2(t_0) &= V_0^2; \\
\dot{x}^2(t_k) + \dot{y}^2(t_k) + \dot{z}^2(t_k) &= V_k^2.
\end{aligned}$$

Конкретизируем их с использованием выражений (4.3.60) следующим образом:

$$\begin{aligned}
(3C_1t_0^2 + 2C_2t_0 + C_3)^2 + (3C_5t_0^2 + 2C_6t_0 + C_7)^2 + \\
+ (3C_9t_0^2 + 2C_{10}t_0 + C_{11})^2 &= V_0^2; \\
(3C_1t_k^2 + 2C_2t_k + C_3)^2 + (3C_5t_k^2 + 2C_6t_k + C_7)^2 + \\
+ (3C_9t_k^2 + 2C_{10}t_k + C_{11})^2 &= V_k^2.
\end{aligned} \tag{4.3.64}$$

Полученные выражения (4.3.58), (4.3.61) и (4.3.64) представляют систему нелинейных алгебраических уравнений 12-го порядка для определения параметров C_i , $i = \overline{(1, 12)}$ параметрического представления (4.3.57) требуемой пространственной траектории полета БЛА на интервале времени $[t_0, t_k]$.

Обозначим через C_i^0 , $i = \overline{(1, 12)}$ решения указанной системы уравнений, полученное одним из численных методов [9].

Подставляя эти значения в выражения (4.3.57), получаем конкретный вид $x_0(t)$, $y_0(t)$, $z_0(t)$ параметрического представления траектории БЛА, удовлетворяющей заданным граничным условиям.

Используя значения C_i^0 , $i = \overline{(1, 12)}$ в выражениях (4.3.60), конкретизируем вид производных $\dot{x}_0(t)$, $\dot{y}_0(t)$, $\dot{z}_0(t)$. Подставляя последние в формулу (4.3.63), получаем требуемый (заданный) закон $V(t)$ изменения скорости БЛА на интервале времени $[t_0, t_k]$.

Изменение во времени углов наклона и поворота траектории БЛА с использованием выражений (4.3.59) вычисляются как:

$$\begin{aligned}\theta_{\text{тр}}(t) &= \text{arctg}\left(\frac{\dot{y}_0(t)}{\dot{x}_0(t)}\right); \\ \Psi_{\text{тр}}(t) &= \text{arctg}\left(\frac{\dot{z}_0(t)}{\dot{x}_0(t)}\right), \quad t \in [t_0, t_k].\end{aligned}\tag{4.3.65}$$

Дифференцируя эти зависимости и проводя несложные преобразования, получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_{\text{тр}}(t) &= \frac{\dot{x}_0(t)\ddot{y}_0(t) - \dot{y}_0(t)\ddot{x}_0(t)}{\dot{x}_0^2(t) + \dot{y}_0^2(t)}; \\ \dot{\Psi}_{\text{тр}}(t) &= \frac{\dot{x}_0(t)\ddot{z}_0(t) - \dot{z}_0(t)\ddot{x}_0(t)}{\dot{x}_0^2(t) + \dot{z}_0^2(t)}, \quad t \in [t_0, t_k],\end{aligned}\tag{4.3.66}$$

где вторые производные, вычисленные с использованием выражений (4.3.60), имеют вид:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_0(t) &= 6C_1^0 t + 2C_2^0; \\ \ddot{y}_0(t) &= 6C_5^0 t + 2C_6^0; \\ \ddot{z}_0(t) &= 6C_9^0 t + 2C_{10}^0.\end{aligned}\tag{4.3.67}$$

Ускорение БЛА при его движении по полученной траектории $x_0(t)$, $y_0(t)$, $z_0(t)$ определяется путем дифференцирования соотношения (4.3.63) и представляется выражением вида:

$$\dot{V}(t) = \frac{\dot{x}_0(t) + \dot{y}_0(t) + \dot{z}_0(t)}{\sqrt{\dot{x}_0^2(t) + \dot{y}_0^2(t) + \dot{z}_0^2(t)}}, \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (4.6.68)$$

Длина пройденного БЛА пути по сформированной траектории согласно формулам (4.1.1) и (4.3.63) вычисляется как:

$$L = \int_{t_0}^{t_k} \sqrt{\dot{x}_0^2(t) + \dot{y}_0^2(t) + \dot{z}_0^2(t)} dt. \quad (4.3.69)$$

Пример 4.16.

Сформируем траекторию $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ полета БЛА после его аэродромного взлета, описанного в Примере 3.4. Будем считать, что после набора требуемой высоты БЛА должен перейти по этой траектории в режим горизонтального полета с заданной скоростью движения в зону выполнения полетного задания.

Преобразуем для удобства вычислений взлетные характеристики БЛА, полученные в указанном примере, в километровую и часовую размерности и приведем их к принятым выше обозначениям:

$$\begin{aligned} t_0 &= 16,791 \text{ с} = 0,000466 \text{ ч} \approx 0 \text{ ч}; \\ V_0 &= 56,188 \text{ м/с} = 202,277 \text{ км/ч}; \\ x_0 &= 948,856 \text{ м} = 0,949 \text{ км}; \\ y_0 &= 300 \text{ м} = 0,3 \text{ км}; \quad z_0 = 0 \text{ м} = 0 \text{ км}; \\ \theta_0 &= 31,874^\circ; \quad \Psi_0 = 0^\circ. \end{aligned} \quad (4.3.70)$$

Будем считать, что конечная точка формируемой переходной траектории БЛА $x_0(t)$, $y_0(t)$, $z_0(t)$ должна иметь следующие значения:

$$\begin{aligned} t_k &= 300 \text{ с} = 0,0833 \text{ ч}; \quad V_k = 360 \text{ км/ч}; \\ x_k &= 4 \text{ км}; \quad y_k = 2 \text{ км}; \quad z_k = 5 \text{ км}; \\ \theta_k &= 0^\circ; \quad \Psi_k = 45^\circ. \end{aligned} \quad (4.3.70)$$

Подставляя исходные данные (4.3.70) и (4.3.71) в систему уравнений (4.3.58), (4.3.61), (4.3.64) и решая ее соответствующим численным методом [9], получаем следующие значения коэффициентов $C_i, i = \overline{(1, 12)}$, входящих в искомые зависимости (4.3.57):

$$\begin{aligned} C_1^0 &= 5,088 \cdot 10^4; & C_2^0 &= -5861; & C_3^0 &= 171,776; \\ C_4^0 &= 0,948; & C_5^0 &= 9511; & C_6^0 &= -1830; \\ C_7^0 &= 106,813; & C_8^0 &= 0,300; & C_9^0 &= 1,939 \cdot 10^4; \\ C_{10}^0 &= -894,195; & C_{11}^0 &= C_{12}^0 = 0. \end{aligned}$$

Используя эти значения в расчетах по формулам (4.3.57), (4.3.63), (4.3.65), (4.3.66), получаем результаты, представленные в Табл. 4.19.

Из этой таблицы следует что, все граничные условия вида (4.3.70) и (4.3.71) выполняются.

Графики полученных зависимостей приведены на Рис. 4.26.

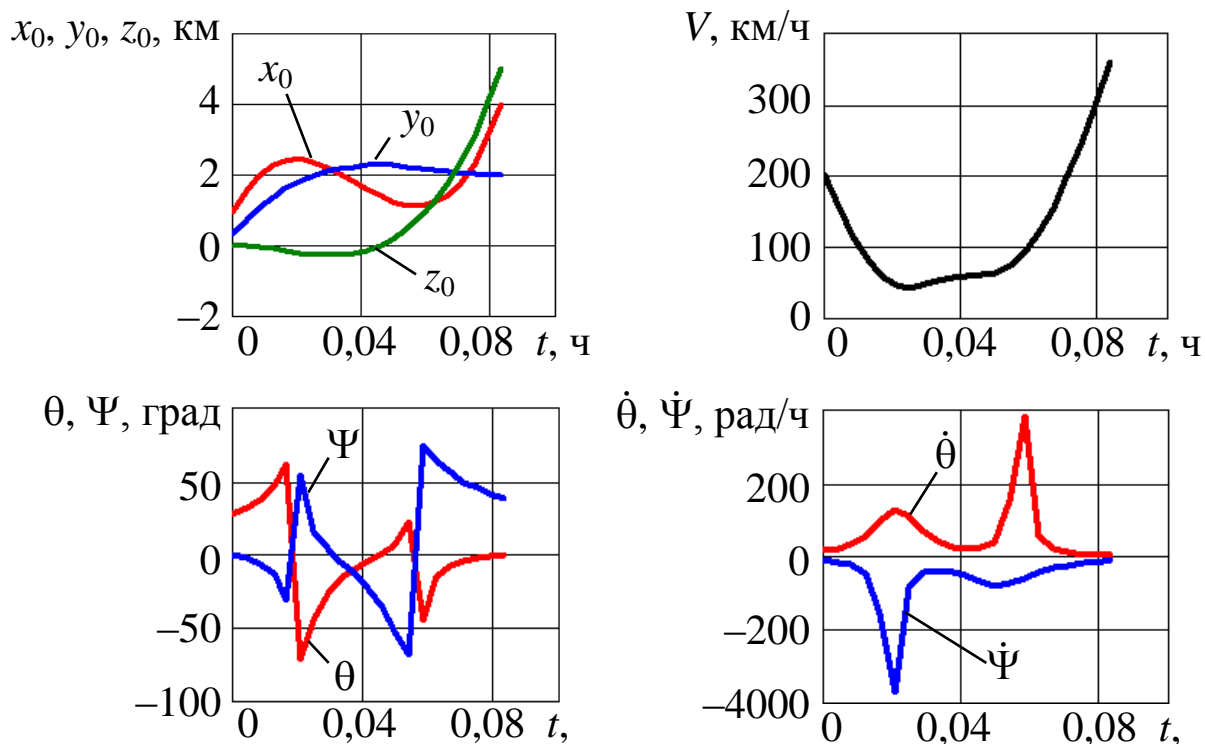


Рис. 4.26

Таблица 4.19

t , ч	x_0 , км	y_0 , км	z_0 , км	V , км/ч	θ , град	Ψ , град	$\dot{\theta}$, рад/ч	$\dot{\Psi}$, рад/ч
0	0,948	0,300	0	202,277	31,874	0	15,237	-10,411
0,042	1,565	0,714	-0,014	155,867	36,241	-2,935	21,950	-14,609
0,083	2,002	1,068	-0,051	115,887	42,746	-7,305	33,731	-23,178
0,125	2,279	1,368	-0,102	82,994	53,137	-15,105	55,642	-46,830
0,167	2,418	1,616	-0,159	58,598	70,667	-35,895	94,139	-161,859
0,208	2,443	1,817	-0,213	45,054	-81,893	63,010	130,321	-375,575
0,250	2,375	1,975	-0,256	42,874	-52,125	17,972	109,425	-85,717
0,292	2,235	2,095	-0,280	47,106	-31,234	3,853	67,380	-44,377
0,333	2,047	2,180	-0,276	52,259	-18,574	-5,762	41,513	-38,759
0,375	1,832	2,234	-0,235	55,962	-10,396	-15,447	28,612	-43,636
0,417	1,612	2,262	-0,151	58,114	-4,330	-27,081	23,247	-54,729
0,458	1,409	2,268	-0,013	60,183	1,197	-41,830	24,341	-68,944
0,500	1,246	2,256	0,187	64,956	8,324	-59,625	39,584	-78,520
0,541	1,144	2,229	0,456	75,636	26,475	-78,209	154,444	-74,797
0,583	1,125	2,193	0,803	94,217	-52,568	85,535	385,322	-60,518
0,625	1,212	2,151	1,237	120,982	-16,460	72,986	54,192	-45,023
0,666	1,426	2,108	1,766	155,393	-8,560	63,768	20,571	-32,888
0,708	1,790	2,067	2,398	196,862	-4,921	57,002	11,433	-24,344
0,750	2,326	2,032	3,142	244,958	-2,707	51,938	7,582	-18,453
0,791	3,055	2,009	4,007	299,397	-1,163	48,054	5,542	-14,342
0,833	4	2	5	360	0	45	4,300	-11,409

«Изломы» графиков $\theta(t)$ и $\Psi(t)$ можно объяснить применением часовой размерности текущего времени полета БЛА. На наш взгляд при использовании в расчетах с достаточно малым шагом времени секундной размерности такие «изломы» будут отсутствовать.

На Рис. 4.27 представлена пространственная траектория полета БЛА, построенная с использованием данных второго, третьего и четвертого столбцов Табл. 4.19.

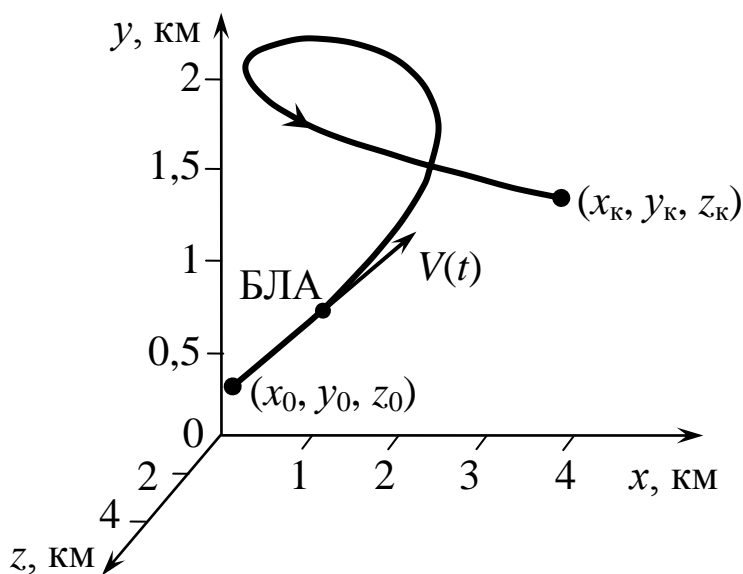


Рис. 4.27

Из этого рисунка и приведенного выше графика скорости $V(t)$ следует, что для увеличения скорости БЛА почти в 2 раза за весьма ограниченный интервал времени он набирает высоту с торможением и затем снижается с разгоном до достижения требуемых высоты и скорости дальнейшего полета. При этом длина сформированной переходной траектории БЛА, вычисленная по формуле (4.3.69), равна 9,575 км.

При дальнейшем развитии предлагаемого подхода необходимо решить следующие основные задачи:

1. Формирование параметрических представлений требуемых траекторий полетов БЛА в вертикальной и горизонтальной плоскостях.

2. Оптимизация момента времени t_k окончания полета БЛА по требуемой траектории.

В общем случае постановка второй задачи имеет вид:

«Определить значения параметров t_k и $C_i, i = \overline{(1, 12)}$, доставляющих минимум целевой функции:

$$J = t_k \rightarrow \min, \quad (4.3.72)$$

при выполнении ограничений (4.3.58), (4.3.61) и (4.3.64)».

Сформулированная задача на условный экстремум может быть решена известным методом Лагранжа [9, 19].

Аналогичные задачи оптимизации можно решать для полетов БЛА в вертикальной и горизонтальной плоскостях.

В заключение главы отметим, что практическая реализация предложенных в ней методов формирования требуемых скоростей и траекторий БЛА подразумевает обязательное использование в составе программного обеспечения АРМ специалиста по управлению БЛА следующих модулей (программ):

- решения систем линейных алгебраических уравнений 3-го и 4-го порядков;
- решения систем нелинейных алгебраических уравнений 12-го порядка;
- решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го и 3-го порядков;
- визуализации на экране монитора АРМ получаемых плоских и пространственных траекторий БЛА в форме статических и динамических изображений.

Численные методы решения изложенных выше задач описаны в монографии [9] и в других работах по вычислительной математике. В связи с современными успехами компьютерной графики не представляет особого труда и программная реализация последней задачи.

Глава 5. СИНТЕЗ КОСВЕННОГО ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОЛЕТАМИ БЛА

Завершающим этапом процесса организации применения БЛА в планируемой операции является решение задачи формирования законов программного управления, обеспечивающих их полеты по требуемым траекториям на заданных интервалах времени [22, 29].

В данной главе рассматривается косвенное управление БЛА самолетных схем (СС), которое является инвариантным для всех их конструктивных схем. Кроме этого предлагаются методы формирования косвенного управления беспилотным вертолетом (БВ) одновинтовой схемы. Методы формирования такого управления, основанные на известной теории обратных задач динамики управляемого движения объектов [17], подробно изложены в работах [9, 16, 22].

Отметим, что в монографии [9] предложены специальные численные методы решения нелинейных параметрических уравнений для формирования используемых компонент векторов косвенного управления БЛА.

5.1. Управление движением БЛА самолетных схем по пространственным и плоским траекториям

В общем случае определение вектора управления $u = u(t)$ динамическим объектом, который описывается системой дифференциальных уравнений в векторной форме:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad t \in [t_0, t_k], \quad (5.1.1)$$

с применением теории обратных задач сводится к решению систем нелинейных параметрических уравнений вида:

$$f(x^*(t), u(t)) - \dot{x}^* = 0, \quad t \in [t_0, t_k], \quad (5.1.2)$$

где $x^*(t)$ – требуемое изменение фазового вектора объекта на рассматриваемом интервале времени.

Отметим, что система (5.1.2) применяется в случае, когда размерности векторов $x(t)$ и $u(t)$ совпадают. В противном случае выражения (5.1.2) используются как ограничения вспомогательной параметрической задачи оптимизации [9].

Из Разд. 2.1 следует, что в динамических уравнениях движения БЛА СС вида (2.1.15)-(2.1.17) используется вектор управления:

$$u(t) = (P(t), \alpha(t), \gamma(t)), \quad t \in [t_0, t_k], \quad (5.1.3)$$

где $P(t)$ – сила тяги двигателей БЛА; $\alpha(t)$ – угол атаки БЛА; $\gamma(t)$ – угол крена БЛА.

Будем рассматривать эти уравнения как конкретизацию системы (5.1.1).

В качестве требуемого изменения компонент фазового вектора при пространственном движении БЛА будем использовать функции:

$$V_{\text{зад}} = V_{\text{зад}}(t); \quad \theta_{\text{тр}} = \theta_{\text{тр}}(t); \quad \Psi_{\text{тр}} = \Psi_{\text{тр}}(t), \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (5.1.4)$$

Здесь $V_{\text{зад}}$ – заданное значение скорости полета БЛА, определяемое методами, рассмотренными в Разд. 4.1 и 4.3. Функции $\theta_{\text{тр}}(t)$ и $\Psi_{\text{тр}}(t)$ отражают изменение во времени углов наклона и поворота траектории БЛА при его движении по требуемой траектории полета. Методы построения этих функций на основе координатного представления $y(x)$, $z(x)$ и параметрической формы описания $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ требуемой траектории БЛА приведены в Главе 4.

Для дальнейшего использования перепишем систему уравнений (2.1.15)-(2.1.17) в следующем виде:

$$\frac{P(t) - X(\alpha(t), y_{\text{тр}}(t), V_{\text{зад}}(t))}{m} -$$

$$- g \sin \theta_{\text{тр}}(t) - \dot{V}_{\text{зад}}(t) = 0;$$

$$\frac{[P(t)(\alpha(t) + \varphi_{\text{дв}}) + Y(\alpha(t), y_{\text{тр}}(t), V_{\text{зад}}(t))] \cos \gamma(t)}{mV_{\text{зад}}(t)} -$$

$$- \frac{g \cos \theta_{\text{тр}}(t)}{V_{\text{зад}}(t)} - \dot{\theta}_{\text{тр}}(t) = 0;$$

$$\frac{[P(t)(\alpha(t) + \varphi_{\text{дв}}) + Y(\alpha(t), y_{\text{тр}}(t), V_{\text{зад}}(t))] \sin \gamma(t)}{mV_{\text{зад}}(t) \cos \theta_{\text{тр}}(t)} -$$

$$- \dot{\Psi}_{\text{тр}}(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_k].$$

Приведенная система нелинейных параметрических уравнений для определения компонент вектора управления (5.1.3) является конкретизацией системы (5.1.2).

При конкретизации в систему (5.1.5)-(5.1.7) подставляются первые два выражения из состава соотношений (2.1.23), которые записываются как:

$$X(\alpha(t), y_{\text{тр}}(t), V_{\text{зад}}(t)) = 0,5c_x(\alpha(t), y_{\text{тр}}(t), V_{\text{зад}}(t)) \times$$

$$\times \rho(y_{\text{тр}}(t))V_{\text{зад}}^2(t)S;$$

$$Y(\alpha(t), y_{\text{тр}}(t), V_{\text{зад}}(t)) = 0,5c_y(\alpha(t), y_{\text{тр}}(t), V_{\text{зад}}(t)) \times$$

$$\times \rho(y_{\text{тр}}(t))V_{\text{зад}}^2(t)S.$$

Входящие в эти формулы коэффициенты силы лобового сопротивления и подъемной силы с учетом выражений (2.1.34) и (2.1.35) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
c_x(\alpha(t), y_{\text{тр}}(t), V_{\text{зад}}(t)) &= \left(c_0 + \frac{c_1 V_{\text{зад}}(t)}{a(y_{\text{тр}}(t))} \right) + \\
&+ A \left(d_0 + \frac{d_1 V_{\text{зад}}(t)}{a(y_{\text{тр}}(t))} \right)^2 (\alpha(t) + \alpha_0)^2; \\
c_y(\alpha(t), y_{\text{тр}}(t), V_{\text{зад}}(t)) &= \left(b_0 + \frac{b_1 V_{\text{зад}}(t)}{a(y_{\text{тр}}(t))} \right) + \\
&+ \left(d_0 + \frac{d_1 V_{\text{зад}}(t)}{a(y_{\text{тр}}(t))} \right) \alpha(t),
\end{aligned} \tag{5.1.9}$$

где зависимость скорости звука a при изменении высоты полета $y_{\text{тр}}(t)$ описывается формулой (1.3.17).

Выражения (5.1.8) содержат зависимость плотности воздуха ρ от высоты полета БЛА, которая конкретизируется формулами (1.3.10) или (1.3.13) путем подстановки в них функции $y_{\text{тр}}(t)$.

Углы $\theta_{\text{тр}}(t)$, $\Psi_{\text{тр}}(t)$ и их производные, входящие в уравнения (5.1.5)-(5.1.7), вычисляются по формулам вида:

$$\begin{aligned}
\theta_{\text{тр}}(t) &= \text{arctg } y'(x_{\text{тр}}(t)); \\
\dot{\theta}_{\text{тр}}(t) &= \frac{V_{\text{зад}}(t) y''(x_{\text{тр}}(t))}{\sqrt{(1 + y'^2(x_{\text{тр}}(t))))^3 (1 + z'^2(x_{\text{тр}}(t)))}}; \\
\Psi_{\text{тр}}(t) &= \text{arctg } z'(x_{\text{тр}}(t)); \\
\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t) &= \frac{V_{\text{зад}}(t) z''(x_{\text{тр}}(t))}{\sqrt{(1 + y'^2(x_{\text{тр}}(t)))(1 + z'^2(x_{\text{тр}}(t))))^3}.
\end{aligned} \tag{5.1.10}$$

Здесь y' , y'' , z' , z'' – первые и вторые производные по координате x от построенных методами Главы 4 функций $y(x)$, $z(x)$; $x_{\text{тр}}(t)$ – результат интегрирования системы уравнений

(4.3.47) с начальными условиями (4.3.48) на интервале времени $[t_0, t_k]$.

При непосредственном построении требуемой траектории БЛА в виде функций $x_0(t)$, $y_0(t)$, $z_0(t)$ динамика этих углов и угловых скоростей описывается выражениями (4.3.65) и (4.3.66).

Отметим, что применяемые в формулах (5.1.8) и (5.1.9) зависимости $y_{\text{тр}}(t)$ являются результатом решения отмеченной выше системы дифференциальных уравнений или берутся в виде функции $y_0(t)$, $t \in [t_0, t_k]$.

Для решения системы нелинейных параметрических уравнений (5.1.5)-(5.1.7) на интервале времени $[t_0, t_k]$ используются численные методы, приведенные в работе [9]. Полученные решения этой системы должны удовлетворять эксплуатационным ограничениям для рассматриваемого БЛА вида:

$$\begin{aligned} P_{\min} &\leq P(t) \leq P_{\max}; \\ \alpha_{\min} &\leq \alpha(t) \leq \alpha_{\max}; \\ \gamma_{\min} &\leq \gamma(t) \leq \gamma_{\max}, \quad t \in [t_0, t_k]. \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

Пример 5.1.

Сформируем вектор управления вида (5.1.3), обеспечивающий полет БЛА в нормальных атмосферных условиях в зону его последующего движения в горизонтальной плоскости на высоте 3000 м по круговой траектории:

$$z_{\text{тр}}(x) = \sqrt{80000^2 - x^2} \quad \text{со скоростью } V_{\text{зад}} = 100 \text{ м/с.}$$

Пусть конечное положение БЛА при $t = t_k$ описывается следующими параметрами:

$$\begin{aligned} (x_k, y_k, z_k) &= (56568; 3000; 56568) \text{ м.} \\ \theta_k &= 0^\circ; \quad \Psi_k = -45^\circ; \quad V_k = 100 \text{ м/с.} \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

Будем считать, что $t_0 = 0$ с. и БЛА начинает свой полет в зону со скоростью $V = 100$ м/с при следующих значениях начальных координат и траекторных углов:

$$\begin{aligned} x_0 = 20000 \text{ м}; \quad y_0 = 600 \text{ м}; \quad z_0 = 10000 \text{ м}; \\ \theta_0 = 20^\circ; \quad \Psi_0 = 40^\circ. \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

На основе приведенных выше исходных данных сформируем полиномы вида (4.2.17) и (4.2.8), описывающие проекции $\bar{y}(x)$ и $\bar{z}(x)$ пространственной траектории рассматриваемого БЛА.

В общем виде эти полиномы записываются как:

$$\begin{aligned} \bar{y}(x) &= \bar{C}_1 x^3 + \bar{C}_2 x^2 + \bar{C}_3 x + \bar{C}_4; \\ \bar{z}(x) &= \hat{C}_1 x^3 + \hat{C}_2 x^2 + \hat{C}_3 x + \hat{C}_4. \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

Для конкретизации значений входящих в них коэффициентов используем решения систем линейных уравнений вида: (4.2.19) и (4.2.10), сформированных на основе исходных данных (5.1.13) и (5.1.12).

Система уравнений для определения коэффициентов $\bar{C}_i, i = (\overline{1, 4})$ записывается как:

$$\begin{aligned} \bar{C}_1 \cdot 20000^3 + \bar{C}_2 \cdot 20000^2 + \bar{C}_3 \cdot 20000 + \bar{C}_4 &= 600; \\ 3\bar{C}_1 \cdot 20000^2 + 2\bar{C}_2 \cdot 20000 + \bar{C}_3 &= \text{tg}20^\circ; \\ \bar{C}_1 \cdot 56568^3 + \bar{C}_2 \cdot 56568^2 + \bar{C}_3 \cdot 56568 + \bar{C}_4 &= 3000; \\ 3\bar{C}_1 \cdot 56568^2 + 2\bar{C}_2 \cdot 56568 + \bar{C}_3 &= \text{tg}0^\circ. \end{aligned}$$

Решая эту систему одним из численных методов [9], получаем следующие значения:

$$\begin{aligned} \bar{C}_1 &= 1,740 \cdot 10^{-10}; \quad \bar{C}_2 = -2,496 \cdot 10^{-5}; \\ \bar{C}_3 &= 1,154; \quad \bar{C}_4 = -1,388 \cdot 10^4. \end{aligned}$$

Коэффициенты $\hat{C}_i, i = (\overline{1, 4})$ вычисляются из системы уравнений:

$$\begin{aligned}\hat{C}_1 \cdot 20000^3 + \hat{C}_2 \cdot 20000^2 + \hat{C}_3 \cdot 20000 + \hat{C}_4 &= 10000; \\ 3\hat{C}_1 \cdot 20000^2 + 2\hat{C}_2 \cdot 20000 + \hat{C}_3 &= \operatorname{tg}40^\circ; \\ \hat{C}_1 \cdot 56568^3 + \hat{C}_2 \cdot 56568^2 + \hat{C}_3 \cdot 56568 + \hat{C}_4 &= 56568; \\ 3\hat{C}_1 \cdot 56568^2 + 2\hat{C}_2 \cdot 56568 + \hat{C}_3 &= \operatorname{tg}(-45^\circ).\end{aligned}$$

Корни этой системы имеют вид:

$$\begin{aligned}\hat{C}_1 &= -2,025 \cdot 10^{-9}; & \hat{C}_2 &= 2,074 \cdot 10^{-4}; \\ \hat{C}_3 &= -5,028; & \hat{C}_4 &= 4,379 \cdot 10^4.\end{aligned}$$

Таким образом, выражения (5.1.14) конкретизируются как:

$$\begin{aligned}\bar{y}(x) &= -1,740 \cdot 10^{-10} x^3 - 2,496 \cdot 10^{-5} x^2 + \\ &+ 1,154x - 1,388 \cdot 10^4; \\ \bar{z}(x) &= -2,025 \cdot 10^{-9} x^3 + 2,074 \cdot 10^{-4} x^2 - \\ &- 5,028x + 4,379.\end{aligned}\tag{5.1.15}$$

Графики этих функций при $x \in [20000; 56568]$ м приведены на Рис. 5.1.

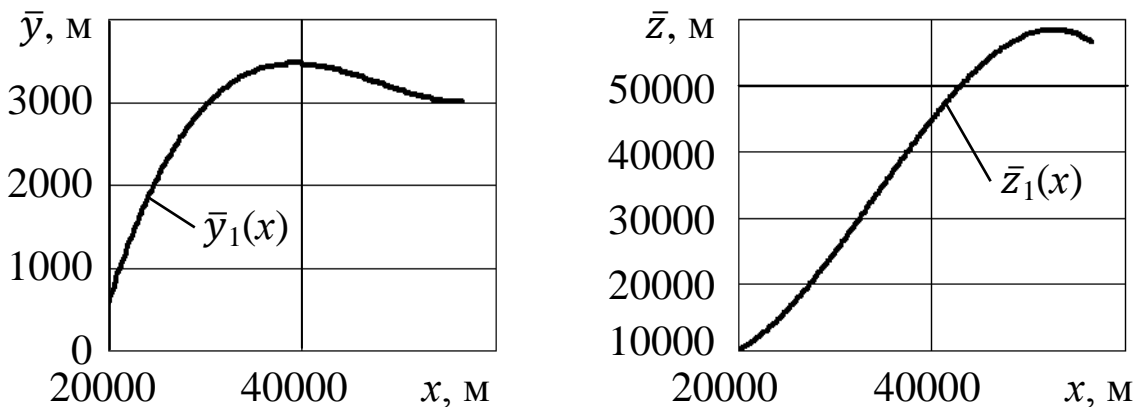


Рис. 5.1

Параметрическое представление $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ пространственной траектории полета БЛА, полученное путем решения системы дифференциальных уравнений (4.3.47) со следующей конкретизацией начальных условий вида (4.3.48):

$$x(0) = 20000 \text{ м}; \quad y(0) = 600 \text{ м}; \quad z(0) = 10000 \text{ м},$$

представлено с шагом печати $\Delta t = 43,166$ с. в Табл. 5.1.

Из результатов, приведенных в Табл. 5.1, следует, что при $t \in [172,663; 215,829]$ с. БЛА выходит на высоту полета, превышающую 3000 м., но затем, начиная с момента времени $t \in [338,492; 431,658]$ с., начинает снижение до требуемой высоты начала его движения в горизонтальной плоскости, которая достигается в момент времени $t_k = 647,487$ с.

Таблица 5.1

$t, \text{ с.}$	$x, \text{ м}$	$y, \text{ м}$	$z, \text{ м}$
0	20000	600	10000
43,166	22807	1511	12988
86,332	25206	2126	16411
129,497	27372	2564	20044
172,663	29399	2883	23796
215,829	31342	3114	27616
258,995	33241	3277	31475
302,160	35128	3385	35349
345,326	37035	3446	39219
388,492	38995	3467	43064
431,658	41054	3450	46858
474,823	43280	3398	50554
517,989	45791	3313	54059
561,155	48840	3193	57095
604,321	52820	3055	58509
647,4865	56568	3000	56568

Отметим, что в этот момент времени и остальные координаты БЛА становятся равными значениям, заданным выражениями (5.1.12).

На Рис. 5.2 приведена пространственная траектория движения БЛА в зону его дальнейшего полета.

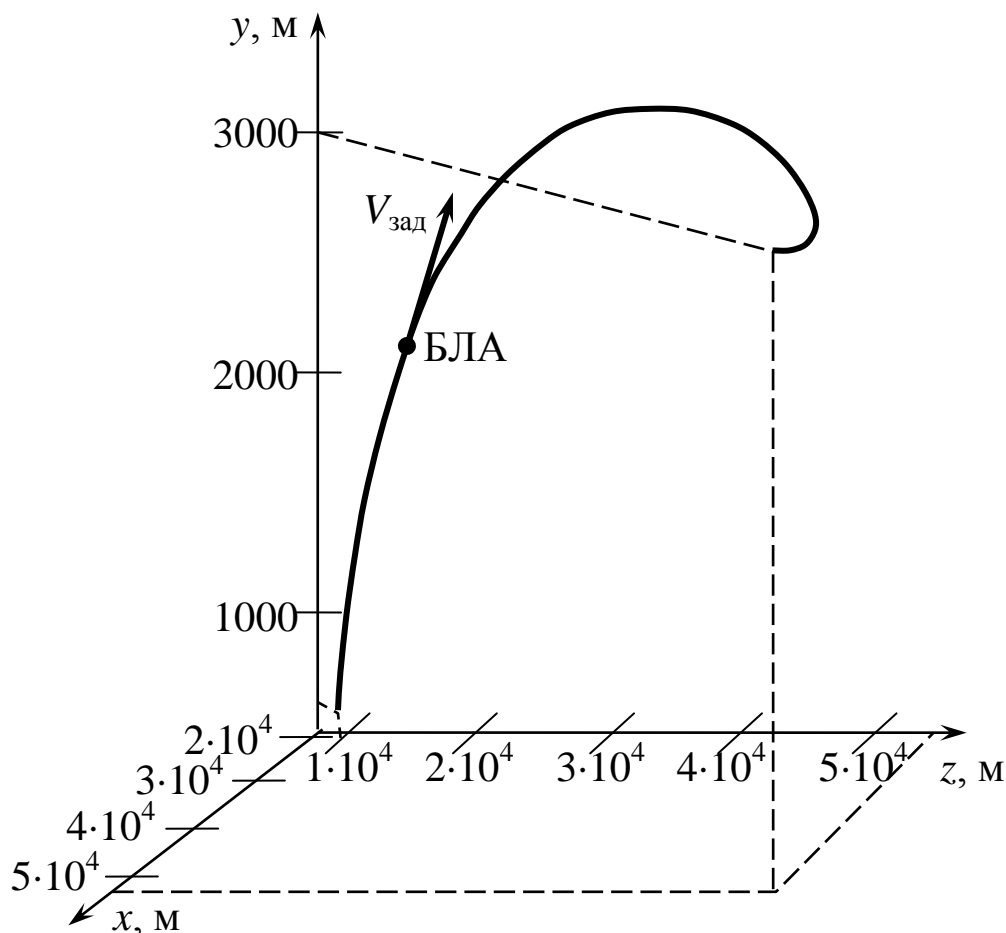


Рис. 5.2

Перейдем к формированию управляющих функций $P(t)$, $\alpha(t)$, $\gamma(t)$, $t \in [0; 647,487]$ с, входящих в состав вектора (5.1.3).

Для решения системы уравнений (5.1.5)-(5.1.7) предварительно вычислим по формулам (5.1.10) изменения во времени при $t \in [0; 647,487]$ с. углов наклона $\theta(t)$ и поворота $\Psi(t)$ траектории БЛА, а также их производных (Табл. 5.2).

Из этой таблицы следует, что траекторные углы БЛА при $t = t_0$ и $t = t_k$ удовлетворяют заданным требованиям (5.1.12) и (5.1.13).

Для рассматриваемого БЛА будем в соответствие с Табл. 2.1 считать, что:

$$m = 350 \text{ кг}; \quad S = 1,4 \text{ м}^2; \quad \varphi_{\text{дв}} = 3,5^\circ = 0,0611 \text{ рад.}$$

При конкретизации выражений (5.1.9) используются следующие значения параметров:

$$\alpha_0 = -0,401^\circ = -0,007 \text{ рад.}; \quad A = 0,0759;$$

$$c_0 = 0,017; \quad c_1 = 0,025; \quad d_0 = 4,312; \quad d_1 = 1,292.$$

Таблица 5.2.

$t, \text{ с.}$	$\theta, \text{ град.}$	$\dot{\theta}, \text{ рад./с.}$	$\Psi, \text{ град.}$	$\dot{\Psi}, \text{ рад./с.}$
0	20	$-1,846 \cdot 10^{-3}$	40	$7,260 \cdot 10^{-3}$
43,166	15,990	$-1,433 \cdot 10^{-3}$	51,862	$3,119 \cdot 10^{-3}$
86,332	12,785	$-1,177 \cdot 10^{-3}$	57,490	$1,644 \cdot 10^{-3}$
129,497	10,106	$-9,994 \cdot 10^{-4}$	60,616	$9,569 \cdot 10^{-4}$
172,663	7,807	$-8,647 \cdot 10^{-4}$	62,460	$5,647 \cdot 10^{-4}$
215,829	5,808	$-7,555 \cdot 10^{-4}$	63,513	$3,006 \cdot 10^{-4}$
258,995	4,057	$-6,623 \cdot 10^{-4}$	63,992	$9,235 \cdot 10^{-5}$
302,160	2,523	$-5,795 \cdot 10^{-4}$	63,982	$-1,008 \cdot 10^{-4}$
345,326	1,186	$-5,024 \cdot 10^{-4}$	63,478	$-3,126 \cdot 10^{-4}$
388,492	0,037	$-4,269 \cdot 10^{-4}$	62,385	$-5,869 \cdot 10^{-4}$
431,658	-0,923	$-3,480 \cdot 10^{-4}$	60,458	$-1,006 \cdot 10^{-3}$
474,823	-1,675	$-2,568 \cdot 10^{-4}$	57,130	$-1,774 \cdot 10^{-3}$
517,989	-2,167	$-1,331 \cdot 10^{-4}$	50,889	$-3,547 \cdot 10^{-3}$
561,155	-2,258	$8,558 \cdot 10^{-5}$	36,599	$-9,231 \cdot 10^{-3}$
604,321	-1,542	$5,208 \cdot 10^{-4}$	-3,675	$-2,300 \cdot 10^{-2}$
647,487	0	$6,461 \cdot 10^{-4}$	-45	$-9,632 \cdot 10^{-3}$

Тогда формулы для аэродинамических коэффициентов БЛА примут вид:

$$c_x(t) = \left(0,017 + \frac{0,025V}{340 - 0,004y(t)} \right) +$$

$$+ \left(1,188 + \frac{0,356V}{340 - 0,004y(t)} \right) (\alpha(t) + 0,007)^2;$$

$$c_y(t) = \left(4,312 + \frac{1,291V}{340 - 0,004y(t)} \right) (\alpha(t) + 0,007)^2.$$

Решение системы уравнений (5.1.5)-(5.1.7) с использованием конкретизированных выражений (5.1.8) и (5.1.9) при $V = 100 \text{ м/с}$ и $\dot{V} = 0 \text{ с}$ приведенными выше исходными данными на интервале времени $[0; 647,487] \text{ с.}$ на сетке с шагом $\Delta t_1 = 43,166 \text{ с.}$ проводилось при начальном приближении:

$$P_H = 1000 \text{ Н}; \quad \alpha_H = 1^\circ; \quad \gamma_H = 1^\circ.$$

Было установлено, что ее корни не зависят от начальных приближений, что означает единственность решения этой системы уравнений.

Результаты решения системы в виде функций $P(t)$, $\alpha(t)$, $\gamma(t)$ представлены на Рис. 5.3 и в Табл. 5.3.

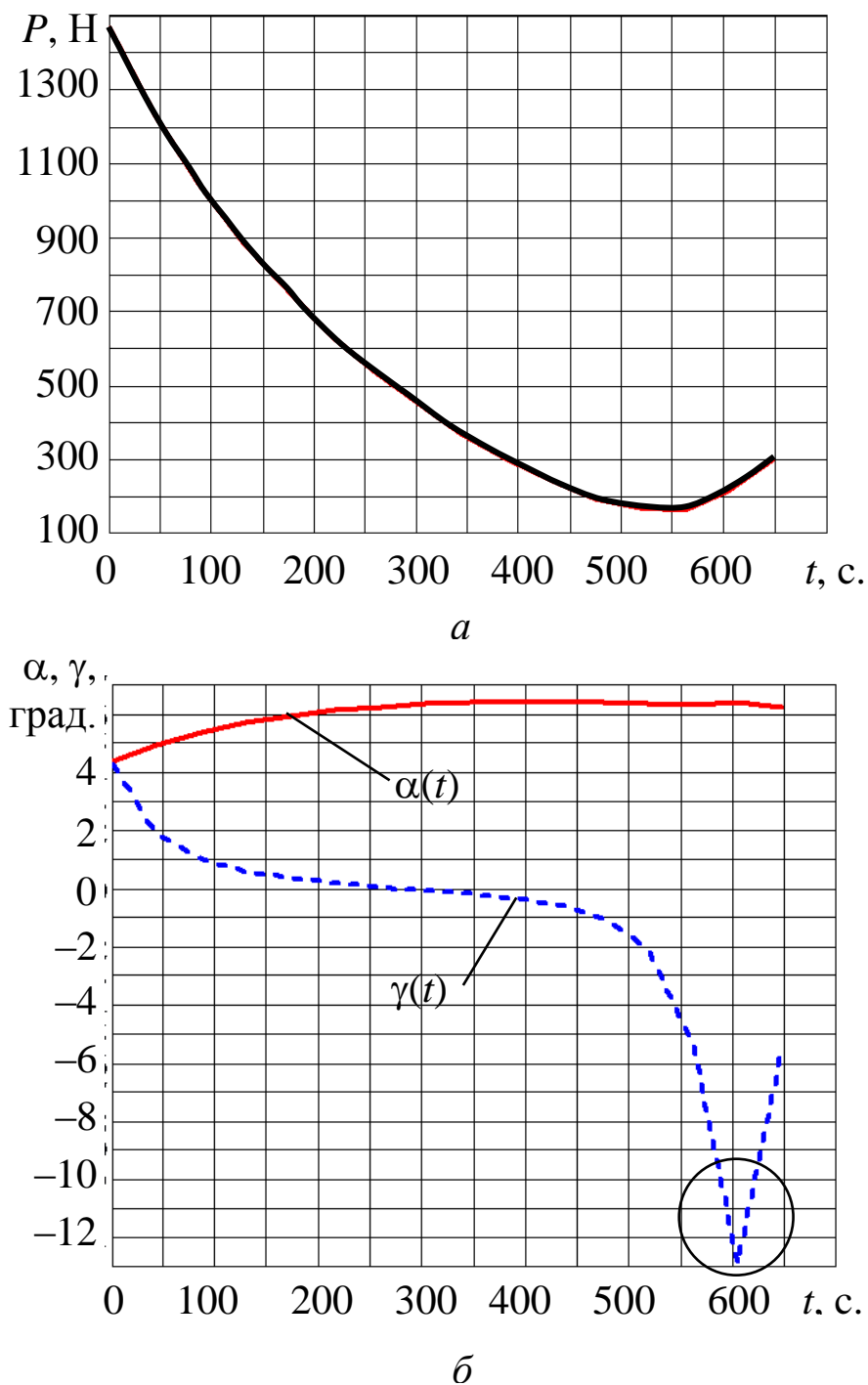


Рис. 5.3

«Излом» кривой изменения угла крена $\gamma(t)$, представленный на Рис. 5.3,б в окрестности значения $t = 600$ с., исследован с более мелким шагом $\Delta t_1 = 4,317$ с. на интервале времени [561,155; 604,321] с.

Таблица 5.3

t , с.	P , Н	α , град.	γ , град.
0	1454,319	4,098	4,320
43,166	1222,471	4,687	1,850
86,332	1038,364	5,136	0,973
129,497	882,941	5,484	0,565
172,663	749,128	5,755	0,333
215,829	632,368	6,965	0,177
258,995	529,869	6,123	0,054
302,160	439,867	6,238	-0,059
345,326	361,297	6,314	-0,184
388,492	293,687	6,357	-0,344
431,658	237,221	6,371	-0,590
474,823	193,068	6,356	-1,039
517,989	164,452	6,319	-2,074
561,155	160,807	6,281	-5,373
604,321	210,621	6,348	-12,879
647,487	296,307	6,157	-5,573

Таблица 5.4

t , с.	P , Н	α , град.	γ , град.
561,155	160,807	6,281	-5,373
569,788	165,223	6,283	-6,740
578,421	172,288	6,295	-8,453
587,054	182,422	6,317	-10,389
595,688	195,534	6,342	-12,104
604,321	210,621	6,348	-12,879
612,954	226,496	6,319	-12,280
647,487	242,936	6,268	-10,653
595,688	260,169	6,219	-8,721
600,004	278,076	6,182	-6,976
604,321	210,621	6,348	-12,879

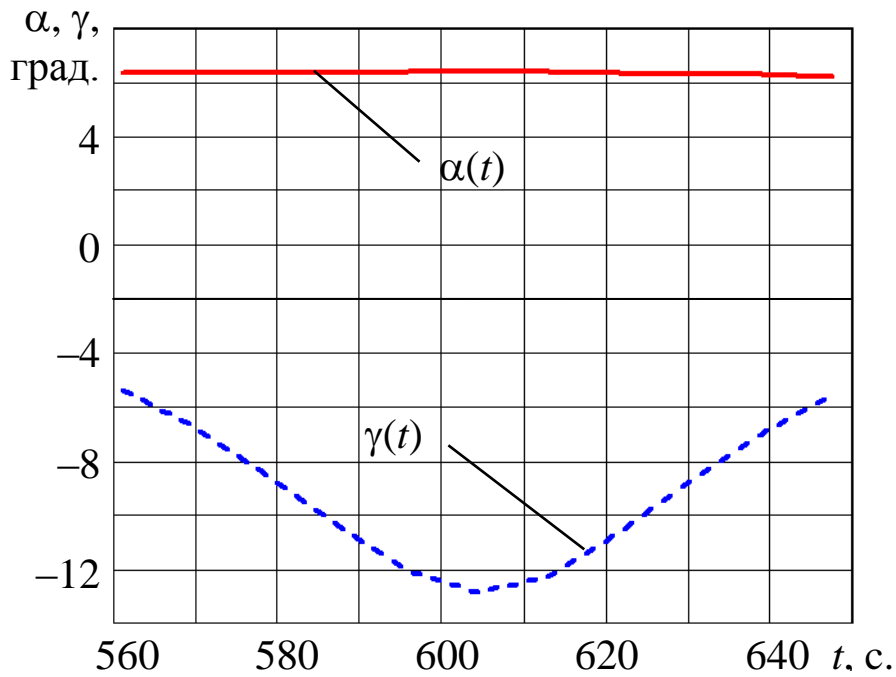


Рис. 5.4

Из данных, приведенных в Табл. 5.4 и на Рис. 5.4, следует, что управляющие функции $P(t)$, $\alpha(t)$, $\gamma(t)$ имеют в рассматриваемой окрестности монотонное поведение.

Отметим, что ограничения вида (5.1.11) на управления $P(t)$, $\alpha(t)$, $\gamma(t)$, представленные в Табл. 2.1, удовлетворяются на рассматриваемом интервале времени полета БЛА кроме значения тяги двигателя на интервале времени $[0; 86,332]$ с.

Для ликвидации этого недостатка, выявленного в процессе расчета программного управления БЛА, предлагается использовать вместо начальных значений (5.1.13) его траектории следующие значения:

$$x_0 = 25206 \text{ м}; \quad y_0 = 2126 \text{ м}; \quad z_0 = 16411 \text{ м};$$

$$\theta_0 = 12,785^\circ; \quad \Psi_0 = 57,490^\circ,$$

взятые из Табл. 5.1 и Табл. 5.2 при значении $t = 86,332$ с.

В этом случае при формировании вектора $u(t)$ все ограничения вида (5.1.11) для рассматриваемого БЛА будут выполнены.

Рассмотренным выше методом рассчитан вектор управления $u(t)$, использованный в Примере 2.2, который конкретизирован значениями (2.1.41).

Полученное при этом значение угла крена $\gamma(t) = 0$, $t \in [0, 600]$ с. полностью соответствует режиму прямолинейного пространственного полета БЛА со снижением со скоростью $V_{\text{зад}} = 105,683$ м/с (см. Табл. 2.4).

Заметим, что относительное отклонение скорости полета БЛА от заданного значения составляет менее 1%.

Перепишем уравнения (5.1.5)-(5.1.7) в следующей форме:

$$\begin{aligned} P(t) - X(\alpha(t), y(t), V(t)) - \\ - mg \sin \theta(t) - m\dot{V}(t) = 0; \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

$$\begin{aligned} [P(t)(\alpha(t) + \varphi_{\text{дв}}) + Y(\alpha(t), y(t), V(t))] \cos \gamma(t) - \\ - mg \cos \theta(t) - mV(t)\dot{\theta}(t) = 0; \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

$$\begin{aligned} [P(t)(\alpha(t) + \varphi_{\text{дв}}) + Y(\alpha(t), y(t), V(t))] \sin \gamma(t) - \\ - mV(t) \cos \theta(t) \dot{\Psi}(t) = 0. \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

Сформируем на базе этих уравнений частные системы уравнений для определения векторов управлений $u(t)$ полетами БЛА в вертикальной и горизонтальной плоскостях их движения.

Из Разд. 2.1 следует, что при полетах БЛА в вертикальной плоскости должны выполняться условия:

$$\gamma(t) = 0; \quad \Psi(t) = 0; \quad \dot{\Psi}(t) = 0$$

и векторы управления будут иметь вид:

$$u(t) = (P(t), \alpha(t)). \quad (5.1.19)$$

Подставляя приведенные выше условия в выражения (5.1.16)-(5.1.18) можно заметить, что последнее уравнение превращается в тождество и может быть отброшено.

Тогда компоненты вектора управления (5.1.19) определяются как решения следующей системы нелинейных параметрических уравнений 2-го порядка:

$$\begin{aligned} P(t) - X(\alpha(t), y(t), V(t)) - \\ - mg \sin \theta(t) - m\dot{V}(t) = 0; \\ P(t)(\alpha(t) + \varphi_{\text{ДВ}}) + Y(\alpha(t), y(t), V(t)) - \\ - mg \cos \theta(t) - mV(t)\dot{\theta}(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_k]. \end{aligned} \quad (5.1.20)$$

При решении этих уравнений используются ранее рассмотренные выражения:

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \text{arctg } y'(x(t)); \\ \dot{\theta}(t) &= \frac{V(t)y''(x(t))}{\sqrt{1+y'^2(x(t))}}; \quad t \in [t_0, t_k]. \end{aligned} \quad (5.1.21)$$

Функции $x(t)$ и $y(t)$, входящие в выражения (5.1.20), (5.1.21), определяются из решения на интервале времени $[t_0, t_k]$ системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{V(t)}{\sqrt{1+y'^2(x)}}; \\ \dot{y} &= \frac{V(t)y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}} \end{aligned} \quad (5.1.22)$$

с начальными условиями:

$$x(0) = x_0; \quad y(0) = y_0.$$

Пример 5.2.

Сформируем управление БЛА, осуществляющего полет на постоянной высоте $h = 2000$ м. в вертикальной плоскости на интервале времени $[0; 400]$ с. с заданной скоростью $V(t) = 97,50$ м/с.

Результаты интегрирования системы уравнений (5.1.22) при $y(x) = 2000$ и $t \in [0; 400]$ с. с шагом печати $\Delta t = 40$ с. представлены в первых трех столбцах Табл. 5.5.

Выражения (5.1.21) конкретизируются как:

$$\theta(t) = 0 \text{ рад}; \quad \dot{\theta}(t) = 0 \text{ рад/с}, \quad t \in [0, 400] \text{ с.}$$

Решения $P(t)$ и $\alpha(t)$ системы параметрических уравнений (5.1.20) с шагом $\Delta t = 40$ с. и с конкретизацией входящих в них параметров, использованных в Примере 5.1, приведены в двух последних столбцах Табл. 5.5.

Таблица 5.5

t , с.	x , м	y , м	P , Н	α , град
0	1000	2000	292,782	5,793
40	4900	2000	292,782	5,793
80	8800	2000	292,782	5,793
120	12700	2000	292,782	5,793
160	16600	2000	292,782	5,793
200	20500	2000	292,782	5,793
240	24400	2000	292,782	5,793
280	28300	2000	292,782	5,793
320	32200	2000	292,782	5,793
360	36100	2000	292,782	5,793
400	40000	2000	292,782	5,793

Полученные результаты полностью соответствуют результатам Примера 2.3.

Рассмотрим задачу определения управлений $P(t)$ и $\alpha(t)$, обеспечивающих процесс снижения БЛА по требуемой траектории, сформированной в Примере 4.2.

Вторая производная $y''(x)$, полученная на основе выражения (4.2.25), будет иметь вид:

$$y''(x) = 20,574 \cdot 10^{-10} x - 2,264 \cdot 10^{-5}.$$

Изменения функций $\theta(t)$ и $\dot{\theta}(t)$, $t \in [0; 180,333]$ с, вычисленные по формулам (5.1.21) с использованием соотношений для производных $y'(x)$ и $y''(x)$ и значений $x = x(t)$ из Табл. 4.9, приведена в Табл. 5.6.

Решение системы параметрических уравнений (5.1.20) с шагом $\Delta t = 18,033$ с. представлено в двух последних столбцах Табл. 5.6.

Таблица 5.6.

$t, \text{с}$	$\theta, \text{град.}$	$\dot{\theta}, \text{град/с}$	$P, \text{Н}$	$\alpha, \text{град.}$
0	0	$-1,852 \cdot 10^{-3}$	295,445	5,428
18,033	-1,721	$-1,479 \cdot 10^{-3}$	193,118	5,438
36,067	-3,056	$-1,105 \cdot 10^{-3}$	114,100	5,415
54,100	-4,006	$-7,344 \cdot 10^{-4}$	58,372	5,370
72,133	-4,574	$-3,663 \cdot 10^{-4}$	25,752	5,312
90,166	-4,764	0	16,050	5,250
108,200	-4,574	$3,663 \cdot 10^{-4}$	29,151	5,189
126,233	-4,006	$7,344 \cdot 10^{-4}$	65,044	5,138
144,266	-3,056	$1,105 \cdot 10^{-3}$	123,797	5,100
162,300	-1,721	$1,473 \cdot 10^{-3}$	205,463	5,081
180,333	0	$1,852 \cdot 10^{-3}$	309,930	5,084

Графики полученных зависимостей $P(t)$ и $\alpha(t)$ приведены на Рис. 5.5.

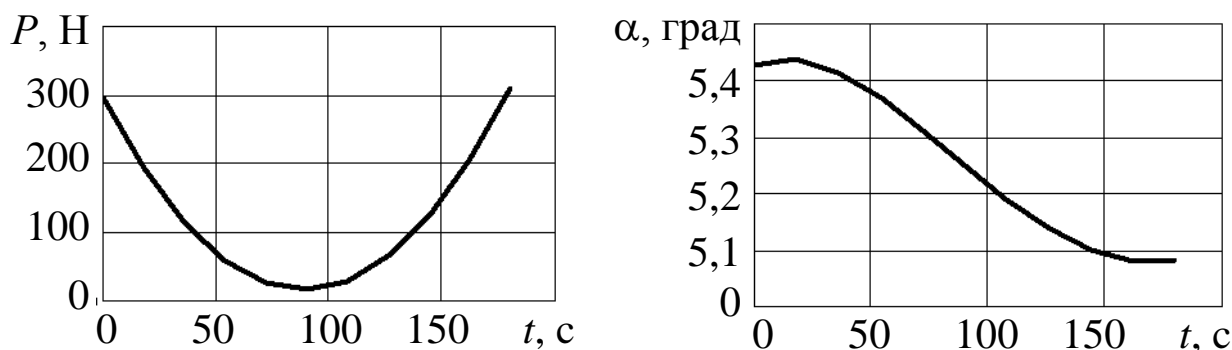


Рис. 5.5

При движении БЛА в горизонтальной плоскости на высоте h условия их полета имеют вид:

$$\theta(t) = 0; \quad \dot{\theta}(t) = 0; \quad y(t) = h,$$

а векторы управления описываются выражением (5.1.3).

В этом случае уравнение (5.1.16) запишется как:

$$P(t) - X(\alpha(t), h, V(t)) - m\dot{V}(t) = 0, \quad (5.1.23)$$

Уравнения (5.1.17) и (5.1.18) представим в следующей форме:

$$\left[P(t)(\alpha(t) + \varphi_{\text{дв}}) + Y(\alpha(t), h, V(t)) \right] \cos \gamma(t) = mg; \quad (5.1.24)$$

$$\left[P(t)(\alpha(t) + \varphi_{\text{дв}}) + Y(\alpha(t), h, V(t)) \right] \sin \gamma(t) = mV(t)\dot{\Psi}(t). \quad (5.1.25)$$

Поделив второе из этих уравнений на первое, получим следующее выражение:

$$\operatorname{tg} \gamma(t) = \frac{V(t)}{g} \dot{\Psi}(t). \quad (5.1.26)$$

Откуда требуемый закон изменения угла крена БЛА определяется как:

$$\gamma(t) = \operatorname{arctg} \left(\frac{V(t)}{g} \dot{\Psi}(t) \right), \quad t = [t_0, t_k]. \quad (5.1.27)$$

Используя выражение (5.1.26) и соотношение:

$$\cos \gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma(t)}} = \frac{g}{\sqrt{g^2 + V^2(t) \dot{\Psi}^2(t)}},$$

перепишем уравнение (5.1.24) в виде:

$$\begin{aligned} & \left[P(t)(\alpha(t) + \varphi_{\text{дв}}) + Y(\alpha(t), h, V(t)) \right] - \\ & - m \sqrt{g^2 + V^2(t) \dot{\Psi}^2(t)} = 0. \end{aligned} \quad (5.1.28)$$

Отметим, что при проведении в уравнении (5.1.25) замены:

$$\sin \gamma(t) = \frac{\operatorname{tg} \gamma(t)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma(t)}} = \frac{V(t) \dot{\Psi}(t)}{\sqrt{g^2 + V^2(t) \dot{\Psi}^2(t)}}$$

после несложных преобразований получаем результат, полностью совпадающий с выражением (5.1.28).

Таким образом, для формирования управления горизонтальным полетом БЛА необходимо определить управляющие функции $P(t)$ и $\alpha(t)$, решая на интервале времени $[t_0, t_k]$ систему нелинейных параметрических уравнений 2-го порядка

(5.1.23), (5.1.28). При этом управляющая функция $\gamma(t)$ определяется по формуле (5.1.27).

В этих выражениях производная $\dot{\Psi}(t)$ вычисляется по следующей формуле:

$$\dot{\Psi}(t) = \frac{V(t)z''(x(t))}{\sqrt{1+z'^2(x(t))}}, \quad t = [t_0, t_k], \quad (5.1.29)$$

где $x(t)$ – результаты интегрирования на интервале времени $[t_0, t_k]$ системы уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{V(t)}{\sqrt{1+z'^2(x)}}; \\ \dot{z} &= \frac{V(t)z'(x)}{\sqrt{1+z'^2(x)}} \end{aligned} \quad (5.1.30)$$

с начальными условиями:

$$x(0) = x_0; \quad z(0) = z_0. \quad (5.1.31)$$

Пример 5.3.

Сформируем вектор управления БЛА, выведенного в начальную точку с координатами (5.1.12), с помощью управления, сформированного в Примере 5.1.

В дальнейшем БЛА должен осуществить полет при $t_0 = 0$ с со скоростью $V(t) = 100$ м/с на высоте $h = 3000$ м по круговой траектории вида:

$$z(x) = \sqrt{80000^2 - x^2}.$$

В Табл. 5.7 приведены результаты интегрирования системы уравнений (5.1.30) с начальными условиями:

$$x(0) = 56568 \text{ м}; \quad z = 56568 \text{ м};$$

Численное интегрирование выполнялось до момента времени t_k , при котором выполнялись условия достижения БЛА заданной конечной точки его движения с координатами:

$$x(t_k) = 35777 \text{ м}; \quad z(t_k) = 71554 \text{ м}.$$

Таблица 5.7.

t, c	x, m	z, m	P, H	$\alpha, \text{град.}$	$\gamma, \text{град.}$
0	56568,00	56568,00	296,102	6,152	-0,730
25,74	54718,97	58358,44	296,102	6,152	-0,730
51,48	52813,30	60088,47	296,102	6,152	-0,730
77,22	50852,97	61756,31	296,102	6,152	-0,730
102,96	48840,00	63360,22	296,102	6,152	-0,730
128,70	46776,47	64898,54	296,102	6,152	-0,730
154,44	44664,53	66369,69	296,102	6,152	-0,730
180,18	42506,36	67772,14	296,102	6,152	-0,730
205,92	40304,18	69104,44	296,102	6,152	-0,730
231,65	38060,29	70365,20	296,102	6,152	-0,730
257,3937	35777,00	71553,13	296,102	6,152	-0,730

Из этой таблицы получим следующее значение полетного времени при движении БЛА в горизонтальной плоскости:

$$t_k = 257,39 \text{ с.}$$

При определении управляющих функций $P(t)$, $\alpha(t)$, $\gamma(t)$, существенную роль играет характер изменения производной $\dot{\Psi}(t)$, которые входят в используемые выражения (5.1.27) и (5.1.28).

В связи с тем, что БЛА движется в установившемся режиме по круговой траектории $z(x)$ с радиусом $R = 80000$ м. со скоростью $V(t) = 100$ м/с, имеем, что:

$$\dot{\Psi}(t) = -\frac{V}{R} = -0,00125 \text{ рад/с}; \quad t \in [t_0, t_k].$$

Здесь знак «минус» означает, что БЛА движется в направлении начала координат выбранной СК (см. Рис. 5.2).

Отметим, что это же выражение может быть получено путем использования в соотношении (5.1.29) производных $z'(x)$ и $z''(x)$ от рассматриваемой функции.

Подставим закон изменения производной от угла поворота траектории в систему уравнений (5.1.23), (5.1.28) и форму-

лу (5.1.27). Численное решение полученной системы дает следующие компоненты вектора управления (см. Табл. 5.7):

$$P(t) = 296,102 \text{ Н}; \quad \alpha(t) = 6,152^\circ; \quad \gamma(t) = -0,730^\circ, \\ t \in [0; 257,39];$$

Сопоставим эти данные с результатами Примера 5.1.

Значения силы тяги, углов атаки и крена в конечный момент времени вывода БЛА в начальное состояние для последующего движения будут согласно Табл. 5.3 равны:

$$P(647,49) = 296,307 \text{ Н}; \\ \alpha(647,49) = 6,157^\circ; \quad \gamma(647,49) = -5,573^\circ;$$

Переход от этих значений к полученным управлениям потребует при необходимости незначительных корректировок значений силы тяги и угла атаки БЛА и изменения его угла крена, с помощью которого осуществляется полет по заданной круговой траектории $z(x)$ на величину $4,843^\circ$.

5.2. Управление движением беспилотного вертолета по требуемым пространственным и плоским траекториям

Как было указано в Разд. 2.4, косвенное управление движением беспилотного вертолета (БВ) на интервале времени $[t_0, t_k]$ в общем случае описывается вектором:

$$u(t) = (T_{\text{нв}}(t), \chi(t), T_{\text{рв}}(t)), \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (5.2.1)$$

Будем определять этот вектор с использованием теории обратных задач динамики управляемых объектов [9, 16, 17] при известных зависимостях $V_{\text{зад}}(t)$, $\theta_{\text{тр}}(t)$, $\dot{\theta}_{\text{тр}}(t)$, $\Psi_{\text{тр}}(t)$ и $\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t)$, $t \in [t_0, t_k]$, определенных с помощью методов, рассмотренных в Главе 4.

Перепишем динамические уравнения движения БВ (2.4.3)-(2.4.5), (2.4.12) в следующей форме:

$$\begin{aligned}
& T_{\text{НВ}}(t) \cos \chi(t) - 0,5\bar{c}_x \rho(t) V_{\text{зад}}^2(t) F_{\text{НВ}} - \\
& - mg \theta_{\text{тр}}(t) - m \dot{V}_{\text{зад}}(t) = 0; \\
& T_{\text{НВ}}(t) \sin \chi(t) - mg \cos \theta_{\text{тр}}(t) - \\
& - m \dot{V}_{\text{зад}}(t) \dot{\theta}_{\text{тр}}(t) = 0; \\
& T_{\text{рв}}(t) L_{\text{рв}} - M_{\text{р}} - J_y \dot{\Psi}_{\text{тр}}(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_{\text{к}}].
\end{aligned} \tag{5.2.2}$$

Здесь изменение плотности воздуха в процессе полета БВ имеет вид:

$$\rho(t) = \rho(y_{\text{тр}}(t)), \quad t \in [t_0, t_{\text{к}}],$$

где $y_{\text{тр}}(t)$ – текущее значение высоты полета БВ по требуемой траектории.

Аналогичным образом изменение реактивного момента НВ во времени описывается как:

$$M_{\text{р}}(t) = M_{\text{р}}(y_{\text{тр}}(t)), \quad t \in [t_0, t_{\text{к}}],$$

Правая часть этого соотношения определяется выражением (2.4.10) при $y = y_{\text{тр}}(t)$, $t \in [t_0, t_{\text{к}}]$.

Выражения (5.2.2) представляют собой систему нелинейных параметрических уравнений 3-го порядка относительно неизвестных функций $T_{\text{НВ}}(t)$, $\chi(t)$, $T_{\text{рв}}(t)$, $t \in [t_0, t_{\text{к}}]$.

Вследствие простоты вида этой системы ее решение можно получить в аналитической форме.

Введем следующие вспомогательные функции:

$$A(t) = m \dot{V}_{\text{зад}}(t) + mg \sin \theta_{\text{тр}}(t) + 0,5\bar{c}_x \rho(t) V_{\text{зад}}^2(t) F_{\text{НВ}}; \tag{5.2.3}$$

$$B(t) = m V_{\text{зад}}(t) \dot{\theta}_{\text{тр}}(t) + mg \cos \theta_{\text{тр}}(t); \tag{5.2.4}$$

$$C(t) = J_y \dot{\Psi}_{\text{тр}}(t) + M_{\text{р}}, \quad t \in [t_0, t_{\text{к}}]. \tag{5.2.5}$$

Тогда систему уравнений (5.2.2) можно представить как:

$$T_{\text{НВ}}(t) \cos \chi(t) = A(t); \tag{5.2.6}$$

$$T_{\text{НВ}}(t) \sin \chi(t) = B(t); \tag{5.2.7}$$

$$T_{\text{PB}}(t)L_{\text{PB}} = C(t), \quad t \in [t_0, t_K]. \quad (5.2.8)$$

Возводя в квадрат правые и левые части уравнений (5.2.6) и (5.2.7) и суммируя полученные результаты с использованием известного тригонометрического равенства, получим выражение вида:

$$T_{\text{HB}}^2(t) = A^2(t) + B^2(t). \quad (5.2.9)$$

Откуда имеем, что:

$$T_{\text{HB}}(t) = \sqrt{A^2(t) + B^2(t)}, \quad t \in [t_0, t_K]. \quad (5.2.10)$$

Используя уравнение (5.2.7), запишем равенство:

$$\sin \chi(t) = \frac{B(t)}{T_{\text{HB}}(t)}. \quad (5.2.11)$$

Из соотношения (5.2.10) и (5.2.11) получаем расчетную формулу вида:

$$\chi(t) = \arcsin \left(\frac{B(t)}{\sqrt{A^2(t) + B^2(t)}} \right), \quad t \in [t_0, t_K]. \quad (5.2.12)$$

Решение уравнения (5.2.8) записывается как:

$$T_{\text{PB}}(t) = \frac{C(t)}{L_{\text{PB}}}, \quad t \in [t_0, t_K]. \quad (5.2.13)$$

Таким образом, компоненты вектора (5.2.1) управления БВ, обеспечивающего его движение по требуемой пространственной траектории с заданной скоростью, определяется по формулам (5.2.10), (5.2.12), (5.2.13) с использованием выражений (5.2.3)-(5.2.5), в которых функции $V_{\text{зад}}(t)$, $\theta_{\text{тр}}(t)$, $\dot{\theta}_{\text{тр}}(t)$, $\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t)$ вычисляются из соотношений (4.1.13), (4.1.16), (4.1.19), (5.1.10).

В выражении (5.1.10) используются первые и вторые производные от функций $y(x)$ и $z(x)$, описывающих требуемую пространственную траекторию БВ в координатной форме.

Аргумент $x_{\text{тр}}(t)$ этих производных и аргумент $y_{\text{тр}}(t)$ функций ρ и M_ρ определяется путем решения на интервале времени $[t_0, t_k]$ системы дифференциальных уравнений (4.3.47) с начальными условиями (4.3.48).

Согласно общему подходу, принятому в теории управления ЛА [7, 9, 13, 15 и др.], вычисленные на заданном интервале времени компоненты вектора (5.2.1), должны удовлетворять ограничениям вида:

$$\begin{aligned} T_{\text{НВ}}^{\min} &\leq T_{\text{НВ}}(t) \leq T_{\text{НВ}}^{\max}; \\ \chi_{\min} &\leq \chi(t) \leq \chi_{\max}; \\ T_{\text{рв}}^{\min} &\leq T_{\text{рв}}(t) \leq T_{\text{рв}}^{\max}, \quad t \in [t_0, t_k]. \end{aligned}$$

Левые и правые значения этих неравенств определяются конструктивными характеристиками конкретного образца применяемого БВ.

Пример 5.4.

Пусть БВ с параметрами из Табл. 2.9 должен осуществить в заданной маневренной СК $Mxuz$ снижение с пространственным разворотом со скоростью $V_{\text{зад}} = 30$ м/с из начальной точки с координатами:

$$(x_0, y_0, z_0) = (2000, 3000, 400) \text{ м} \quad (5.2.14)$$

в конечную точку с координатами:

$$(x_k, y_k, z_k) = (4000, 1000, 1200) \text{ м.} \quad (5.2.15)$$

При этом заданные начальные и конечные значения его траекторных углов соответственно равны:

$$\theta_0 = 0^\circ; \quad \theta_k = 0^\circ; \quad \Psi_0 = 45^\circ; \quad \Psi_k = 80^\circ. \quad (5.2.16)$$

Используя методы, изложенные в Разд. 4.3, сформируем проекции на координатные плоскости Mxu и Mxz требуемой траектории БВ, которые имеют следующий вид:

$$y(x) = 5 \cdot 10^{-7} x^3 - 4,5 \cdot 10^{-3} x^2 + 12,0x - 7,0 \cdot 10^3;$$

$$z(x) = 1,468 \cdot 10^{-6} x^3 - 0,012 x^2 + 31,556 x - 2,629 \cdot 10^4.$$

Графики этих функций при $x \in [2000, 4000]$ м приведены на Рис. 5.6.

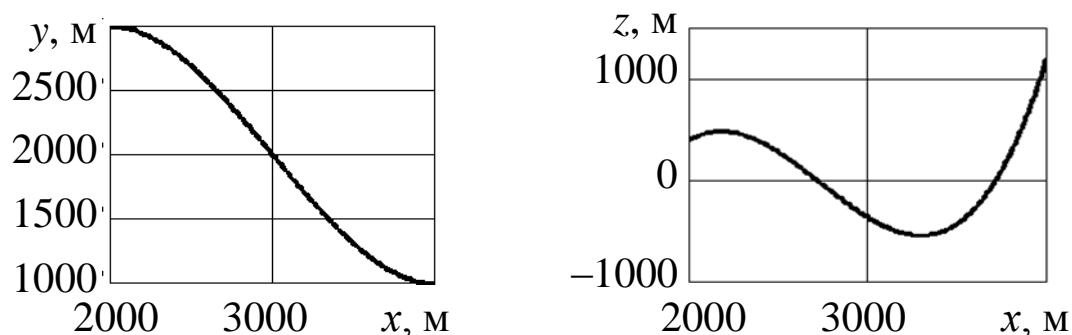


Рис. 5.6

Применяя полученные проекции $y(x)$, $z(x)$ и их производные при решении на интервале времени $[0, t_k]$ системы уравнений (4.3.47) с начальными условиями (5.2.14), сформируем параметрическое представление требуемой траектории снижения БВ, представленное в Табл. 5.8.

Таблица 5.8.

$t, \text{ с}$	$x, \text{ м}$	$y, \text{ м}$	$z, \text{ м}$
0	2000	3000	400
17,054	2392	2799	382,830
34,108	2617	2547	130,240
51,162	2796	2302	-113,246
68,216	2973	2040	-338,501
85,270	3192	1716	-519,39
102,324	3472	1344	-457,179
119,377	3657	1156	-149,363
136,431	3791	1061	246,093
153,485	3904	1013	703,850
170,539	4000	1000	1200

При этом для наглядности в ней и в других таблицах индекс «тр» будем опускать.

Момент времени t_k завершения рассматриваемого режима полета БВ определяется выполнением условий (5.2.15) и составляет значение $t_k = 170,539$ с.

Вид пространственной траектории движения БВ, построенной по данным трех последних столбцов полученной таблицы, приведен на Рис. 5.7.

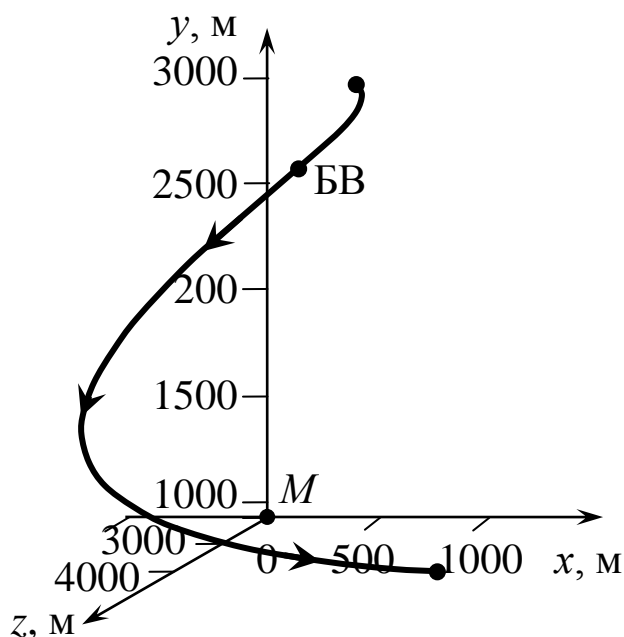


Рис. 5.7

Динамика изменения углов $\theta_{\text{тр}}(t)$, $\Psi_{\text{тр}}(t)$ и их производных при $t \in [0; 170,539]$ с. определяемая по формулам (5.1.10), представлена в Табл. 5.9.

Из этой таблицы следует, что граничные условия вида (5.2.16) для построенной траектории БВ полностью выполняются.

При формировании вектора управления БВ вида (5.2.1) по формулам (5.2.10), (5.2.12) и (5.2.13) будем использовать значения его параметров, представленные в Табл. 2.9 и в примерах, приведенных в Разд. 2.4.

При этом изменение плотности воздуха в процессе полета БВ будем описывать формулой

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-0,0001y(t)},$$

где $y(t)$ – высота его полета в момент времени $t \in [0; 170,539]$ с.

Таблица 5.9.

t, c	$\theta, \text{град.}$	$\dot{\theta}, \text{рад/с.}$	$\Psi, \text{град.}$	$\dot{\Psi}, \text{рад/с}$
0	0	-0,064	45	-0,069
17,054	-43,420	-0,016	-40,743	-0,029
34,108	-51,996	$-4,870 \cdot 10^{-3}$	-52,775	$-4,249 \cdot 10^{-3}$
51,162	-55,172	$-2,029 \cdot 10^{-3}$	-53,699	$1,903 \cdot 10^{-3}$
68,216	-56,291	$-2,726 \cdot 10^{-3}$	-48,418	0,010
85,270	-55,310	$2,897 \cdot 10^{-3}$	-24,568	0,052
102,324	-49,374	$8,226 \cdot 10^{-3}$	45,468	0,044
119,377	-40,458	0,010	67,091	0,011
136,431	-29,271	0,013	74,220	$4,898 \cdot 10^{-3}$
153,485	-15,387	0,015	77,833	$2,787 \cdot 10^{-3}$
170,539	$-9,901 \cdot 10^{-7}$	0,016	80	$1,750 \cdot 10^{-3}$

Результаты расчетов компонент вектора управления БВ по формулам (5.2.3)-(5.2.5), (5.2.10), (5.2.12) и (5.2.13) приведены в Табл. 5.10.

Таблица 5.10.

t, c	$T_{\text{HB}}, \text{Н}$	$\chi, \text{град.}$	$T_{\text{PB}}, \text{Н}$
0	15528,418	86,230	630,801
17,054	17846,377	46,947	650,342
34,108	18227,499	39,362	674,223
51,162	18281,426	36,481	697,111
68,216	18307,062	35,619	722,524
85,270	18400,612	37,185	756,621
102,324	18677,095	44,162	794,409
119,377	18944,191	53,542	812,768
136,431	19349,269	65,030	822,819
153,485	19834,406	78,778	827,870
170,539	20199,059	86,461	829,295

На Рис. 5.8 представлены графики полученных зависимостей $T_{\text{HB}}(t)$, $\chi(t)$, $T_{\text{PB}}(t)$ при $t \in [0; 170,539]$ с.

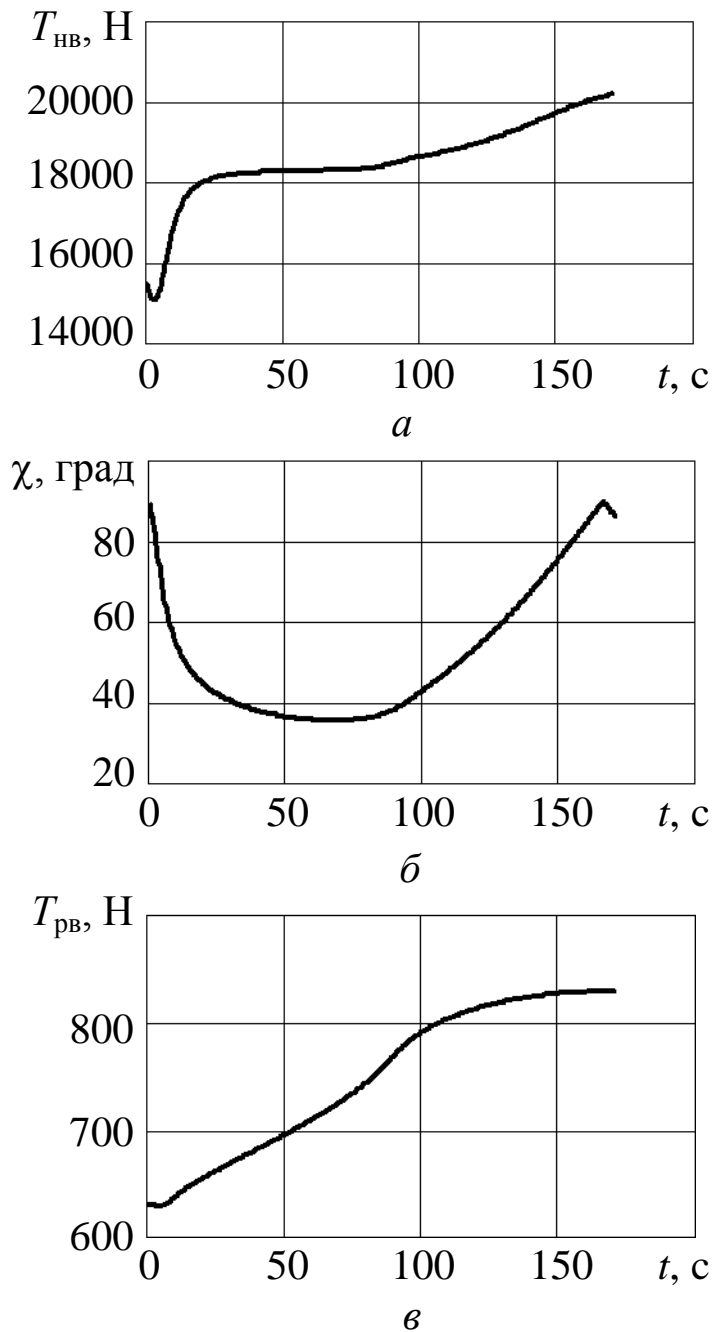


Рис. 5.8

При полете БВ в вертикальной плоскости имеем, что $\Psi(t) = 0; \dot{\Psi}(t) = 0, t \in [t_0, t_k]$. В этом случае из выражений (5.2.5) и (5.2.13) следует, что $T_{рв}(t) = M_p(t)/L_{рв}, t \in [t_0, t_k]$.

Остальные компоненты вектора управления (5.2.1) вычисляются по формулам (5.2.10) и (5.2.12).

Пример 5.5.

Сформируем вектор управления (5.2.1) для БВ, который должен осуществить на интервале времени $[0, 60]$ с. набор

высоты со скоростью $V_{\text{зад}} = 72,2$ м/с при угле наклона траектории $\theta(t) = 15^\circ$, $t \in [0, 60]$ из начальной точки с координатами:

$$(x_0, y_0) = (500, 100) \text{ м.} \quad (5.2.17)$$

Общий вид требуемой прямолинейной траектории полета БВ в координатной форме записывается как [19]:

$$y(x) - y_0 = \text{tg}15^\circ(x - x_0).$$

После несложных преобразований получаем уравнение траектории БВ вида:

$$y(x) = 0,2679x - 33,9745.$$

Параметрическое представление требуемой траектории набора высоты БВ, полученное путем интегрирования системы уравнений (4.2.22) с начальными условиями (5.2.17), приведено в первых трех столбцах Табл. 5.11.

Таблица 5.11

t , с.	x , м	y , м	$T_{\text{нв}}$, Н	χ , град	$T_{\text{рв}}$, Н
0	500	100	22613,074	55,274	925,114
6	918,4	212,101	22563,006	55,457	911,004
12	1337	324,202	22513,725	55,640	897,044
18	1755	436,304	22465,219	55,821	883,233
24	2174	548,405	22417,477	56,002	869,571
30	2592	660,506	22370,485	56,180	856,057
36	3011	772,607	22324,233	56,358	842,696
42	3429	884,708	22278,707	56,534	829,491
48	3848	996,810	22233,898	56,709	816,451
54	4266	1109,911	22189,794	56,883	803,473
60	4684	1221,012	22146,382	57,056	790,903

При определении компонент вектора управления $u(t)$, $t \in [0, 60]$ с. будем использовать числовые значения параметров БВ из Табл. 2.9 с дополнительными исходными данными:

$$\theta(t) = 15^\circ = 0,2618 \text{ рад}; \quad \dot{\theta}(t) = 0.$$

При выполнении расчетов будем применять приведенную выше зависимость плотности воздуха от высоты вида:

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-0,0001y(t)}, \quad t \in [0, 60] \text{ с}, \quad (5.2.18)$$

где $\rho_0 = 1,225 \text{ кг/м}^3$ – плотность воздуха на уровне Земли; $y(t)$ – высота полета БВ в момент времени $t \in [0, 60] \text{ с}$, представленная в Табл. 5.11.

Значения момента $M_p(t) = M_p(y(t))$ вычисляются по формуле (2.4.10).

Результаты расчетов с использованием выражений (5.2.3), (5.2.4), (5.2.12) и (5.2.10), приведены в трех последних столбцах Табл. 5.11 и на Рис. 5.9.

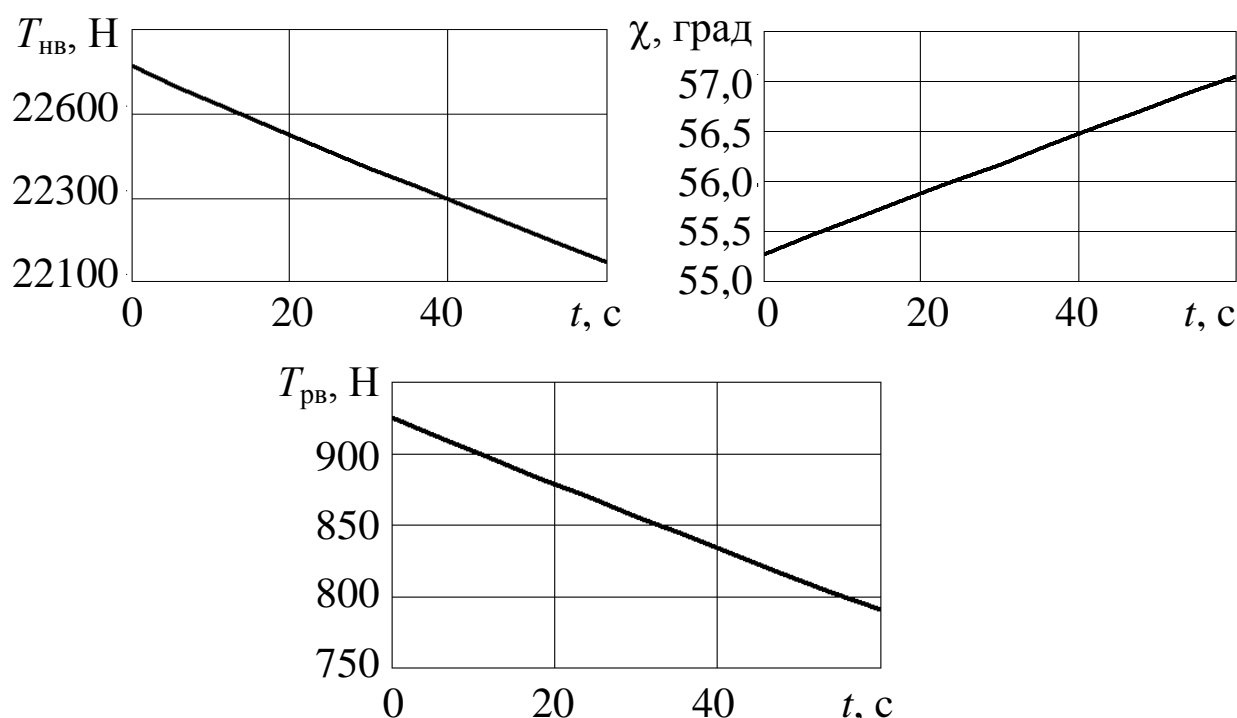


Рис. 5.9

В примере 2.6 рассмотрено моделирование процесса набора высоты БВ при угле наклона его траектории $\theta = 15^\circ$ в предположении, что плотность воздуха $\rho(t) = \rho_0$ и следующих управляющих воздействиях:

$$T_{HB}(t) = 22669 \text{ Н}; \quad \chi(t) = 55,106^\circ;$$

$$T_{pB}(t) = (923,972 - 2,238t) \text{ Н}, \quad t \in [0, 60] \text{ с}.$$

Эти значения получены при расчетах по приведенным выше формулам для постоянного значения плотности возду-

ха. Последняя формула является линейной аппроксимацией расчетных данных требуемой силы $T_{рв}(t)$ тяги РВ.

Проведенные при предположении $\rho(t) = \rho_0$ вычислительные эксперименты при различных значениях скорости $V_{зад}$ набора БВ высоты на фиксированном интервале времени $[0, 60]$ с. дали следующие результаты:

1) при $V_{зад} = 100$ м/с получено, что:

$$y_{\max} = y(60) = 1653 \text{ м}; \quad T_{нв}(t) = 27520 \text{ Н}; \quad \chi(t) = 42,485^\circ;$$

$$T_{рв}(t) = (919,596 - 3,076t) \text{ Н}, \quad t \in [0, 60] \text{ с.}$$

2) для $V_{зад} = 30$ м/с имеем:

$$y_{\max} = y(60) = 565,874 \text{ м}; \quad T_{нв}(t) = 19640 \text{ Н}; \quad \chi(t) = 71,152^\circ;$$

$$T_{рв}(t) = (929,725 - 0,938t) \text{ Н}, \quad t \in [0, 60] \text{ с.}$$

Из приведенных выше результатов следует, что расчетные формулы для определения компонент вектора $u(t)$ управления БВ достоверно отражают объективные изменения их значений при изменениях скорости и высоты полета БВ.

При формировании управления БВ при его полетах в горизонтальной плоскости на высоте h используется вектор $u(t)$ вида (5.2.1).

Применение формул (5.2.10), (5.2.12) и (5.2.13) осуществляется при условиях:

$$\theta(t) = 0; \quad \dot{\theta}(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_k].$$

Тогда из выражений (5.2.3) и (5.2.4) следует, что:

$$A(t) = m\dot{V}_{зад}(t) + 0,5\bar{c}_x\rho(h)V_{зад}^2(t)F_{нв}; \quad (5.2.19)$$

$$B(t) = mg, \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (5.2.20)$$

При $V_{зад}(t) = \text{const}$ и $\dot{V}_{зад}(t) = 0$ первое из этих соотношений принимает вид:

$$A(t) = 0,5\bar{c}_x\rho(h)V_{зад}^2(t)F_{нв}. \quad (5.2.21)$$

В этой формуле значение $\rho(h)$ получают при подстановке в выражение (5.2.18) высоты $y(t) = h$, $t \in [t_0, t_k]$.

Функция $C(t)$ вычисляется по формуле (5.2.5), где зависимость $\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t)$ формируется с использованием координатного $z = z(x)$ и параметрического $x(t)$, $z(t)$, $t \in [t_0, t_k]$ представлений требуемой траектории полета БВ с помощью указанных выше соотношений.

Пример 5.6.

Пусть рассмотренный выше БВ должен осуществить вираж радиусом $R = 2000$ м на высоте $h = 100$ м. с различными законами изменения заданной скорости $V_{\text{зад}}(t)$, $t \in [0, t_k]$.

Будем считать, что, как и в Примере 2.6, используется маневренная СК с началом в центре круговой траектории виража (см. Рис. 2.10,б). Зададим начальные и конечные условия полета БВ следующими значениями:

$$(x_0, y_0, z_0) = (0; 100; 2000) = (x_k, y_k, z_k); \quad \Psi_0 = 0^\circ$$

и будем считать, что вертолет осуществляет вираж «по часовой стрелке».

В этом случае требуемое изменение производной от курсового угла БВ вычисляется как:

$$\dot{\Psi}_{\text{тр}}(t) = -\frac{V_{\text{зад}}(t)}{R}, \quad t \in [0, t_k]. \quad (5.2.22)$$

Определим векторы управления БВ:

$$u(t) = (T_{\text{нв}}(t), \chi(t), T_{\text{рв}}(t)), \quad t \in [0, t_k]$$

для различных законов $V_{\text{зад}}(t)$, $t \in [0, t_k]$.

Эти законы будем формировать с использованием линейной зависимости вида:

$$V_{\text{зад}}(t) = a + bt, \quad t \in [0, t_k], \quad (5.2.23)$$

в которой необходимо определить значения параметров a , b и t_k для следующих режимов движения БВ по замкнутой траектории:

1) вираж с постоянной скоростью $V_{\text{зад}}(t) = 72,2$ м/с,

2) вираж с торможением при $V_{\text{зад}}(0) = 72,2$ м/с и $V_{\text{зад}}(t_{\text{к}}) = 40$ м/с,

3) вираж с разгоном от $V_{\text{зад}}(0) = 72,2$ м/с до $V_{\text{зад}}(t_{\text{к}}) = 100$ м/с.

При первом режиме полета БВ в выражении (5.2.23) имеем следующие значения:

$$a = 72,2 \text{ м/с}; \quad b = 0; \quad t_{\text{к}} = \frac{2\pi R}{V_{\text{зад}}} = 174,049 \text{ с.}$$

Применяя формулы (5.2.19), (5.2.21), (5.2.22), (5.2.10), (5.2.12), (5.2.13), получаем следующие значения компонент искомого вектора управления:

$$T_{\text{нв}}(t) = 20800 \text{ Н}; \quad \chi(t) = 67,671^\circ;$$

$$T_{\text{рв}}(t) = 933,373 \text{ Н}; \quad t \in [0; 174,049].$$

Для второго режима полета БВ, для которого $a = 72,2$ м/с, необходимо определить значения остальных параметров b и $t_{\text{к}}$ выражения (5.2.23) из следующей системы нелинейных алгебраических уравнений:

$$\int_0^{t_{\text{к}}} (72,2 - bt) dt = 2\pi R;$$
$$72,2 - bt_{\text{к}} = 40.$$

Вычисляя интеграл и подставляя значения $R = 2000$, конкретизируем эту систему как:

$$72,2t_{\text{к}} - 0,5bt_{\text{к}}^2 - 12560 = 0;$$
$$32,2 - bt_{\text{к}} = 0. \tag{5.2.24}$$

Решая численно систему (5.2.24), получаем следующие значения искоемых параметров:

$$b = 0,144; \quad t_{\text{к}} = 223,999.$$

Отсюда следует, что используемый закон изменения скорости БВ (5.2.23) конкретизируется как:

$$V_{\text{зад}}(t) = 72,2 - 0,144t, \quad t \in [0; 223,999] \text{ с.}$$

Результаты расчетов управления БВ при вираже с торможением приведены на Рис. 5.10 и в Табл. 5.12.

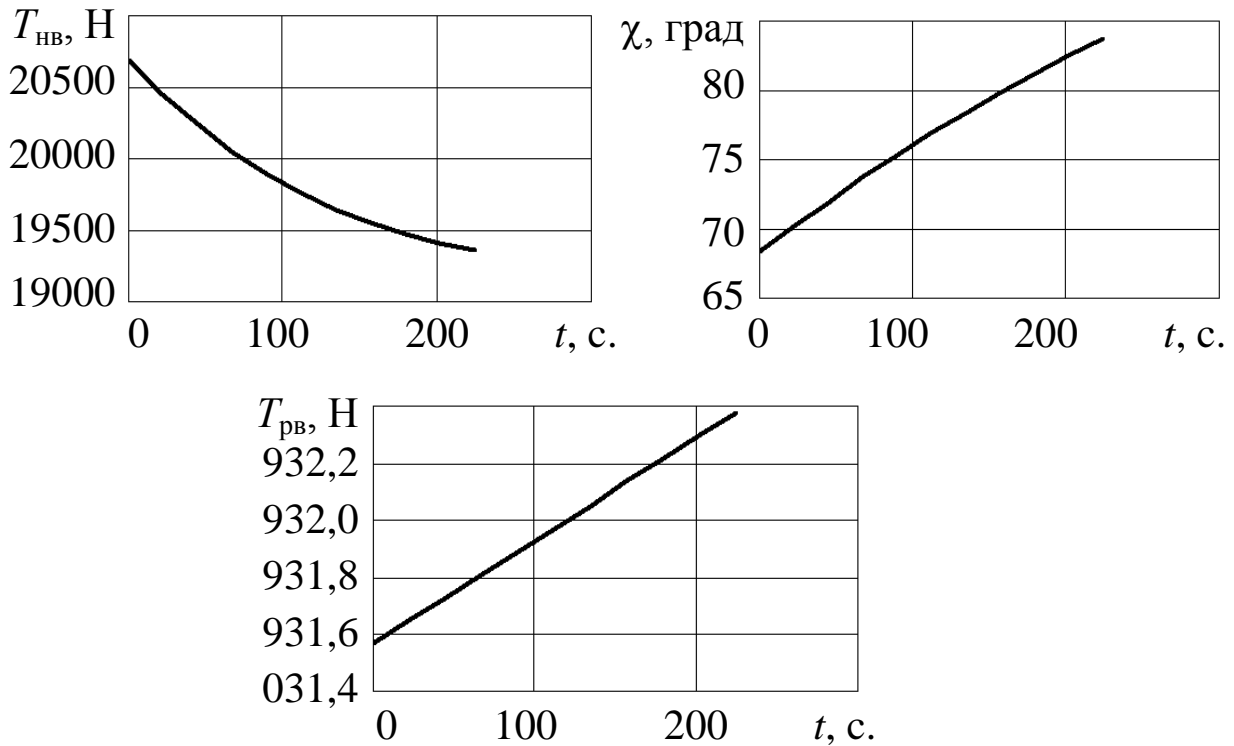


Рис. 5.10

При выполнении БВ виража с разгоном (третий рассматриваемый режим его полета) имеем закон изменения скорости вида:

$$V_{\text{зад}}(t) = 72,2 + bt, \quad t \in [0; t_{\text{к}}].$$

Таблица 5.12

$t, \text{ с.}$	$T_{\text{нв}}, \text{ Н}$	$\chi, \text{ град}$	$T_{\text{рв}}, \text{ Н}$
0	20694,688	68,393	931,568
22,4	20450,562	70,193	931,649
44,8	20236,816	71,948	931,729
67,2	20051,311	73,652	931,810
89,6	19891,853	75,299	931,891
112,0	19756,219	76,882	931,971
134,4	19642,185	78,395	932,052
156,8	19547,551	79,834	932,133
179,2	19470,163	81,194	932,213
201,6	19407,939	82,472	932,294
224,0	19358,884	83,664	932,375

Система нелинейных уравнений для определения параметров b и t_k , записанная по аналогии с выражениями вида (5.2.24), имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} 72,2t_k - 0,5bt_k^2 - 12560 &= 0; \\ bt_k - 27,8 &= 0. \end{aligned}$$

Корнями этой системы являются следующие значения:

$$b = 0,190; \quad t_k = 145,951.$$

Таким образом, при расчете вектора управления третьим режимом полета БВ используется закон вида:

$$V_{\text{зад}}(t) = 72,2 + 0,190t, \quad t \in [0; 145,951].$$

Результаты этого расчета представлены в Табл. 5.13 и на Рис. 5.11.

Таблица 5.13

$t, \text{с.}$	$T_{\text{нв}}, \text{Н}$	$\chi, \text{град}$	$T_{\text{рв}}, \text{Н}$
0	20944,849	66,727	931,568
14,595	21196,932	65,191	931,499
29,190	21474,238	63,636	931,429
43,785	21777,867	62,067	931,360
58,380	22108,839	60,490	931,291
72,975	22468,089	58,910	931,221
87,571	22856,463	57,331	931,152
102,166	23274,713	55,759	931,083
116,761	23723,496	54,197	931,014
131,356	24203,373	52,651	930,944
145,951	24714,811	51,124	930,875

Отметим, что проведенные при решении данного примера вычислительные эксперименты с различными законами $V_{\text{зад}}(t)$, $t \in [0, t_k]$ показали, что полученные управления обеспечивают движение БВ по замкнутой круговой траектории с радиусом $R = 2000$ м.

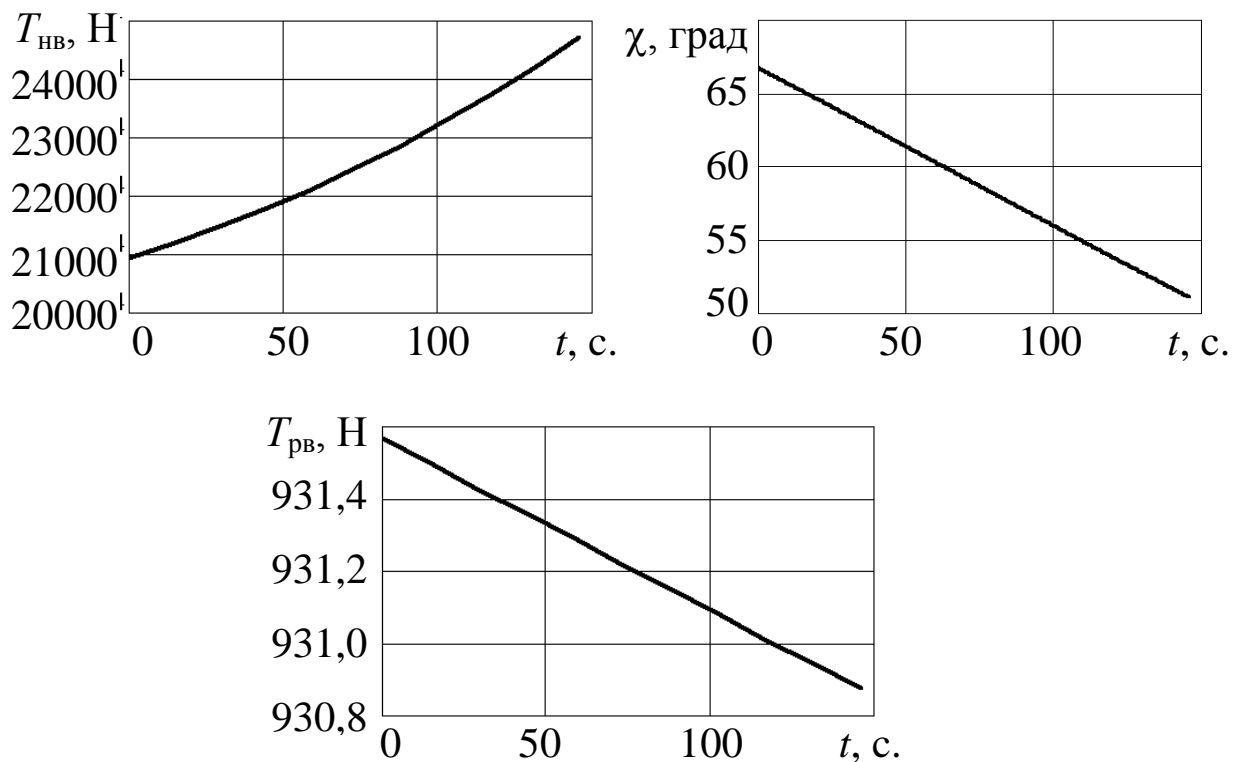


Рис. 5.11

Рассмотрим особенности формирования управлений для выполнения специальных режимов полета БВ.

При реализации режима торможения БВ с зависанием вектор управления $u(t)$ определяется с использованием выражений (5.2.3)-(5.2.5), (5.2.10), (5.2.12), (5.2.13) при подстановке в формулы (5.2.3), (5.2.4) законов изменения скорости $V_{зад}(t)$ и ускорения $\dot{V}_{зад}(t)$, определенных методами Разд. 4.1 и 4.3.

Отметим, что при торможении БВ на постоянной высоте $T_{рв}(t) = \text{const}, t \in [t_0, t_k]$ (см. Пример 2.7).

Для режима обратного полета БВ по траектории ранее выполненного прямого полета в выражениях (5.2.3) и (5.2.4) проводятся следующие преобразования:

$$\sin \theta_{тр} = \sin(\theta_{тр}^{пр} + \pi) = -\sin \theta_{тр}^{пр};$$

$$\cos \theta_{тр} = \cos(\theta_{тр}^{пр} + \pi) = -\cos \theta_{тр}^{пр},$$

где $\theta_{тр}^{пр}$ – угол наклона траектории БВ в прямом полете.

С учетом этих изменений для $\theta_{\text{тр}} = 0^\circ$ и $\theta_{\text{тр}} = 15^\circ$ получены управления, использование в Примере 2.8.

В процессе разворота БВ при его висении, описываемого соотношениями (2.4.22)-(2.4.24), управляющие воздействия, реализуемые на интервале времени $t \in [t_0, t_k]$ и вычисленные из приведенных выше выражений, будут равны:

$$\begin{aligned} T_{\text{НВ}}(t) &= mg; \quad \chi(t) = 0; \\ T_{\text{РВ}}(t) &= \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{(t_2 - t_1)L_{\text{РВ}}} + \frac{M_{\text{р}}(y_{\text{в}})}{L_{\text{РВ}}}, \quad t \in [t_1, t_2]. \end{aligned} \quad (5.2.25)$$

Здесь Ψ_1 и Ψ_2 – начальное и конечное значения курсового угла при развороте БВ; $y_{\text{в}}$ – высота висения и разворота вертолета.

Отметим, что для расчета тяги РВ используется формула (2.4.28).

Режим висения БВ на высоте $y_{\text{в}}$ с курсовым углом $\Psi_{\text{в}}$ реализуется в момент времени t при управлении вида:

$$T_{\text{НВ}}(t) = mg; \quad \chi(t) = 0; \quad T_{\text{РВ}}(t) = \frac{M_{\text{р}}(y_{\text{в}})}{L_{\text{РВ}}}, \quad t \in [t_1, t_2]. \quad (5.2.26)$$

Значение тяги РВ, которая используется только для компенсации реактивного момента НВ, получается из выражения (5.2.25) при $\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_{\text{в}}$.

Приведем расчетные соотношения для определения управления БВ в режимах вертикального взлета и посадки.

В этих режимах управление БВ осуществляется путем изменения во времени сил $T_{\text{НВ}}(t)$ и $T_{\text{РВ}}(t)$ при $\chi(t) = 0$.

При вертикальном взлете БВ из выражения (5.2.10) при $B(t) = 0$ получаем следующую расчетную формулу:

$$T_{\text{НВ}}(t) = m\dot{V}_{\text{зад}}(t) + 0,5\bar{c}_x\rho_0 V_{\text{зад}}(t)F_{\text{НВ}} + mg, \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (5.2.27)$$

Аналогичным образом можно записать выражение:

$$T_{\text{нв}}(t) = mg - 0,5\bar{c}_x \rho_0 V_{\text{зад}}(t) F_{\text{нв}} - m \dot{V}_{\text{зад}}(t), \quad t \in [t_0, t_k], \quad (5.2.28)$$

описывающее изменение тяги НВ БВ при режиме его вертикальной посадки.

Отметим, что в связи с небольшими значениями высот h взлета и посадки БВ в выражениях (5.2.27) и (5.2.28) используется величина плотности воздуха ρ_0 на уровне Земли.

Величина $T_{\text{рв}}(t)$ может быть определена из выражений (5.2.26) при $y_{\text{в}} = 0$.

Кроме этого следует заметить, что законы изменения управляющего воздействия $T_{\text{нв}}(t)$ существенно зависят от заданных зависимостей $V_{\text{зад}}(t)$, сформированных методами, описанными в Разд. 4.1.

Пример 5.7.

Определим управления БВ при его вертикальном взлете на высоту $h = 500$ м.

Используя результаты Примера 4.3, будем применять следующие законы изменения скорости и ускорения БВ:

$$\begin{aligned} V_{\text{зад}}(t) &= 0,075t^2 - 2,545 \cdot 10^{-3}t^3 + 2,172 \cdot 10^{-5}t^4; \\ \dot{V}_{\text{зад}}(t) &= 0,15t - 7,635 \cdot 10^{-3}t^2 + 8,688 \cdot 10^{-5}t^3, \quad (5.2.29) \\ &t \in [0; 58,594] \text{ с.} \end{aligned}$$

Вид и значения этих зависимостей приведены на Рис. 4.5 и в Табл. 4.5.

Подставляя в выражение (5.2.27) соответствующие параметры рассматриваемого БВ из Табл. 2.9 и используя значение $\rho_0 = 1,225 \text{ кг/м}^3$, после несложных преобразований получаем при $g = 9,80665 \text{ кг/с}^2$ искомые управления вида:

$$T_{\text{HB}}(t) = [1962(0,15t - 7,635 \cdot 10^{-3}t^2 + 8,688 \cdot 10^{-5}t^3) + 68,906(0,075t^2 - 2,545 \cdot 10^{-3}t^3 + 2,172 \cdot 10^{-5}t^4) + 19240,647] \text{ Н}; \quad (5.2.30)$$

$$\chi(t) = 90^\circ; \quad T_{\text{PB}}(t) = 945,656 \text{ Н}, \quad t \in [0; 48,925] \text{ с.}$$

Результаты расчетов с использованием первого из выражений (5.2.30) приведены в Табл. 5.14 и на Рис. 5.12.

Таблица 5.14

$t, \text{ с.}$	$T_{\text{HB}}, \text{ Н}$
0	19240,647
4,077	20361,579
8,154	20959,784
12,231	21230,328
16,308	21232,968
20,385	20933,780
24,462	20311,137
28,540	19445,537
32,617	18546,849
36,694	17906,755
40,771	17798,224
44,848	18378,001
48,925	19240,647

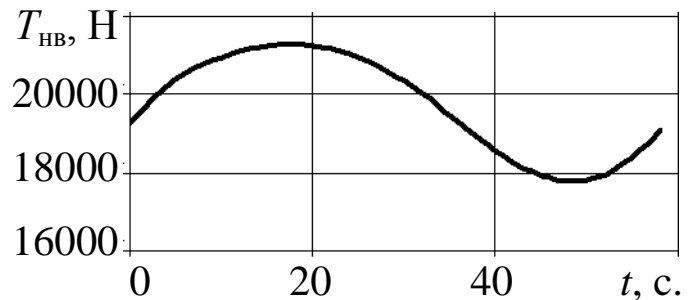


Рис. 5.12

В заключение главы отметим необходимость обязательной проверки сформированных векторов $u(t)$ косвенного управления БЛА путем интегрирования на интервале $[t_0, t_k]$ соответствующих уравнений их движения, приведенных в Главе 2, и сопоставляя полученные функции $V(t)$, $\theta(t)$, $\Psi(t)$, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ с заданными и требуемыми зависимостями $V_{\text{зад}}(t)$, $\theta_{\text{тр}}(t)$, $\Psi_{\text{тр}}(t)$, $t \in [t_0, t_k]$.

Глава 6. ПРЯМОЕ ПРОГРАММНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОЛЕТАМИ БЛА

Анализ литературы, посвященной вопросам прямого программного управления различными видами БЛА, показал полное отсутствие в настоящее время методов и алгоритмов формирования непосредственных управляющих воздействий на их исполнительные органы, обеспечивающие полет БЛА по траектории, требуемой для выполнения полетного задания.

В Разд. 1.2 отмечено, что такими воздействиями для БЛА классической самолетной схемы являются законы изменения числа оборотов $\delta_p(t) = n(t)$ вала ТРД или его винтомоторной группы и углов отклонения $\delta_b(t)$, $\delta_o(t)$, $\delta_n(t)$ руля высоты, элеронов и руля направления БЛА. Для рассматриваемого в данной работе вида беспилотного вертолета прямым управлением являются законы изменения относительного числа оборотов двигателя $\bar{n}_{дв}(t)$, общего шага $\varphi_{нв}(t)$ несущего винта, угла отклонения $\varphi_{ст}(t)$ управляемого стабилизатора, угла наклона $\delta_{ап}(t)$ автомата перекоса и шаг $\varphi_{рв}(t)$ рулевого винта вертолета.

Именно эти законы, введенные в их САУ, определяют требуемую для выполнения целевого задания программу управления полетом конкретного БЛА.

В данной главе при описании методов определения законов прямого управления рассматриваемых видов БЛА используются сформированные методами Главы 5 векторы $u(t)$ их косвенного управления.

6.1. Управление силой тяги БЛА самолетных схем с турбореактивными и поршневыми двигателями

Рассмотрим метод определения требуемого числа оборотов $n(t)$ вала двигателя БЛА, обеспечивающего значения силы тяги $P(t)$, $t \in [t_0, t_k]$, определенное методами Главы 5.

В практических задачах динамики полета ЛА тяга турбореактивного двигателя (ТРД) описывается его высотно-скоростной характеристикой (ВСХ) вида:

$$P = P(M_{\Pi}, h, \bar{n}), \quad (6.1.1)$$

где $M_{\Pi} = V/a(h)$ – полетное число Маха; V – скорость набегающего потока воздуха; $a(h)$ – скорость звука на высоте h ; \bar{n} – относительное число оборотов турбины (вала) двигателя, выраженное в долях единицы или в процентах от их максимального значения n_{\max} .

Особенности ТРД, применяемых в силовых установках БЛА, приведены в работе [2].

Зависимость вида (6.1.1) в технической документации на двигатель БЛА представляется в форме графиков или таблиц [9].

Пример фрагментов ВСХ одного из типов ТРД БЛА представлен в Табл. 6.1.

В общем случае требуемый закон изменения числа $\bar{n}(t)$ оборотов двигателя БЛА, обеспечивающий создание силы тяги $P(t)$, определяется с использованием выражения (6.1.1) как решение следующего параметрического уравнения:

$$P(M(t), y(t), \bar{n}(t)) - P(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (6.1.2)$$

Здесь $M(t) = V(t)/a(y(t))$ – значение числа Маха полета БЛА в момент времени $t \in [t_0, t_k]$; $y(t)$ – высота его полета в этот момент времени.

Реальное число оборотов двигателя для величины $\bar{n}(t)$, выраженной в процентах, определяется по формуле:

$$n(t) = \frac{\bar{n}(t)}{100} n_{\max}. \quad (6.1.3)$$

Таблица 6.1

$h = 0 \text{ м}; \bar{n} = 100\%$									
M_{Π}	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
P, H	1163,15	1124,90	1112,83	1118,69	1146,61	1166,94	1194,17	1208,65	–
.....									
$h = 0 \text{ м}; \bar{n} = 75\%$									
M_{Π}	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
P, H	352,19	316,62	286,02	260,33	233,89	213,97	–	–	–
.....									
$h = 2000 \text{ м}; \bar{n} = 100\%$									
M_{Π}	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
P, H	909,26	879,68	869,43	873,57	897,80	941,68	996,07	1049,05	1098,95
.....									
$h = 2000 \text{ м}; \bar{n} = 95\%$									
M_{Π}	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
P, H	729,54	699,25	687,18	687,18	704,92	738,53	781,83	848,72	939,36
.....									
$h = 3000 \text{ м}; \bar{n} = 100\%$									
M_{Π}	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
P, H	800,70	774,63	766,07	770,35	790,98	826,38	872,69	950,90	1011,54
.....									
$h = 3000 \text{ м}; \bar{n} = 95\%$									
M_{Π}	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
P, H	642,28	616,60	605,32	605,32	619,71	649,90	690,14	748,12	825,94
.....									
$h = 5000 \text{ м}; \bar{n} = 100\%$									
M_{Π}	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
P, H	615,17	594,51	588,72	588,72	604,08	631,80	670,34	724,76	797,31
.....									
$h = 6000 \text{ м}; \bar{n} = 100\%$									
M_{Π}	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
P, H	536,08	517,42	511,82	513,69	526,54	550,12	583,23	633,21	694,98
.....									
$h = 6000 \text{ м}; \bar{n} = 95\%$									
M_{Π}	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
P, H	429,72	411,16	404,44	404,44	414,24	431,99	461,30	503,52	546,62
.....									
$h = 7000 \text{ м}; \bar{n} = 95\%$									
M_{Π}	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
P, H	372,82	357,06	350,55	350,55	358,69	374,99	399,07	430,21	472,77
.....									
$h = 7000 \text{ м}; \bar{n} = 90\%$									
M_{Π}	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
P, H	293,33	276,31	266,53	262,18	264,54	275,58	295,86	320,85	355,07
.....									
$h = 9000 \text{ м}; \bar{n} = 75\%$									
M_{Π}	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
P, H	106,14	95,47	85,94	77,91	70,38	63,86	–	–	–

Проиллюстрируем аналитическое решение уравнения (6.1.2) при определении закона $n(t)$ для одномоторного БЛА, оснащенного поршневым двигателем (ПД).

Общая формула для тяги такого двигателя приведена в работах [38, 39].

Конкретизируя эту формулу с использованием работы [39], получаем ВСХ ПД вида:

$$P = \frac{\alpha_P(V, h)n^2 D^4}{0,0288 \cdot 10^6}.$$

Здесь α_P – коэффициент тяги винтомоторной группы БЛА, заданной в форме графиков (номограммы), зависящий от значений скорости V и высоты h полета БЛА, профиля и угла установки винта; D – диаметр винта.

В этом случае уравнение (6.1.2) записывается как:

$$\frac{\alpha_P(V(t), y(t))D^4 n^2(t)}{0,0288 \cdot 10^6} - P(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_k].$$

Решение этого уравнения, определяющее число оборотов вала ПД в абсолютных единицах, имеет вид:

$$n(t) = \frac{169,705}{D^2} \sqrt{\frac{P(t)}{\alpha_P(V(t), y(t))}}, \quad t \in [t_0, t_k] \quad (6.1.4)$$

Заметим, что для применения этой формулы необходимо использовать аналитическое представление коэффициента $\alpha_P(V, h)$ в виде функции от скорости и высоты полета БЛА.

В работе [22] для БЛА, оснащенных ТРД, был предложен метод расчета числа оборотов турбины $n(t)$, основанный на требуемых в каждый момент времени t его полета значениях $P(t)$, $y(t)$ и $V(t)$, $t \in [t_0, t_k]$.

Суть предлагаемого подхода состоит в непосредственном построении на основе таблицы ВСХ ТРД зависимости вида:

$$\bar{n} = \bar{n}(P, M, h),$$

которая используется при определении закона управления силой тяги БЛА.

Задача построения такой зависимости связана с применением достаточно сложных методов интерполяции и аппроксимации функции многих переменных [19].

Приведем более простой инженерный подход к построению зависимости (6.1.4), предложенный в работе [22]. Этот подход подразумевает применение широко распространенного на практике метода наименьших квадратов [21], позволяющего с определенной точностью получить требуемое аналитическое представление результатов экспериментальных исследований в виде регрессионных зависимостей. В нашем случае таковыми являются работы по формированию ВСХ разработанного двигателя.

В качестве аналитического представления искомого числа оборотов вала турбины ТРД, построенного на основе таблицы его ВСХ вида (6.1.1), будем рассматривать трехмерный многочлен второго порядка [22]:

$$\begin{aligned} \bar{n} = a_0 + a_1P + a_2M + a_3h + a_4P^2 + a_5M^2 + \\ + a_6h^2 + a_7PM + a_8Ph + a_9Mh. \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

Задачей построения этой зависимости является определение значений входящих в нее коэффициентов известным методом наименьших квадратов [21].

Пусть используемая таблица ВСХ описывается массивом данных $\{P_s, M_s, \bar{n}_s, | s = \overline{(1, S)}\}$.

Коэффициенты $a_i, i = \overline{(1, 9)}$ этой зависимости определяются из решения вспомогательной задачи оптимизации вида [21]:

$$J = \sum_{s=1}^S \left(\bar{n}_s - a_0 - a_1 P_s - a_2 M_s - a_3 h_s - a_4 P_s^2 - a_5 M_s^2 - a_6 h_s^2 - a_7 P_s M_s - a_8 P_s h_s - a_9 M_s h_s \right)^2 \rightarrow \min.$$

Используя необходимые условия экстремума целевой функции $J = J(a_0, a_1, \dots, a_9)$ [19]:

$$\frac{\partial J}{\partial a_i} = 0, \quad i = (\overline{0, 9}),$$

получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений 10-го порядка, которую в общем виде представим как:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^S A_s(a_0, a_1, \dots, a_9) &= 0; \\ \sum_{s=1}^S A_s(a_0, a_1, \dots, a_9) M_s &= 0; \\ \sum_{s=1}^S A_s(a_0, a_1, \dots, a_9) h_s &= 0; \\ \sum_{s=1}^S A_s(a_0, a_1, \dots, a_9) P_s^2 &= 0; \\ \sum_{s=1}^S A_s(a_0, a_1, \dots, a_9) M_s^2 &= 0; \\ \sum_{s=1}^S A_s(a_0, a_1, \dots, a_9) h_s^2 &= 0; \\ \sum_{s=1}^S A_s(a_0, a_1, \dots, a_9) P_s M_s &= 0; \\ \sum_{s=1}^S A_s(a_0, a_1, \dots, a_9) P_s h_s &= 0; \\ \sum_{s=1}^S A_s(a_0, a_1, \dots, a_9) M_s h_s &= 0, \end{aligned} \tag{6.1.6}$$

где A_s являются линейной функцией искомых параметров a_0, a_1, \dots, a_9 вида:

$$\begin{aligned}
A_s(a_0, a_1, \dots, a_9) = & \bar{n}_s - a_0 - a_1 P_s - a_2 M_s - a_3 h_s - \\
& - a_4 P_s^2 - a_5 M_s^2 - a_6 h_s^2 - a_7 P_s M_s - \\
& - a_8 P_s h_s - a_9 M_s h_s, \quad s = (\overline{1, S}).
\end{aligned} \quad (6.1.7)$$

Раскрывая выражения (6.1.6) путем подстановки в них функций (6.1.7), получаем стандартную форму системы линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных a_0, a_1, \dots, a_9 .

Эта система 10-го порядка решается известными численными методами, изложенными в работе [9].

Преобразуем выражение (6.1.5) в рабочую формулу для расчета относительного числа оборотов вала турбины ТРД в каждый момент времени t полета БЛА:

$$\begin{aligned}
\bar{n}(t) = & a_0 + a_1 P(t) + a_2 \frac{V(t)}{340 - 0,004 y(t)} + \\
& + a_3 y(t) + a_4 P^2(t) + a_5 \left(\frac{V(t)}{340 - 0,004 y(t)} \right)^2 + \\
& + a_6 (y(t))^2 + a_7 \frac{P(t)V(t)}{340 - 0,004 y(t)} + \\
& + a_8 P(t)y(t) + a_9 \frac{V(t)y(t)}{340 - 0,004 y(t)},
\end{aligned} \quad (6.1.8)$$

где $P(t)$, $V(t)$, $y(t)$ – соответственно сила тяги, скорость и высота полета БЛА, осуществляющего движение по заданной траектории, $t \in [t_0, t_k]$. Отметим, что для скорости звука здесь использована формула (1.3.14) при значениях ее коэффициентов, равных 340 м/с и $0,004 \text{ с}^{-1}$.

Пример 6.1.

Построим зависимость вида (6.1.8) для фрагмента ВСХ ТРД вида (6.1.1) в интервале высот полета БЛА от $h = 0$ м. до $h = 4000$ м.

Используя массив данных h_s, M_s, P_s, \bar{n}_s , $s = \overline{(0, 269)}$ из приведенной в Приложении 3 к работе [22] таблицы и решая численно сформированную на их основе систему уравнений (6.1.6), (6.1.7), получаем следующие значения коэффициентов функции (6.1.8):

$$\begin{aligned} a_0 &= 61,760; & a_1 &= 0,041; & a_2 &= 26,318; & a_3 &= 7,561 \cdot 10^{-4}; \\ a_4 &= -4,708 \cdot 10^{-6}; & a_5 &= -13,303; & a_6 &= 1,185 \cdot 10^{-7}; & & (6.1.9) \\ a_7 &= -0,023; & a_8 &= 2,831 \cdot 10^{-6}; & a_9 &= -1,841 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Проведенный в работе [22] анализ погрешности аппроксимации рассмотренной ВСХ ТРД показал, что наибольшее значение ошибки $\delta \bar{n}_s$, равное $-4,278\%$, достигается при $s = 264$, а наименьшее ($-2,296 \cdot 10^{-3}\%$) – при $s = 170$.

Определим с использованием построенной зависимости (6.1.8) значения числа оборотов вала турбины ТРД БЛА, полет которого при $h \in [0, 3000]$ м. рассматривался в Примере 5.1.

Рассмотрим участок полета БЛА при его выводе со скоростью $V = 100$ м/с на горизонтальную плоскость на высоте $h = 3000$ м.

Из заключения к Примеру 5.1 следует, что БЛА осуществляет этот этап полета при значениях времени $t \in [172,663; 647,487]$ с.

Применяя формулу (6.1.8) при значениях коэффициентов (6.1.9) и значениях $y(t)$, $P(t)$ из таблиц 5.1 и 5.3 на указанном интервале времени, а также значение $n_{\max} = 60000$ об/мин в формуле (6.1.3), получаем искомые зависимости $\bar{n}(t)$ и $n(t)$, приведенные на Рис. 6.1 и в Табл. 6.2.

Как показала практика, большинство существующих в настоящее время малых и средних БЛА оснащены силовыми установками на базе авиационных поршневых двигателей (ПД), краткая характеристика которых приведена в работах [2, 6, 39]. В таких установках сила тяги создается обычно воздушным

винтом с фиксированным углом установки [39], а управление значением тяги производится путем изменения числа оборотов вала (дроселированием) ПД [2]. При этом подбор винта осуществляется по методикам, изложенным в работах [2, 39].

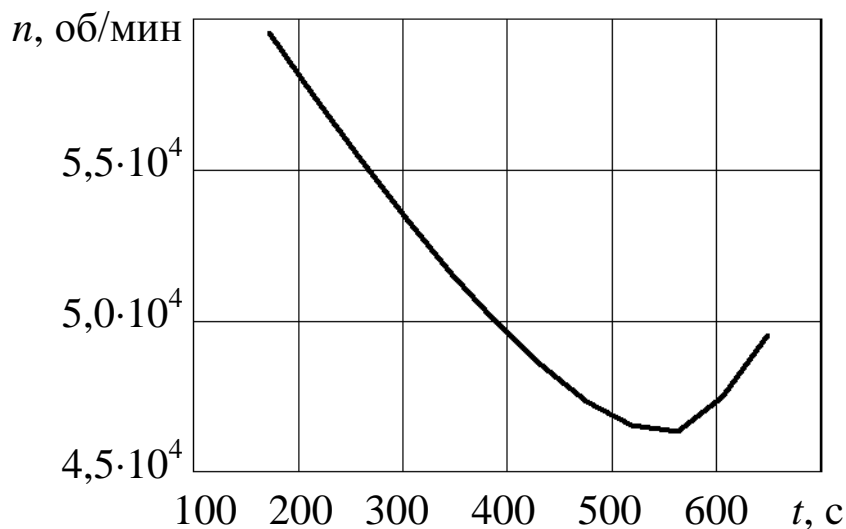


Рис. 6.1

Таблица 6.2

$t, \text{ с.}$	$y, \text{ м}$	$P, \text{ Н}$	$\bar{n}, \%$	$n, \text{ об/мин}$
172,663	2883	749,128	99,248	59548,97
215,829	3114	632,368	95,691	57414,64
258,995	3277	529,869	92,245	55347,19
302,160	3385	439,867	88,983	53389,56
345,326	3446	361,297	85,959	51575,56
388,492	3467	293,687	83,228	49936,75
431,658	3450	237,221	80,849	48509,40
474,823	3398	193,068	78,910	47346,03
517,989	3313	164,452	77,573	46543,52
561,155	3193	160,807	77,243	46345,95
604,321	3055	210,621	79,103	47461,53
647,487	3000	296,307	82,480	49488,02

Отметим, что непосредственное использование для этих целей формулы (6.1.4) затруднительно, так как разработчики БЛА обычно не имеют возможностей экспериментального определения для выбранного двигателя зависимости:

$$\alpha_p = \alpha_p(V, h). \quad (6.1.10)$$

Другой особенностью ПД является тот факт, что их высотнo-скоростные характеристики задаются не в табличной форме, как для современных ТРД (см. Табл. 6.1), а в основном графиками зависимостей [2]:

$$N_e = N_e(\bar{n}, V, h), \quad (6.1.11)$$

где N_e – мощность на валу двигателя (л.с.); \bar{n} – относительное число оборотов вала (%); V – скорость (км/ч); h – высота полета (км).

На Рис. 6.2 приведен пример скоростной и высотной характеристик авиационного поршневого двигателя М-14П.

Известно, что часть энергии двигателя затрачивается на вращение винта и расходуется на преодоление сопротивления воздуха, закрутку его отбрасываемой струи и др. Поэтому полезная секундная работа (полезная тяговая мощность N_B винта) будет меньше мощности N_e двигателя, затраченной на вращение винта. Связь значений N_e и N_B описывается выражением:

$$N_B = \eta N_e, \quad (6.1.12)$$

где η – коэффициент полезного действия (кпд) винта.

Зависимость мощности N_e от высоты h полета БЛА представим как [2, 39]:

$$N_e(h) = A(h)N_e(0). \quad (6.3.13)$$

Здесь $N_e(0)$ – мощность ПД при $h = 0$; $A(h)$ – эмпирическая зависимость вида;

$$A(h) = \frac{0,0248p(h) - 0,11\sqrt{T(h)}}{\sqrt{T(h)}}, \quad (6.1.14)$$

где $p(h)$, $T(h)$ – давление и температура воздуха на высоте h .

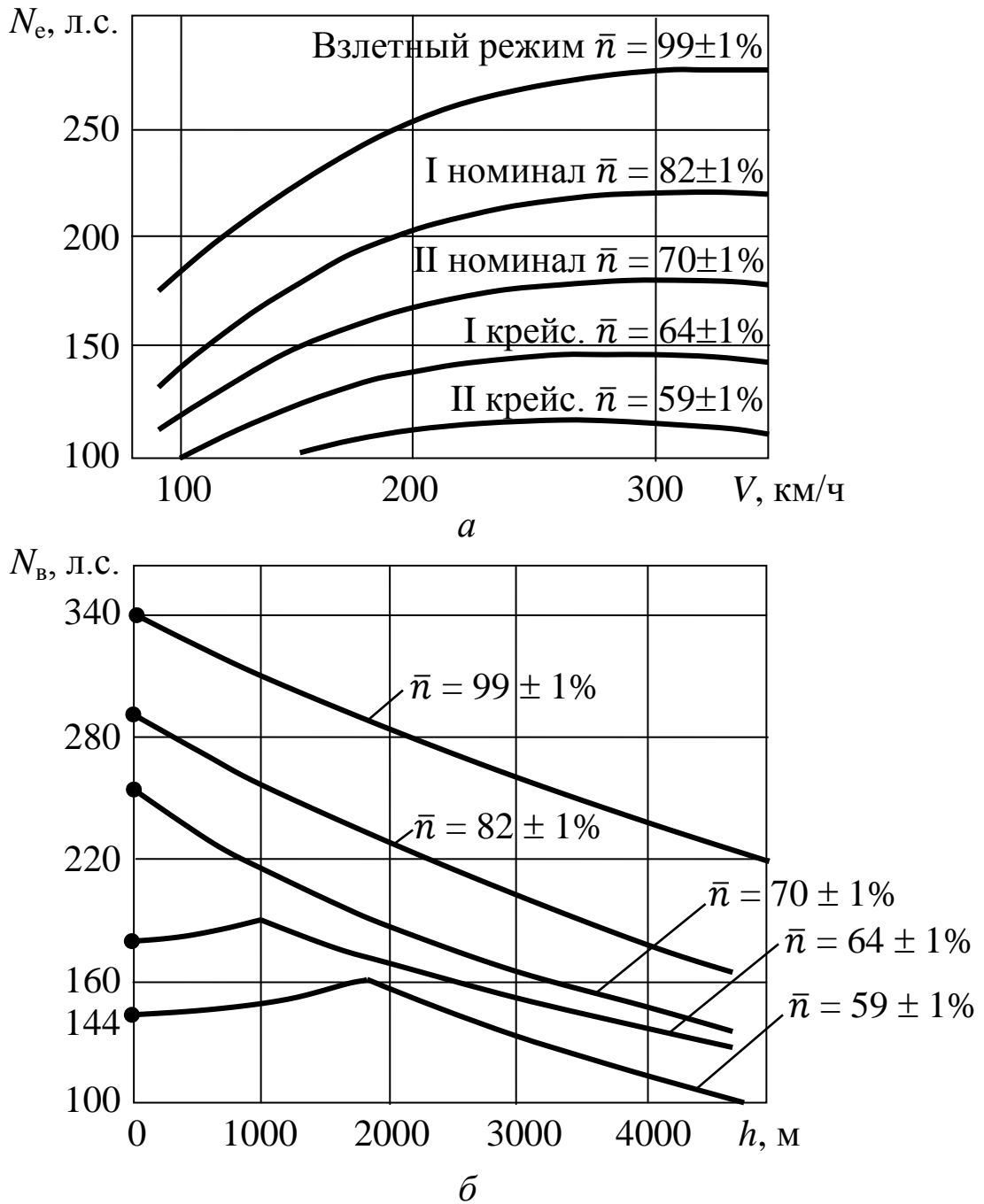


Рис. 6.2

Для их вычисления будем использовать формулы:

$$T(h) = 288,15 - 6,501h; \tag{6.1.15}$$

$$p(h) = 760e^{-0,129h}, \quad h \in [0; 11] \text{ км.}$$

предложенные в Разд. 1.3.

В работе [31] вводится понятие тяговой мощности воздушного винта:

$$N_B = PV.$$

где P – тяга винта; V – скорость полета БЛА.

С учетом этого выражение (6.1.12) перепишем в следующей форме:

$$N_e = \frac{PV}{\eta}. \quad (6.1.16)$$

Подставляя в левую часть этого выражения соотношение (6.1.13), после преобразования имеем:

$$N_e(0) = \frac{PV}{\eta A(h)}. \quad (6.1.17)$$

Зависимость $N_e(0)$ сформируем путем аппроксимации высотной характеристики ПД методом наименьших квадратов (МНК) [21] полиномом вида:

$$N_e(0) = a_0 + a_1 \bar{n} + \dots + a_m \bar{n}^m, \quad (6.1.18)$$

где \bar{n} – относительное число оборотов вала ПД; a_0, a_1, \dots, a_m – искомые коэффициенты.

Отметим, что при практических расчетах необходимо подобрать минимальную степень m полинома (6.1.18), начиная со значения $m = 1$, обеспечивающую точность аппроксимации в пределах (1-5)%.

Рассмотрим пример построения зависимости (6.1.18).

Пример 6.2.

Снимем с графика на Рис. 6.2,б значения N_e и \bar{n} при $h = 0$ м, представленные в первых двух столбцах Табл. 6.3.

Таблица 6.3.

$\bar{n}, \%$	$N_e, \text{ л.с.}$	$m = 1$		$m = 2$	
		$N_e^{\text{расч}}, \text{ л.с.}$	$\delta N, \%$	$N_e^{\text{расч}}, \text{ л.с.}$	$\delta N, \%$
99	340	367,698	5,205	338,248	-0,515
82	295	276,844	-6,155	302,933	2,689
70	249	219,771	-11,739	236,406	-5,053
64	185	191,234	3,370	190,233	2,829
59	144	167,453	16,287	145,181	0,812

Полагая в выражении (6.1.18) $m = 1$, получаем зависимость вида:

$$N_e(0) = a_0 + a_1 \bar{n},$$

где \bar{n} – относительное число оборотов вала ПД (%).

Применяя для определения коэффициентов a_0 , a_1 метод наименьших квадратов, получаем следующие значения:

$$a_0 = -113,159; \quad a_1 = 4,756.$$

Подставляя эти значения в приведенную выше формулу, получаем приведенные в Табл. 6.3 аппроксимированные значения $N_e^{\text{расч}}$ и их относительные отклонения δN от значений N_e .

Из анализа четвертого столбца этой таблицы видно, что величина погрешности δN имеет недопустимые в инженерных расчетах значения.

Положим $m = 2$ и будем использовать для представления выражения (6.1.18) зависимость вида:

$$N_e(0) = a_0 + a_1 \bar{n} + a_2 \bar{n}^2.$$

Применение указанного выше метода дает следующие значения коэффициентов аппроксимации высотной характеристики рассматриваемого ПД:

$$a_0 = -837,804; \quad a_1 = 23,713; \quad a_2 = -0,120.$$

Результаты расчетов значений $N_e(0)$ с этими коэффициентами и оценки их отклонений от значений N_e при $h = 0$ приведены в последних двух столбцах Табл. 6.3.

Проведенный расчет зависимости (6.1.18) при $m = 3$ дал максимальную значение погрешности аппроксимации $\delta N = 4,924\%$, которое незначительно отличается от такого значения для $m = 2$.

Отсюда следует, что аппроксимация квадратичной зависимостью дает вполне приемлемые для практики результаты и менее трудоемка при последующих вычислениях значений \bar{n} .

Подставляя выражение (6.1.18) в формулу (6.1.17), получаем алгебраическое уравнение m -го порядка:

$$a_m \bar{n}^m + \dots + a_1 \bar{n} + \left(a_0 - \frac{PV}{\eta A(h)} \right) = 0, \quad (6.1.19)$$

решение которого определяет относительное число оборотов вала ПД, обеспечивающее движение БЛА со скоростью V под действием силы тяги P на высоте h .

Это уравнение решается одним из численных методов, описанных в работе [9] или специальными численными методами [19].

В общем случае с учетом выражения (6.1.14) уравнение (6.1.19) превращается в параметрическое уравнение m -го порядка вида:

$$a_m \bar{n}^m(t) + a_{m-1} \bar{n}^{m-1}(t) + \dots + a_1 \bar{n}(t) + \left(a_0 - \frac{P(t)V(t)\sqrt{T(y(t))}}{\eta(0,0248p(y(t)) - 0,11\sqrt{T(y(t))})} \right) = 0, \quad (6.1.20)$$

$$t \in [t_0, t_k],$$

где $P(t)$, $V(t)$, $y(t)$ – соответственно сила тяги, скорость и высота полета БЛА в момент времени $t \in [t_0, t_k]$; $p(y(t))$ и $T(y(t))$ определяются из выражений (6.1.15) при $h = y(t)/1000$.

Отметим, что при $m = 1, 2, 3$ можно получить аналитические решения уравнения (6.1.20) [19].

Пример 6.3.

Рассмотрим гипотетическую модификацию БЛА с характеристиками из Табл. 2.1, при которой осуществляется замена ТРД на один из типов двухцилиндрового ПД с электронным регулятором (ЭР) положения дроссельной заслонки.

Запуск ПД осуществляется электростартером в течение 5 с. Далее ЭР доводит число оборотов ПД до значения 2400 об/мин.

Приемистость двигателя с учетом трансмиссии и воздушного винта при переходе от режима «Минимал» до режима «Максимал» и обратно составляет не более 10 с. для всех эксплуатационных диапазонов высот и скоростей полета.

Сформируем на основе высотной характеристики этого двигателя исходные данные, приведенные в Табл. 6.4, для расчета значений $n(t)$, $t \in [t_0, t_k]$ при $n_{\max} = 6700$ об/мин.

Таблица 6.4.

Режим работы	N_e , л.с.	n , об/мин	N_e , Н м/с	n , об/с	$N_e^{\text{расч}}$, Н м/с	δN , %
«Максимал»	102	6500	75020	108,333	74460	-0,742
«Номинал»	64	5000	47070	83,333	48050	2,069
«Минимал»	18	3000	13240	50,000	12820	-3,153

При формировании четвертого и пятого столбцов этой таблицы был проведен пересчет значений мощности согласно соотношению [50]: 1 л.с. = 735,5 Н м/с, а обороты двигателя были переведены из «об/мин» в «об/с».

В шестом столбце Табл. 6.4 приведены результаты линейной аппроксимации характеристики $N_e(n)$ зависимостью вида:

$$N_e(n) = a_0 + a_1 n, \quad (6.1.21)$$

где $a_0 = -40020$; $a_1 = 1057$.

На Рис. 6.3 представлены исходные и аппроксимированные значения этой характеристики.

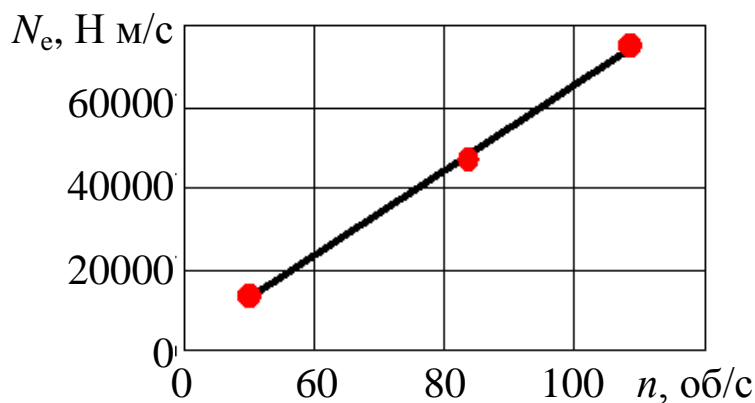


Рис. 6.3

Преобразуем уравнение (6.1.20) с учетом выражения (6.1.21) к следующему виду:

$$a_1 n(t) + \left(a_0 - \frac{P(t)V(t)\sqrt{T(y(t))}}{\eta(0,0248p(y(t)) - 0,11\sqrt{T(y(t))})} \right) = 0. \quad (6.1.22)$$

Решая это уравнение, получаем искомый закон изменения числа оборотов вала двигателя:

$$n(t) = \frac{1}{a_1} \left(\frac{P(t)V(t)\sqrt{T(y(t))}}{\eta(0,0248p(y(t)) - 0,11\sqrt{T(y(t))})} - a_0 \right), \quad t \in [t_0, t_k],$$

Будем считать, что среднее значение КПД применяемого винта $\eta = 0,725$.

Расчеты потребного числа оборотов вала двигателя для значений аппроксимирующих коэффициентов из выражения (6.1.22) и результатов Примера 5.2 представлены в Табл. 6.5 и на Рис. 6.4.

Таблица 6.5

t, c	$y, км$	$P, Н$	$n, об/с$	$n, об/мин$	$\bar{n}, \%$
0	2	295,445	88,087	5285	78,884
18,033	1,972	193,118	70,570	4234	63,197
36,067	1,896	114,100	56,993	3420	51,039
54,100	1,784	58,372	47,506	2850	42,543
72,133	1,648	25,752	42,043	2523	37,650
90,166	1,500	16,050	40,419	2425	36,196
108,200	1,352	29,151	42,412	2545	37,981
126,233	1,216	65,044	47,827	2870	42,830
144,266	1,104	123,797	56,544	3393	50,637
162,300	1,028	205,463	58,554	4113	61,392
180,333	1	309,930	83,986	5039	75,211

Отметим, что значения $\bar{n}(t)$ относительного числа оборотов используются как исходные данные для работы электронного регулятора двигателя.

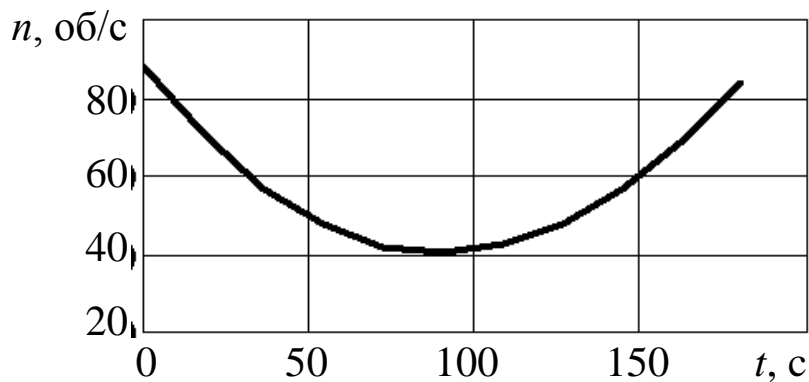


Рис. 6.4

Будем считать, что БЛА, рассмотренный в Примере 2.2, оснащен силовой установкой с ПД с приведенными выше характеристиками.

Тогда при его полете на интервале времени $[0; 600]$ с. со скоростью $V(t) = 105,683$ м/с на высоте $y(t) = 2000$ м. с силой тяги $P(t) = 308,814$ Н из выражения (6.1.22) следует, что требуемые значения числа оборотов вала двигателя будут равны:

$$n(t) = 93,028 \text{ об/с} = 5582 \text{ об/мин}, \quad t \in [0; 10] \text{ мин.}$$

При $n_{\max} = 6500$ об/мин = $108,333$ об/с получаем:

$$\bar{n}(t) = 83,31\%; \quad t \in [0; 600] \text{ с.}$$

Аналогично для такого же предположения в Примере 2.4 имеем, что при значениях:

$$V(t) = 100 \text{ м/с}; \quad y(t) = 3000 \text{ м}; \quad P(t) = 296,102 \text{ Н}$$

искомые требуемые значения числа оборотов соответственно равны:

$$n(t) = 95,473 \text{ об/с} = 5728 \text{ об/мин};$$

$$\bar{n}(t) = 85,50\%; \quad t \in [0; 257,4] \text{ с.}$$

Заметим, что разработчики БЛА при реализации предложенного в данном разделе подхода должны передать организации, создающей программное обеспечение управления, зависимости вида (6.1.5) и (6.1.20) с конкретными числовыми значениями входящих в эти формулы параметров $a_0, a_1, a_2 \dots$

6.2. Управление рулевыми поверхностями БЛА классической самолетной схемы

Как показала практика данный вид БЛА получил к настоящему времени наибольшее распространение у нас в стране и за рубежом [43]. На Рис. 6.5 представлены органы аэродинамического управления движением БЛА классической самолетной схемы [9].

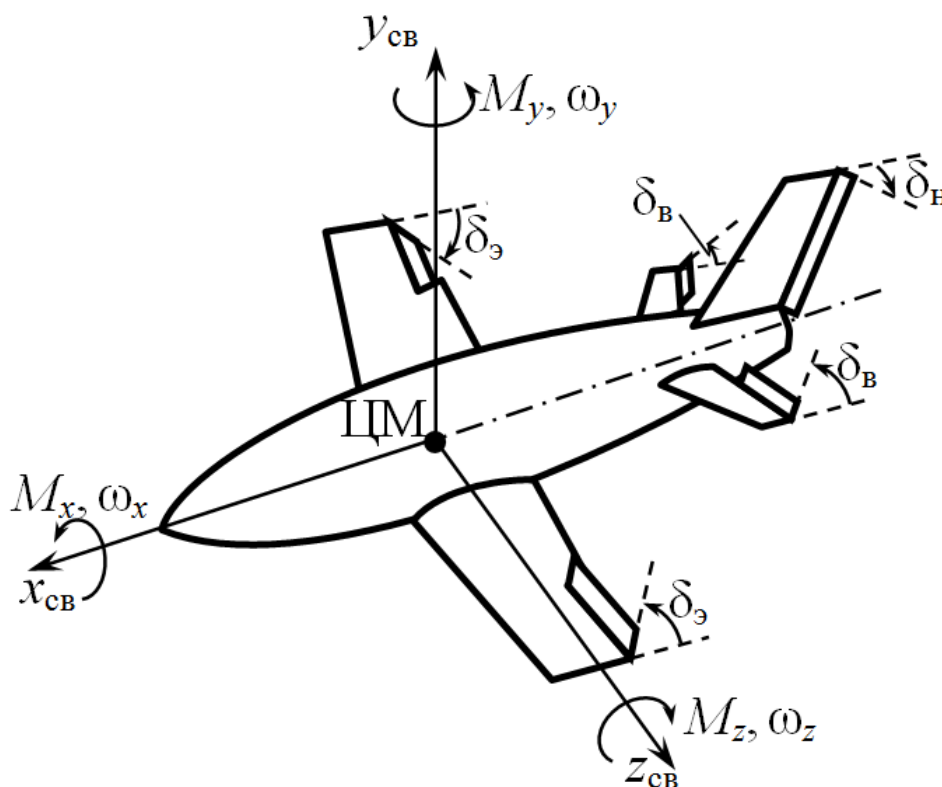


Рис. 6.5

Эти органы осуществляют следующие изменения параметров движения БЛА:

- угол $\delta_{в}$ отклонения руля высоты, изменяет угол тангажа ϑ , момент M_z и угловую скорость ω_z ;
- угол $\delta_{н}$ отклонения руля направления, при котором происходит изменение угла рыскания ψ , момента M_y и скорости ω_y ;
- угол $\delta_{э}$ отклонения элеронов, влияющий на изменение угла крена γ , которое приводит к изменению параметров M_x , ω_x , M_y и ω_y .

При этом считается, что углы $\delta_{\text{в}}$ и $\delta_{\text{э}}$ положительны при отклонениях соответствующих органов управления вниз, а угол $\delta_{\text{н}}$ будет положительным при отклонении руля направления вправо.

Выбирая те или иные законы изменения значений $\delta_{\text{в}} = \delta_{\text{в}}(t)$, $\delta_{\text{н}} = \delta_{\text{н}}(t)$, $\delta_{\text{э}} = \delta_{\text{э}}(t)$ во времени, можно получить различные виды движения как ЦМ БЛА, так и относительно его ЦМ, описываемые уравнениями (2.1.1)-(2.1.7).

Заметим, что для БЛА иных конструктивных схем состав органов управления будет другим. Например, для БЛА схемы «утка» в качестве $\delta_{\text{в}}$ используется угол поворота переднего стабилизатора, а для БЛА типа «летающее крыло» – углы поворотов дифференциальных элеронов (элевонов).

Для определения законов отклонения рулевых поверхностей $\delta_{\text{в}}(t)$, $\delta_{\text{э}}(t)$, $\delta_{\text{н}}(t)$, $t \in [t_0, t_{\text{к}}]$ будем использовать основные соотношения модели (2.1.1)-(2.1.7) пространственного движения БЛА как твердого тела при значениях угла скольжения $\beta = 0$.

При конкретизации уравнений (2.1.4) используются следующие представления моментов сил, действующих на БЛА (см. Рис. 6.5):

$$\begin{aligned} M_x &= 0,5m_x\rho(y)V^2Sl; \\ M_y &= 0,5m_y\rho(y)V^2Sb_A; \\ M_z &= 0,5m_z\rho(y)V^2Sb_A, \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

где m_x , m_y , m_z – безразмерные коэффициенты соответственно моментов крена, рыскания и тангажа, зависящие от параметров БЛА и характеристик его пространственного движения [8].

Используя гипотезу о линейной зависимости моментных характеристик БЛА, эти коэффициенты можно представить

для фиксированного числа Маха полета в виде следующих зависимостей [8]:

$$\begin{aligned}
 m_x &= m_{x0} + m_x^{\delta_H} \delta_H + m_x^{\delta_\Theta} \delta_\Theta + m_x^{\bar{\omega}_y} \frac{l\omega_y}{2V} + m_x^{\bar{\omega}_x} \frac{l\omega_x}{2V} + m_{xP}; \\
 m_y &= m_y^{\delta_H} \delta_H + m_y^{\delta_\Theta} \delta_\Theta + m_y^{\bar{\omega}_y} \frac{l\omega_y}{2V} + m_y^{\bar{\omega}_x} \frac{l\omega_x}{2V} + m_{yP}; \\
 m_z &= m_{z0} + m_z^\alpha \alpha + m_z^{\bar{\alpha}} \frac{\dot{\alpha} b_A}{V} + m_z^{\delta_B} \delta_B + m_z^{\bar{\omega}_z} \frac{b_A \omega_z}{V} + m_{zP}.
 \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

Здесь m_{x0} , m_{z0} – коэффициенты моментов крена и тангажа при $\alpha = 0$ и $\beta = 0$; $m_x^{\delta_H}, \dots, m_z^{\delta_B}, m_x^{\bar{\omega}_z}$ – частные производные коэффициентов m_x, m_y, m_z по соответствующим переменным; m_{xP}, m_{yP}, m_{zP} – коэффициенты моментов от маршевого двигателя БЛА, которые в дальнейшем будем считать пренебрежимо малыми.

В выражениях (6.2.2) использованы безразмерные частные производные от угловых скоростей, которые вычисляются как [8]:

$$\bar{\omega}_x = \frac{\omega_x l}{2V}; \quad \bar{\omega}_y = \frac{\omega_y l}{2V}; \quad \bar{\omega}_z = \frac{\omega_z b_A}{V}; \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha b_A}{V},$$

где V – текущее значение скорости полета БЛА.

Отметим, что все коэффициенты, входящие в правые части соотношений (6.2.2), должны определяться на основе обработки результатов продувок в аэродинамических трубах конкретного образца БЛА.

Пример 6.4.

Приведем экспериментальные значения коэффициентов, входящих в формулы (6.2.2) для БЛА с характеристиками, представленными в Табл. 2.1.

Коэффициент m_x момента крена БЛА по результатам аэродинамических испытаний конкретизируется следующими числовыми значениями:

$$m_{x0} = -0,003; \quad m_x^{\delta_H} = -0,014 \text{ рад}^{-1}; \quad m_x^{\delta_\alpha} = -0,12 \text{ рад}^{-1}.$$

По результатам продувок БЛА установлено, что эти коэффициенты постоянны в эксплуатационном диапазоне чисел Маха (M) рассматриваемого БЛА.

Зависимости коэффициентов $m_x^{\bar{\omega}_x}$ и $m_x^{\bar{\omega}_y}$ от значений числа $M \in [0,2; 0,8]$ имеют вид:

$$m_x^{\bar{\omega}_x} = m_x^{\bar{\omega}_x}(M) = -0,438 + 0,184M - 0,428M^2, \text{ рад}^{-1};$$

$$m_x^{\bar{\omega}_y} = m_x^{\bar{\omega}_y}(M) = -0,108 \text{ рад}^{-1}.$$

Производные от коэффициента m_y момента рыскания БЛА определяется следующими значениями:

$$m_y^{\delta_H} = -0,079 \text{ рад}^{-1}; \quad m_y^{\delta_\alpha} = 0,008 \text{ рад}^{-1};$$

$$m_y^{\bar{\omega}_y} = -1,1 \text{ рад}^{-1}; \quad m_y^{\bar{\omega}_x} = -0,11 \text{ рад}^{-1}.$$

По результатам проведенных аэродинамических испытаний установлено, что значения этих коэффициентов также не зависят от числа M .

При формировании коэффициента m_z момента тангажа БЛА при $M \in [0,5; 0,7]$ получены следующие значения:

$$m_{z0} = 0,025; \quad m_z^\alpha = -0,636 \text{ рад}^{-1} \quad \text{при } \alpha \in [-2^\circ; +8^\circ].$$

Коэффициент $m_z^{\delta_B}$ при $M \in [0,35; 0,82]$ и $\delta_B \in [-7^\circ; +7^\circ]$ сохраняет постоянное значение:

$$m_z^{\delta_B} = -1,146 \text{ рад}^{-1}.$$

Зависимости производных $m_z^{\bar{\omega}_z}$ и $m_z^{\bar{\alpha}}$ от значений числа $M \in [0,2; 0,8]$ имеют вид:

$$m_z^{\bar{\omega}_z} = m_z^{\bar{\omega}_z}(M) = -0,179 - 0,025M - 0,072M^2, \text{ рад}^{-1};$$

$$m_z^{\bar{\alpha}} = m_z^{\bar{\alpha}}(M) = -0,074 + 0,053M - 0,152M^2, \text{ рад}^{-1}.$$

Использование выражений (6.2.1), (6.2.2) в уравнениях (2.1.4) позволяет получить следующие зависимости характери-

стик движения БЛА вокруг его центра масс (ЦМ) от искомым законов управления $\delta_B = \delta_B(t)$, $\delta_H = \delta_H(t)$ и $\delta_\vartheta = \delta_\vartheta(t)$, $t \in [t_0, t_k]$:

$$\begin{aligned}
 & J_x \dot{\omega}_x + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z = \\
 & = 0,5\rho(y)V^2 Sl \left(m_{x0} + m_x^{\delta_H} \delta_H + m_x^{\delta_\vartheta} \delta_\vartheta + \right. \\
 & \quad \left. + m_x^{\bar{\omega}_y} \frac{l\omega_y}{2V} + m_x^{\bar{\omega}_x} \frac{l\omega_x}{2V} \right); \\
 & J_y \dot{\omega}_y + (J_x - J_z) \omega_x \omega_z = \\
 & = 0,5\rho(y)V^2 Sb_A \left(m_y^{\delta_H} \delta_H + m_y^{\delta_\vartheta} \delta_\vartheta + \right. \\
 & \quad \left. + m_y^{\bar{\omega}_y} \frac{l\omega_y}{2V} + m_y^{\bar{\omega}_x} \frac{l\omega_x}{2V} \right); \\
 & J_z \dot{\omega}_z + (J_y - J_x) \omega_y \omega_x = \\
 & = 0,5\rho(y)V^2 Sb_A \left(m_{z0} + m_z^\alpha \alpha + m_z^{\ddot{\alpha}} \frac{\dot{\alpha} b_A}{V} + \right. \\
 & \quad \left. + m_z^{\delta_B} \delta_B + m_z^{\bar{\omega}_z} \frac{b_A \omega_z}{V} \right).
 \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

В работе [8] отмечается, что дифференциальные уравнения вида (2.1.5) были сформированы на основе следующих выражений:

$$\begin{aligned}
 \omega_x &= \dot{\gamma} + \dot{\psi} \sin \vartheta; \\
 \omega_y &= \dot{\psi} \cos \gamma \cos \vartheta + \dot{\vartheta} \sin \gamma; \\
 \omega_z &= \dot{\vartheta} \cos \gamma - \dot{\psi} \cos \vartheta \sin \gamma,
 \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

где ϑ и ψ – соответственно углы тангажа и рыскания БЛА.

Из этой работы следует, что в процессе пространственного движения БЛА углы атаки α и скольжения β взаимным образом зависят от текущих значений угла крена γ и углов θ , ϑ , Ψ , ψ .

Представим эти зависимости при $\beta = 0$ соотношениями вида:

$$\alpha = \vartheta - \theta; \quad 0 = \psi - \Psi + \alpha \sin \gamma.$$

Отсюда получаем следующие выражения для вычисления углов тангажа и рыскания БЛА:

$$\vartheta = \alpha + \theta; \quad \psi = \Psi + \alpha \sin \gamma. \quad (6.2.5)$$

Требуемые законы изменения значений этих углов при движении БЛА по заданной траектории на интервале времени $[t_0, t_k]$ сформируем путем подстановки в эти выражения функций, определенных методами, предложенными в Главе 5:

$$\alpha = \alpha(t); \quad \gamma = \gamma(t); \quad \theta = \theta(t); \quad \Psi = \Psi(t). \quad (6.2.6)$$

В этом случае имеем:

$$\begin{aligned} \vartheta(t) &= \alpha(t) + \theta(t); \\ \psi(t) &= \Psi(t) + \alpha(t) \sin \gamma(t). \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

Требуемые законы изменения угловых скоростей БЛА с использованием соотношений (6.2.4), (6.2.6), (6.2.7) вычисляются как:

$$\begin{aligned} \omega_x(t) &= \dot{\gamma}(t) + \dot{\psi}(t) \sin \vartheta(t); \\ \omega_y(t) &= \dot{\psi}(t) \cos \gamma(t) \cos \vartheta(t) + \dot{\vartheta}(t) \sin \gamma(t); \\ \omega_z(t) &= \dot{\vartheta}(t) \cos \gamma(t) - \dot{\psi}(t) \cos \vartheta(t) \sin \gamma(t). \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

В выражения (6.2.6)-(6.2.8) входят функции $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$, определенные путем численного решения системы параметрических уравнений (5.1.5), (5.1.6), (5.1.7). В этих выражениях используются функции $\theta_{\text{тр}}(t)$ и $\Psi_{\text{тр}}(t)$, вычисленные по формулам (5.1.10). В связи с тем, что эти функции заданы в табличной форме, все производные от них необходимо в общем случае вычислять с применением известных формул численного дифференцирования [19].

Рассмотрим менее трудоемкий подход, основанный на аппроксимации таблично заданных функций $\alpha(t)$, $\gamma(t)$, $\theta(t)$, $\Psi(t)$ многочленами соответствующих степеней, которые в общем случае записываются как:

$$W = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n. \quad (6.2.9)$$

При выбранном значении степени n коэффициенты a_i , $i = (\overline{0, n})$ этих многочленов будем определять с помощью метода наименьших квадратов [21] путем решения следующей задачи оптимизации:

$$J(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{r=1}^N (W_r - a_0 - a_1 t_r - a_2 t_r^2 - \dots - a_n t_r^n)^2 \rightarrow \min.$$

Здесь W_r – значения указанных выше функций в моменты времени t_r , $r = (\overline{1, N})$; N – объем таблиц этих функций.

Используя необходимые условия экстремума целевой функции этой задачи [19]:

$$\frac{\partial J}{\partial a_i} = 0, \quad i = (\overline{0, n}),$$

после несложных преобразований получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений $(n+1)$ -го порядка для определения искомым коэффициентов многочленов (6.2.9):

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^N (-a_0 - a_1 t_r - a_2 t_r^2 - \dots - a_n t_r^n) &= \sum_{r=1}^N W_r; \\ \sum_{r=1}^N (-a_0 t_r - a_1 t_r^2 - a_2 t_r^3 - \dots - a_n t_r^{n+1}) &= \sum_{r=1}^N W_r t_r; \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

.....

$$\sum_{r=1}^N (-a_0 t_r^n - a_1 t_r^{n+1} - a_2 t_r^{n+2} - \dots - a_n t_r^{2n}) = \sum_{r=1}^N W_r t_r^n;$$

Эта система решается одним из известных численных методов, приведенных в работе [9].

Отметим, что значения $n \geq 1$ порядка многочленов вида (6.2.9) подбираются таким образом, чтобы отклонения табличных значений $\alpha_r, \gamma_r, \theta_r, \Psi_r$ минимальным образом отличались от расчетных значений $\alpha(t_r), \gamma(t_r), \theta(t_r), \Psi(t_r), r = (\overline{1, N})$.

При использовании данного подхода все приведенные выше производные требуемых порядков можно получить в аналитической форме.

Преобразуем выражения (6.2.3) к системе линейных параметрических уравнений вида:

$$0 \cdot \delta_B(t) + m_x^{\delta_H} \delta_H(t) + m_x^{\delta_\Theta} \delta_\Theta(t) = c_1(t); \quad (6.2.11)$$

$$0 \cdot \delta_B(t) + m_y^{\delta_H} \delta_H(t) + m_y^{\delta_\Theta} \delta_\Theta(t) = c_2(t); \quad (6.2.12)$$

$$m_z^{\delta_B} \delta_B(t) + 0 \cdot \delta_H(t) + 0 \cdot \delta_\Theta(t) = c_3(t), \quad (6.2.13)$$

правые части которой конкретизируются как:

$$c_1(t) = \frac{2[J_x \dot{\omega}_x(t) + (J_z - J_y) \omega_y(t) \omega_z(t)]}{\rho(y(t))V^2(t)Sl} - m_{x0} - m_x^{\bar{\omega}_y} \frac{l \omega_y(t)}{2V(t)} - m_x^{\bar{\omega}_x} \frac{l \omega_x(t)}{2V(t)}; \quad (6.2.14)$$

$$c_2(t) = \frac{2[J_y \dot{\omega}_y(t) + (J_x - J_z) \omega_x(t) \omega_z(t)]}{\rho(y(t))V^2(t)Sb_A} - m_y^{\bar{\omega}_y} \frac{l \omega_y(t)}{2V(t)} - m_y^{\bar{\omega}_x} \frac{l \omega_x(t)}{2V(t)}; \quad (6.2.15)$$

$$c_3(t) = \frac{2[J_z \dot{\omega}_z(t) + (J_y - J_x) \omega_y(t) \omega_x(t)]}{\rho(y(t))V^2(t)Sb_A} - m_{z0} - m_z^\alpha \alpha(t) - m_z^{\bar{\alpha}} \frac{b_A \dot{\alpha}(t)}{V(t)} - m_z^{\bar{\omega}_z} \frac{b_A \omega_z(t)}{V(t)}. \quad (6.2.16)$$

Сформируем расчетные соотношения для вычисления законов управлений рулевыми поверхностями БЛА классической самолетной схемы.

Из уравнения (6.2.13) имеем, что:

$$\delta_B(t) = -\frac{c_3(t)}{m_z^{\delta_B}}, \quad t \in [t_0, t_K]. \quad (6.2.17)$$

Решая систему уравнений (6.2.11), (6.2.12) известным методом Крамера [19], получаем:

$$\delta_H(t) = \frac{m_x^{\delta_\Theta} c_1(t) - m_y^{\delta_\Theta} c_2(t)}{m_y^{\delta_H} m_x^{\delta_\Theta} - m_y^{\delta_\Theta} m_x^{\delta_H}}; \quad (6.2.18)$$

$$\delta_\Theta(t) = \frac{m_y^{\delta_H} c_2(t) - m_x^{\delta_H} c_1(t)}{m_y^{\delta_H} m_x^{\delta_\Theta} - m_y^{\delta_\Theta} m_x^{\delta_H}}, \quad t \in [t_0, t_K]. \quad (6.2.19)$$

Отметим, что вычисленные по формулам (6.2.17)-(6.2.19) законы управления должны удовлетворять эксплуатационным ограничениям на рассматриваемый БЛА вида:

$$\begin{aligned} \delta_{B,\min} &\leq \delta_B(t) \leq \delta_{B,\max}; \\ \delta_{H,\min} &\leq \delta_H(t) \leq \delta_{H,\max}; \\ \delta_{\Theta,\min} &\leq \delta_\Theta(t) \leq \delta_{\Theta,\max}. \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

При использовании в расчетах аппроксимирующих зависимостей вида (6.2.9) для представления функции (6.2.6) и их производных необходимо наряду с соотношениями (6.2.8) иметь аналитические выражения, описывающие производные $\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z$.

Дифференцируя соотношения (6.2.8) по времени t , имеем:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x(t) &= \ddot{\gamma}(t) + \ddot{\psi}(t) \sin \vartheta(t) + \dot{\psi}(t) \dot{\vartheta}(t) \cos \vartheta(t); \\ \dot{\omega}_y(t) &= \ddot{\psi}(t) \cos \gamma(t) \cos \vartheta(t) - \dot{\psi}(t) \dot{\gamma}(t) \sin \gamma(t) \cos \vartheta(t) - \\ &\quad - \dot{\psi}(t) \dot{\vartheta}(t) \cos \gamma(t) \sin \vartheta(t) + \ddot{\vartheta}(t) \sin \gamma(t) + \\ &\quad + \dot{\vartheta}(t) \dot{\gamma}(t) \cos \gamma(t); \end{aligned} \quad (6.2.21)$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_z(t) = & \ddot{\vartheta}(t) \cos \gamma(t) - \dot{\vartheta}(t) \dot{\gamma}(t) \sin \gamma(t) - \\ & - \ddot{\psi}(t) \cos \vartheta(t) \sin \gamma(t) + \dot{\psi}(t) \dot{\vartheta}(t) \sin \vartheta(t) \sin \gamma(t) - \\ & - \dot{\psi}(t) \dot{\gamma}(t) \cos \vartheta(t) \sin \gamma(t). \end{aligned}$$

Обозначив через $a_i^{(1)}, a_i^{(2)}, a_i^{(3)}, a_i^{(4)}$, $i = (\overline{0, 9})$ коэффициенты многочленов, аппроксимирующих зависимости $\alpha(t)$, $\gamma(t)$, $\theta(t)$ и $\Psi(t)$, $t \in [t_0, t_k]$ и определив их значения путем решения соответствующих систем уравнений вида (6.2.10), получаем после их подстановки в выражения (6.2.7) формулы, описывающие в явной форме зависимости углов тангажа ϑ и рыскания ψ от текущего значения t времени полета БЛА. Записывая производные 1-го и 2-го порядков от этих функций и используя соответствующие многочлены, получаем аналитические конкретизации выражений (6.2.8) и (6.2.21), которые наряду с другими исходными данными используются в проводимых расчетах законов аэродинамического управления БЛА.

Пример 6.5.

Определим законы управления $\delta_B(t)$, $\delta_H(t)$, $\delta_S(t)$ БЛА на участке его выхода на горизонтальную плоскость полета на высоте $h = 3000$ м. (см. Пример 5.1). Следуя Примеру 6.1, этот этап полета рассматриваемого БЛА реализуется на интервале времени $[172,663; 647,487]$ с. при скорости $V = 100$ м/с.

Проведем аппроксимацию требуемых для расчетов исходных зависимостей полиномами вида (6.2.9), коэффициенты которых при фиксированных значениях их степеней n будем определять из решений систем уравнений, описываемых выражениями (6.2.10).

Используя переведенные в радианы значения углов $\theta(t)$ и $\Psi(t)$ из Табл. 5.2 при $t \in [172,663; 647,487]$ с., получаем для

траекторных углов рассматриваемого БЛА следующий вид аппроксимирующих зависимостей:

$$\begin{aligned}\theta(t) &= 0,405 - 2,460 \cdot 10^{-3}t + 7,085 \cdot 10^{-6}t^2 - \\ &\quad - 1,224 \cdot 10^{-8}t^3 + 8,570 \cdot 10^{-12}t^4; \\ \Psi(t) &= -1,096 + 0,029t - 1,390 \cdot 10^{-4}t^2 + \\ &\quad + 2,841 \cdot 10^{-7}t^3 - 2,131 \cdot 10^{-10}t^4.\end{aligned}$$

Отметим, что степени этих полиномов соответствуют минимальным из $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ значениям при учете относительных отклонений расчетных и табличных данных.

На Рис. 6.6 представлены результаты проведенной аппроксимации требуемых углов наклона и поворота траектории БЛА.

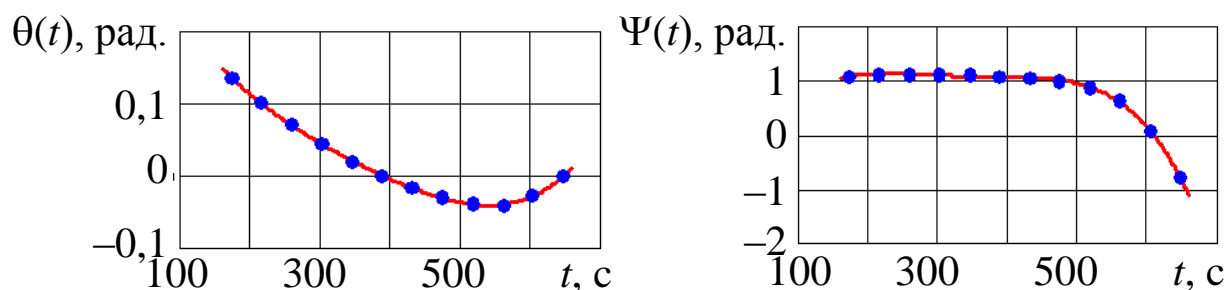


Рис. 6.6

Аппроксимируя представленные в радианах значения углов $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ из Табл. 5.3 при $t \in [172,663; 647,487]$ с., получаем полиномы вида:

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= 0,070 + 3,137 \cdot 10^{-4}t - 8,765 \cdot 10^{-7}t^2 + \\ &\quad + 1,108 \cdot 10^{-9}t^3 - 5,530 \cdot 10^{-13}t^4. \\ \gamma(t) &= -2,837 \cdot 10^{-5}t + 2,813 \cdot 10^{-9}t^2 + 3,602 \cdot 10^{-7}t^3 + \\ &\quad + 4,754 \cdot 10^{-5}t^4 + 3,925 \cdot 10^{-3}t^5 - 3,571 \cdot 10^{-5}t^6 + \\ &\quad + 1,185 \cdot 10^{-7}t^7 - 1,704 \cdot 10^{-10}t^8 + 8,983 \cdot 10^{-14}t^9.\end{aligned}$$

Графики этих зависимостей и соответствующие им табличные данные приведены на Рис. 6.7.

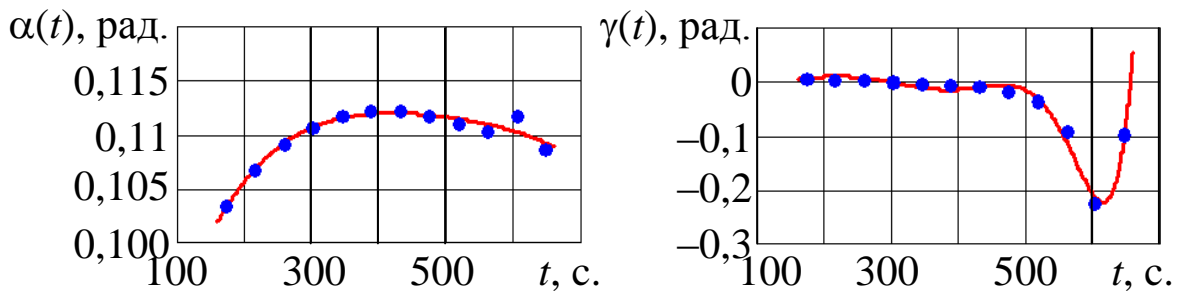


Рис. 6.7

Подставляя приведенные выше полиномы и их производные в соотношения (6.2.7), (6.2.8), (6.2.21), а также используя коэффициенты моментов из Примера 6.4 совместно со следующими значениями характеристик БЛА (см. Табл. 2.1):

$$J_x = 2,1 \text{ кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^{-1}; \quad J_y = 31 \text{ кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^{-1}; \quad J_z = 30 \text{ кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^{-1};$$

$$S = 1,4 \text{ м}^2; \quad l = 2,64 \text{ м}; \quad b_A = 0,546 \text{ м},$$

получаем по формулам (6.2.14)-(6.2.19) искомые законы отклонения его рулевых поверхностей, приведенные в Табл. 6.6 и на Рис. 6.8.

Таблица 6.6.

t , с.	$\delta_{\text{в}}$, град.	$\delta_{\text{н}}$, град.	$\delta_{\text{э}}$, град.
172,663	2,033	-2,206	0,229
215,829	2,147	-2,203	0,240
258,995	2,223	-2,201	0,251
302,160	2,271	-2,200	0,261
345,326	2,298	-2,200	0,268
388,492	2,310	-2,201	0,269
431,658	2,312	-2,202	0,267
474,824	2,306	-2,200	0,274
517,989	2,295	-2,193	0,306
561,155	2,278	-2,183	0,379
604,321	2,255	-2,180	0,487
647,487	2,222	-2,217	0,489

Отметим, что в расчетах применялась аппроксимация значений высоты полета БЛА из Табл. 5.1 при $t \in [172,663; 647,487]$ полиномом вида:

$$y(t) = 1,151 \cdot 10^{-3} + 14,176t - 0,027t^2 + 1,395 \cdot 10^{-5}t^3.$$

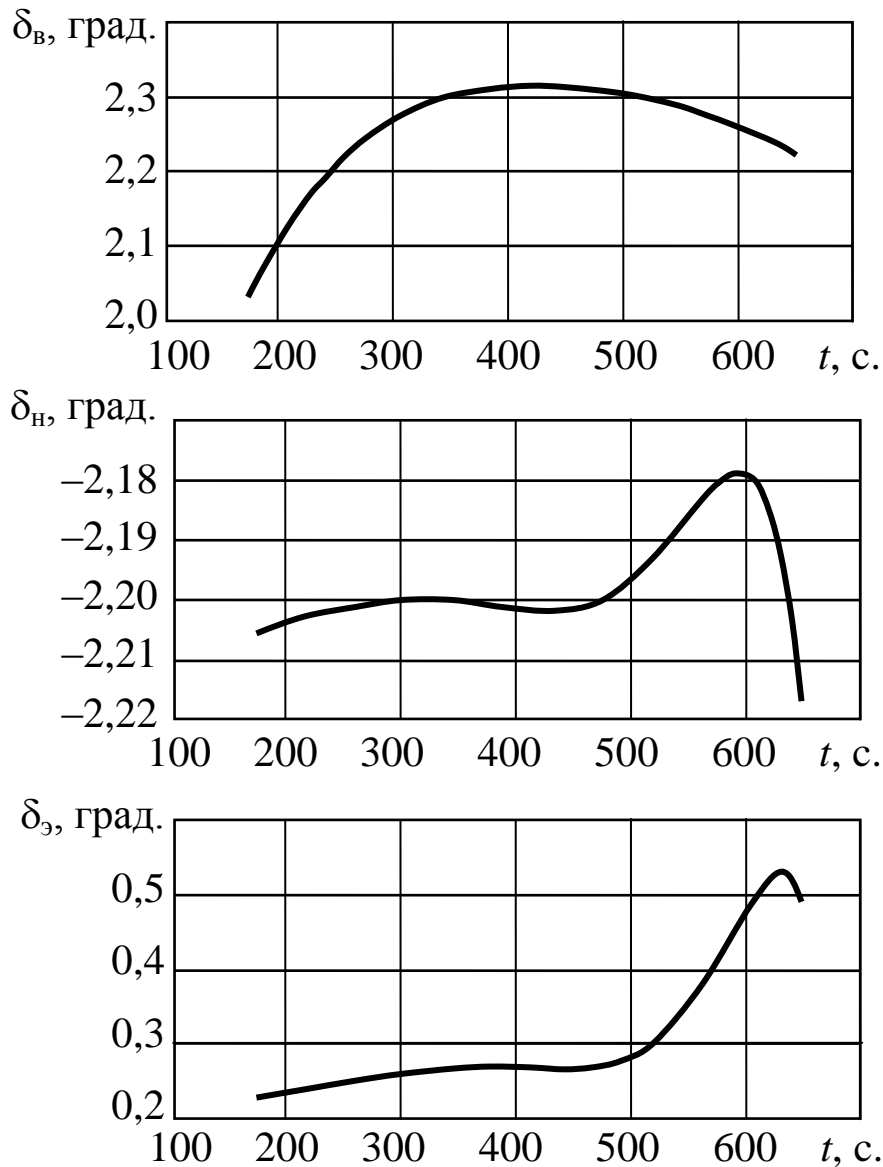


Рис. 6.8

Этот полином использовался при вычислениях значений плотности воздуха $\rho(y(t))$ и моментных коэффициентов $m_x^{\bar{\omega}_x}$, $m_z^{\bar{\omega}_z}$, $m_z^{\bar{\alpha}}$ (см. Пример 6.4). В соответствующих формулах для этих коэффициентов число Маха представлялось функцией:

$$M = M(t) = \frac{100}{340 - 0,004 y(t)}.$$

Ограничения вида (6.2.20) на значения углов отклонений рулей БЛА для рассматриваемого в этом и последующих примерах этого раздела вида БЛА конкретизируются как:

$$-20^\circ \leq \delta_B \leq +20^\circ; \quad -20^\circ \leq \delta_H \leq +20^\circ; \quad -20^\circ \leq \delta_3 \leq +20^\circ.$$

Из Табл. 6.6 следует, что все ограничения для рассматриваемого БЛА выполняются.

Заметим, что применение в расчетах регрессионных зависимостей вида (6.2.9) позволяет исключить из них процедуры численного вычисления значений требуемых производных 1-го и 2-го порядков, имеющие достаточно высокую погрешность [19], и, главное, формировать законы управления $\delta_v(t)$, $\delta_n(t)$, $\delta_y(t)$, $t \in [t_0, t_k]$ с требуемой для реализации в соответствующих САУ БЛА дискретностью Δt .

Рассмотрим случай пространственного полета БЛА по требуемой линейной траектории. При таких полетах соотношения (6.2.6) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha(t); \quad \gamma(t) = 0; \quad \theta(t) = \theta_{\text{зад.}} = \text{const}; \\ \Psi(t) &= \Psi_{\text{зад.}} = \text{const}, \quad t \in [t_0, t_k], \end{aligned} \quad (6.2.22)$$

где $\theta_{\text{зад.}}$, $\Psi_{\text{зад.}}$ – заданные значения углов наклона и поворота (курса) БЛА.

С учетом этого, согласно выражениям (6.2.7), изменения во времени значений углов тангажа и рыскания БЛА вычисляются как:

$$\vartheta(t) = \alpha(t) + \theta_{\text{зад.}}; \quad \psi(t) = \Psi_{\text{зад.}}. \quad (6.2.23)$$

При использовании выражений (6.2.22) и (6.2.23) имеем:

$$\dot{\gamma}(t) = 0; \quad \dot{\psi}(t) = 0; \quad \dot{\vartheta}(t) = \dot{\alpha}(t).$$

Тогда формулы (6.2.8) примут следующий вид:

$$\omega_x(t) = 0; \quad \omega_y(t) = 0; \quad \omega_z(t) = \dot{\alpha}(t), \quad t \in [t_0, t_k].$$

Отсюда следует, что:

$$\dot{\omega}_x(t) = 0; \quad \dot{\omega}_y(t) = 0; \quad \dot{\omega}_z(t) = \ddot{\alpha}(t).$$

С учетом двух последних соотношений выражения (6.2.14)-(6.2.16) конкретизируются как:

$$\begin{aligned}
c_1(t) &= -m_{x0}; \quad c_2(t) = 0; \\
c_3(t) &= \frac{2J_z \ddot{\alpha}(t)}{\rho(y(t))V^2(t)Sb_A} - m_{z0} - \\
&- m_z^\alpha \alpha(t) - m_z^{\bar{\alpha}} \frac{b_A \dot{\alpha}(t)}{V(t)} - m_z^{\bar{\omega}_z} \frac{b_A \dot{\alpha}(t)}{V(t)}.
\end{aligned} \tag{6.2.24}$$

Тогда основные расчетные формулы (6.2.17)-(6.2.19) примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
\delta_B(t) &= -\frac{c_3(t)}{m_z^{\delta_B}}; \quad \delta_H(t) = -\frac{m_x^{\delta_\alpha} m_{x0}}{m_y^{\delta_H} m_x^{\delta_\alpha} - m_y^{\delta_\alpha} m_x^{\delta_H}}; \\
\delta_\alpha(t) &= \frac{m_x^{\delta_H} m_{x0}}{m_y^{\delta_H} m_x^{\delta_\alpha} - m_y^{\delta_\alpha} m_x^{\delta_H}}; \quad t \in [t_0, t_K].
\end{aligned} \tag{6.2.25}$$

Отметим, что вычисленные по этим формулам законы управления так же должны удовлетворять ограничениям (6.2.20).

При полетах БЛА в вертикальной плоскости исходные соотношения (6.2.6), используемые для формирования законов управления $\delta_B(t)$, $\delta_H(t)$ и $\delta_\alpha(t)$ конкретизируются как:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \alpha(t); \quad \theta = \theta(t); \\
\gamma(t) &= 0; \quad \Psi(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_K].
\end{aligned} \tag{6.2.26}$$

Отсюда выражения (6.2.7) приобретают следующий вид:

$$\vartheta(t) = \alpha(t) + \theta(t); \quad \psi(t) = 0. \tag{6.2.27}$$

Подставляя (6.2.26) и (6.2.27) в формулы (6.2.8), имеем:

$$\omega_x(t) = 0; \quad \omega_y(t) = 0; \quad \omega_z(t) = \dot{\alpha}(t) + \dot{\theta}(t). \tag{6.2.28}$$

Тогда производные от угловых скоростей БЛА определяются как:

$$\dot{\omega}_x(t) = 0; \quad \dot{\omega}_y(t) = 0; \quad \dot{\omega}_z(t) = \ddot{\alpha}(t) + \ddot{\theta}(t). \tag{6.2.29}$$

Использование соотношений (6.2.28) и (6.2.29) в выражениях (6.2.14)-(6.2.16) дает следующие результаты:

$$\begin{aligned}
c_1(t) &= -m_{x0}; \quad c_2(t) = 0; \\
c_3(t) &= \frac{2J_z(\ddot{\alpha}(t) + \ddot{\theta}(t))}{\rho(y(t))V^2(t)Sl} - m_{z0} - m_z^\alpha \alpha(t) - \\
&\quad - \frac{m_z^{\bar{\alpha}} b_A \dot{\alpha}(t)}{V(t)} - m_z^{\bar{\omega}_z} \frac{b_A \dot{\alpha}(t) + \dot{\theta}(t)}{V(t)}.
\end{aligned} \tag{6.2.30}$$

С учетом этого искомые законы управления (6.2.17)-(6.2.19) конкретизируются как:

$$\begin{aligned}
\delta_B(t) &= -\frac{c_3(t)}{m_z^{\delta_B}}; \quad \delta_H(t) = -\frac{m_x^{\delta_\Theta} m_{x0}}{m_y^{\delta_H} m_x^{\delta_\Theta} - m_y^{\delta_\Theta} m_x^{\delta_H}}; \\
\delta_\Theta(t) &= -\frac{m_x^{\delta_H} m_{x0}}{m_y^{\delta_H} m_x^{\delta_\Theta} - m_y^{\delta_\Theta} m_x^{\delta_H}}, \quad t \in [t_0, t_K].
\end{aligned} \tag{6.2.31}$$

Отметим, что результаты вычислений по этим формулам должны удовлетворять условиям (6.2.20).

Пример 6.6.

Сформируем законы управления рулями БЛА, осуществляющего полет в вертикальной плоскости на интервале времени $[0; 400]$ с. на высоте $h = 2000$ м. со скоростью:

$$V_{зад}(t) = 97,50 \text{ м/с.}$$

Из Примера 5.2 следует, что угол наклона его траектории равен: $\theta(t) = 0$ рад, $t \in [0; 400]$ с.

Отсюда получаем, что

$$\dot{\theta}(t) = 0; \quad \ddot{\theta}(t) = 0, \quad t \in [0; 400] \text{ с.}$$

В связи с постоянной высотой полета БЛА для $t \in [0; 400]$ с. имеем, согласно Табл. 5.5, следующие значения углов атаки и крена:

$$\alpha(t) = 5,858^\circ = 0,102 \text{ рад.}; \quad \gamma(t) = 0^\circ = 0 \text{ рад.}$$

Тогда, применяя формулы (6.2.30) и (6.2.31) с исходными данными из Примера 6.4, получаем следующие значения управлений для рассматриваемого БЛА:

$$\delta_B(t) = 2,001^\circ; \quad \delta_H(t) = -2,202^\circ;$$

$$\delta_\gamma(t) = 0,257^\circ, \quad t \in [0, 400] \text{ с.}$$

В данном примере ограничения вида (6.2.20) также выполняются, т.е. все полученные значения $\delta_B(t)$, $\delta_H(t)$, $\delta_\gamma(t)$, при $t \in [0; 400]$ с. лежат в интервале $[-20; +20]$ град.

При полетах БЛА в горизонтальной плоскости на высоте h при формировании законов управления рулевыми поверхностями используется следующий частный случай выражений (6.2.6):

$$\alpha = \alpha(t); \quad \theta(t) = 0; \quad \gamma = \gamma(t); \quad \Psi = \Psi(t), \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (6.2.32)$$

Тогда выражения, описывающие изменения во времени значений углов тангажа и рыскания, согласно соотношениям (6.2.7), будут иметь вид:

$$\vartheta(t) = \alpha(t); \quad \psi(t) = \Psi(t) + \alpha(t) \sin \gamma(t), \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (6.2.33)$$

Применяемые в формулах (6.2.8) при вычислении динамики угловых скоростей БЛА производные от этих углов с учетом выражений (6.2.33) записываются как:

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta}(t) &= \dot{\alpha}(t); \\ \dot{\psi}(t) &= \dot{\Psi}(t) + \dot{\alpha}(t) \sin \gamma(t) + \alpha(t) \dot{\gamma}(t) \cos \gamma(t). \end{aligned} \quad (6.2.34)$$

Если для представления таблично заданных функций (6.2.32) применяются аппроксимирующие многочлены вида (6.2.9), то производные от функций $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$ и $\omega_z(t)$ вычисляются по формулам (6.2.11) при использовании в них выражений (6.2.33) и (6.2.34).

В общем случае формирование законов управления $\delta_B(t)$, $\delta_H(t)$, $\delta_\gamma(t)$ для рассматриваемого БЛА осуществляется с ис-

пользованием формул (6.2.14)-(6.2.19), в которых делается замена функции $y(t)$ на постоянную величину h .

Рассмотрим частные случаи полетов БЛА в горизонтальной плоскости в установившихся режимах (см. Разд. 2.3).

При прямолинейных полетах БЛА со скоростью $V = \text{const}$ соотношение (6.2.32) имеет вид:

$$\alpha = \text{const}; \quad \theta(t) = 0; \quad \gamma(t) = 0; \quad \Psi = \text{const}.$$

Тогда выражения (6.2.34) запишутся как:

$$\dot{\vartheta}(t) = 0; \quad \dot{\psi}(t) = 0.$$

Соответственно из соотношений (6.2.8) и (6.2.11) следует, что:

$$\begin{aligned} \omega_x(t) &= \omega_y(t) = \omega_z(t) = 0; \\ \dot{\omega}_x(t) &= \dot{\omega}_y(t) = \dot{\omega}_z(t) = 0. \end{aligned}$$

После несложных преобразований в выражениях (6.2.14)-(6.2.19) получаем расчетные формулы вида:

$$\begin{aligned} \delta_B(t) &= \frac{m_{z0} + m_z^\alpha \alpha}{m_z^{\delta_B}}; \\ \delta_H(t) &= -\frac{m_{x0} m_x^{\delta_B} \alpha}{m_y^{\delta_H} m_x^{\delta_\vartheta} - m_y^{\delta_\vartheta} m_x^{\delta_H}}; \\ \delta_\vartheta(t) &= -\frac{m_{x0} m_x^{\delta_H} \alpha}{m_y^{\delta_H} m_x^{\delta_\vartheta} - m_y^{\delta_\vartheta} m_x^{\delta_H}}. \end{aligned} \tag{6.2.35}$$

При движении БЛА по круговой траектории радиуса R со скоростью $V = \text{const}$ имеем:

$$\alpha(t) = \text{const}; \quad \theta(t) = 0; \quad \gamma(t) = \text{const}; \quad \Psi = \Psi(t), \quad t \in [t_0, t_k].$$

При этом производная от угла курса БЛА будет равна:

$$\dot{\Psi}(t) = \frac{V}{R} = \text{const}.$$

Интегрируя это выражение, получаем зависимость вида:

$$\Psi(t) = \Psi_0 + \frac{V}{R}(t - t_0),$$

где Ψ_0 – курсовой угол БЛА в начальной точке его полета с координатами (x_0, z_0) .

Углы тангажа и рыскания БЛА описываются как:

$$\begin{aligned} \vartheta(t) &= \alpha; \\ \psi(t) &= \Psi_0 + \frac{V}{R}(t - t_0) + \alpha \sin \gamma. \end{aligned} \quad (6.2.36)$$

Тогда производные (6.2.34) будут иметь вид:

$$\dot{\vartheta}(t) = 0; \quad \dot{\psi}(t) = \frac{V}{R}. \quad (6.2.37)$$

Используя выражения (6.2.36) и (6.2.37) в формулах (6.2.8), получаем:

$$\begin{aligned} \omega_x(t) &= \frac{V}{R} \sin \alpha = \text{const}; \\ \omega_y(t) &= \frac{V}{R} \cos \gamma \cos \alpha = \text{const}; \\ \omega_z(t) &= -\frac{V}{R} \cos \alpha \sin \gamma = \text{const}. \end{aligned}$$

Для малых значений угла атаки α в Главе 2 проводилась замена вида: $\sin \alpha \approx \alpha$; $\cos \alpha \approx 1$. Преобразуя с учетом этого приведенные выше соотношения, получаем формулы вида:

$$\omega_x = \frac{V}{R} \alpha; \quad \omega_y = \frac{V}{R} \cos \gamma; \quad \omega_z = -\frac{V}{R} \sin \gamma. \quad (6.2.38)$$

Из этих выражений следует, что:

$$\dot{\omega}_x(t) = \dot{\omega}_y(t) = \dot{\omega}_z(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (6.2.39)$$

Подставляя соотношения (6.2.38) и (6.2.39) в формулы (6.2.14)-(6.2.16), получаем выражения вида:

$$\begin{aligned}
c_1 &= -\frac{2(J_z - J_y) \cos \gamma \sin \gamma}{R^2 \rho(h) S l} - m_{x0} - m_x^{\bar{\omega}_y} \frac{l \cos \gamma}{2R} - m_x^{\bar{\omega}_x} \frac{l \alpha}{2R}; \\
c_2 &= -\frac{2(J_x - J_z) \alpha \sin \gamma}{R^2 \rho(h) S b_A} - m_y^{\bar{\omega}_y} \frac{l \cos \gamma}{2R} - m_x^{\bar{\omega}_x} \frac{l \alpha}{2R}; \\
c_3 &= -\frac{2(J_y - J_x) \alpha \cos \gamma}{R^2 \rho(h) S b_A} - m_{z0} - m_z^\alpha \alpha + m_z^{\bar{\omega}_z} \frac{b_A \sin \gamma}{R}.
\end{aligned} \tag{6.2.40}$$

Используя эти выражения в формулах (6.2.17)-(6.2.19), вычисляем искомые значения углов отклонения рулей высоты δ_v , направления δ_n и элеронов δ_y рассматриваемого БЛА.

Пример 6.7.

Сформируем законы прямого управления для БЛА, осуществляющего полет по круговой траектории с радиусом $R = 80000$ м. на высоте $h = 3000$ м. со скоростью $V_{\text{зад}} = 100$ м/с. (см. Пример 5.3).

Согласно результатам этого примера, рассматриваемый БЛА выполняет полетное задание на интервале времени $[0; 257,39]$ с. со следующим углами атаки и крена (см. Табл. 5.8):

$$\alpha_1(t) = 6,152^\circ; \quad \gamma_1(t) = -0,703^\circ.$$

Вычисляя по формулам (6.2.40) значения параметров c_1 , c_2 , c_3 и подставляя их в выражения (6.2.17)-(6.2.19), получаем следующие значения углов отклонений рулей БЛА:

$$\delta_v(t) = 2,164^\circ; \quad \delta_n(t) = -2,2^\circ; \quad \delta_y(t) = 0,275^\circ; \quad t \in [0; 257,39] \text{ с.}$$

Отметим, что в проведенных расчетах были использованы данные из Примеров 6.4 и 6.5.

В Примере 6.5 были определены следующие значения углов отклонения рулей БЛА в момент времени его вывода на горизонтальную плоскость последующего движения (см. Табл. 6.5):

$$\begin{aligned}
\delta_v(647,487) &= 2,222^\circ; \\
\delta_n(647,487) &= -2,217^\circ; \\
\delta_y(647,487) &= 0,489^\circ.
\end{aligned}$$

Разность между этими значениями и определенными выше углами будет равна:

$$\Delta\delta_{\text{в}} = 2,222^\circ - 2,164^\circ = 0,058^\circ;$$

$$\Delta\delta_{\text{н}} = -2,217^\circ + 2,2^\circ = -0,017^\circ;$$

$$\Delta\delta_{\text{з}} = 0,489^\circ - 0,275^\circ = 0,214^\circ.$$

Отсюда следует, что на совмещенном интервале времени [172,663; 904,877] с. полета БЛА его управления в точке $t = 647,489$ с. имеют разрывы 1-го рода [19]. Этот факт иллюстрирует Рис. 6.9.

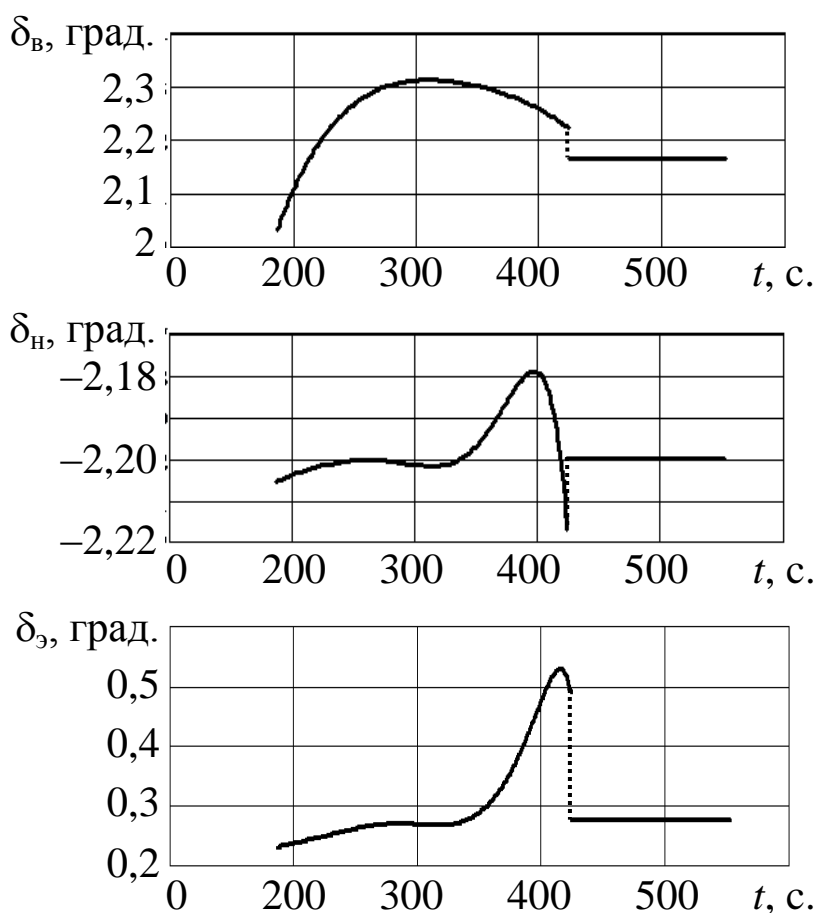


Рис. 6.9

Если считать, что отклонения рулей высоты и направления БЛА различаются в этой точке весьма незначительно, то управление его элеронами при выходе на круговую траекторию должно быть скорректировано на $0,214^\circ$.

6.3. Управление оборотами двигателя и углами установки винтов и стабилизатора беспилотного вертолета

Прямое программное управление этим видом БЛА при движении по требуемой траектории с заданной скоростью определяется для каждого момента времени $t \in [t_0, t_k]$ формированием следующих законов:

$\bar{n}_{дв}^{др}(t)$ – относительного числа оборотов двигателя;

$\varphi_{нв}(t)$ – изменения общего шага несущего винта (НВ);

$\varphi_{ст}(t)$ – угла отклонения управляемого стабилизатора (Ст);

$\delta_{ап}(t)$ – угла продольного наклона автомата перекоса (АП);

$\varphi_{рв}(t)$ – изменения шага рулевого винта (РВ).

При этом в качестве исходных данных используется вектор косвенного управления БВ, определенный методами Разд. 5.2:

$$u(t) = (T_{нв}(t), \chi(t), T_{рв}(t)), \quad t \in [t_0, t_k] \quad (6.3.1)$$

и основные конструктивные параметры рассматриваемого вертолета.

При формировании законов управления НВ будем использовать известную формулу его силы тяги [35, 48, 49]:

$$T_{нв}(t) = 0,5c_{т нв}(\varphi_{нв}(t))\rho(y(t))(\omega_{нв}R_{нв})^2\pi R_{нв}^2, \quad (6.3.2)$$

где $c_{т нв}(\varphi_{нв}(t))$ – коэффициент силы тяги НВ, определяемый экспериментальным путем; $\rho(y(t))$ – плотность воздуха на высоте полета $y(t)$; $\omega_{нв}$ – угловая скорость вращения НВ; $R_{нв}$ – радиус НВ рассматриваемого БВ.

Прямое управление силой $T_{нв}(t)$ будем формировать с использованием известного принципа «шаг-газ» [35, 49].

Величины $\omega_{нв}$ и число оборотов $n_{нв}$ связаны известным соотношением [48] вида:

$$n_{\text{HB}} = \frac{60\omega_{\text{HB}}}{2\pi} = \frac{30\omega_{\text{HB}}}{\pi}.$$

Из этого выражения следует, что:

$$\omega_{\text{HB}} = \frac{n_{\text{HB}}\pi}{30} = \frac{\pi\bar{n}_{\text{HB}}n_{\text{max}}}{30}. \quad (6.3.3)$$

Здесь $\bar{n}_{\text{HB}} \in [0, 1]$ – относительное число оборотов НВ; n_{max} – максимальное число оборотов НВ.

Подставим соотношение (6.3.3) в формулу (6.3.2):

$$0,5c_{\text{Т НВ}}(\varphi_{\text{HB}}(t))\rho(y(t)) \left(\frac{\pi\bar{n}_{\text{HB}}n_{\text{max}}}{30} R_{\text{HB}} \right)^2 \pi R_{\text{HB}}^2 = T_{\text{HB}}(t)$$

Проведя соответствующие преобразования, перепишем ее в следующей форме:

$$c_{\text{Т НВ}}(\varphi_{\text{HB}}(t))\bar{n}_{\text{HB}}^2(t) = \frac{1800T_{\text{HB}}(t)}{\rho(y(t))n_{\text{HB}}^2\pi^3R_{\text{HB}}^4}. \quad (6.3.4)$$

Вводя вспомогательную функцию:

$$A(t) = \frac{1800T_{\text{HB}}(t)}{\rho(y(t))n_{\text{HB}}^2\pi^3R_{\text{HB}}^4}, \quad (6.3.5)$$

запишем выражение (6.3.4) как:

$$c_{\text{Т НВ}}(\varphi_{\text{HB}}(t))\bar{n}_{\text{HB}}^2(t) = A(t). \quad (6.3.6)$$

Искомые функции $\varphi_{\text{HB}}(t)$ и $\bar{n}_{\text{HB}}(t)$ будем определять из решения следующей вспомогательной параметрической задачи условной оптимизации с целевой функцией вида:

$$J(t) = \varphi_{\text{HB}}^2(t) + \bar{n}_{\text{HB}}^2(t) \rightarrow \min \quad (6.3.7)$$

при выполнении в любой момент времени $t \in [t_0, t_k]$ равенства (6.3.6).

Запишем задачу (6.3.7), (6.3.6) в упрощенном виде:

$$J = \varphi_{\text{HB}}^2 + \bar{n}_{\text{HB}}^2 \rightarrow \min_{\varphi_{\text{HB}}, \bar{n}_{\text{HB}}}; \quad (6.3.8)$$

$$c_{\text{Т НВ}}(\varphi_{\text{HB}})\bar{n}_{\text{HB}}^2 = A. \quad (6.3.9)$$

Эту задачу с двумя переменными можно решать известным методом Лагранжа [9, 19].

Сведем ее к безусловной задаче минимизации с одной искомой переменной $\varphi_{\text{НВ}}$.

Выделим из формулы (6.3.9) выражение вида:

$$\bar{n}_{\text{НВ}}^2 = \frac{A}{c_{\text{Т НВ}}(\varphi_{\text{НВ}})} \quad (6.3.10)$$

и подставим его в целевую функцию (6.3.8):

$$J = \varphi_{\text{НВ}}^2 + \frac{A}{c_{\text{Т НВ}}(\varphi_{\text{НВ}})}.$$

Применяя к функции $J(\varphi_{\text{НВ}})$ необходимое условие экстремума [19], получаем уравнение вида:

$$\frac{dJ}{d\varphi} = 2\varphi_{\text{НВ}} - \frac{Ac'_{\text{Т НВ}}(\varphi_{\text{НВ}})}{c_{\text{Т НВ}}^2(\varphi_{\text{НВ}})} = 0,$$

где $c'_{\text{Т НВ}}$ – производная от функции $c_{\text{Т НВ}}$ по переменной $\varphi_{\text{НВ}}$.

Нетрудно показать, что применение достаточных условий экстремума [19] указывают на наличие минимума функции $J(\varphi_{\text{НВ}})$.

Возвращаясь к независимой переменной t , получаем, что для определения закона $\varphi_{\text{НВ}}(t)$ необходимо решать параметрическое нелинейное уравнение:

$$2\varphi_{\text{НВ}}(t) - \frac{A(t)c'_{\text{Т НВ}}(\varphi_{\text{НВ}}(t))}{c_{\text{Т НВ}}^2(\varphi_{\text{НВ}}(t))} = 0, \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (6.3.11)$$

Пусть $\varphi_{\text{НВ}}^0(t)$ – решение этого уравнения, полученное в общем случае одним из численных методов [9]. Тогда относительное число оборотов НВ в момент времени t из формулы (6.3.10) определяется как:

$$\bar{n}_{\text{НВ}}(t) = \sqrt{\frac{A(t)}{c_{\text{ТНВ}}(\varphi_{\text{НВ}}^0(t))}}, \quad t \in [t_0, t_{\text{к}}]. \quad (6.3.12)$$

Полученный закон (6.3.12) изменения числа оборотов НВ реализуется путем дросселирования двигателя БВ.

Сформируем требуемый закон управления числом оборотов вала двигателя БВ, обеспечивающего изменение во времени полученного числа оборотов НВ $n_{\text{НВ}}(t)$, $t \in [t_0, t_{\text{к}}]$.

Пусть $n_{\text{ДВ}}^{\text{max}}$ – максимальное число оборотов двигателя БВ, $\bar{n}_{\text{ДВ}}^{\text{р}}$ – относительное число его оборотов, выбранного для эксплуатации режима его работы.

Тогда число оборотов двигателя на выбранном режиме определяется как:

$$n_{\text{ДВ}}^{\text{р}} = \bar{n}_{\text{ДВ}}^{\text{р}} n_{\text{ДВ}}^{\text{max}}.$$

На этом режиме вращение НВ осуществляется через главный редуктор (ГР) силовой установки БВ с передаточным числом $k_{\text{ГР}} < 1$.

Максимальное число оборотов на выходе ГР будет равно:

$$n_{\text{max}} = k_{\text{ГР}} n_{\text{ДВ}}^{\text{р}} = k_{\text{ГР}} \bar{n}_{\text{ДВ}}^{\text{р}} n_{\text{ДВ}}^{\text{max}}.$$

Абсолютное число оборотов НВ в момент времени $t \in [t_0, t_{\text{к}}]$ с учетом этого выражения примет вид:

$$n_{\text{НВ}}(t) = n_{\text{max}} \bar{n}_{\text{НВ}}(t) = k_{\text{ГР}} \bar{n}_{\text{ДВ}}^{\text{р}} n_{\text{ДВ}}^{\text{max}} \bar{n}_{\text{НВ}}(t).$$

Введем параметр $\bar{n}_{\text{ДВ}}^{\text{др}}(t) \in [0, 1]$, описывающий дросселирование двигателя в момент времени $t \in [t_0, t_{\text{к}}]$.

Тогда требуемый закон изменения числа оборотов НВ можно получить с применением этого параметра как:

$$n_{\text{НВ}}(t) = \bar{n}_{\text{ДВ}}^{\text{др}}(t) k_{\text{ГР}} n_{\text{ДВ}}^{\text{max}}, \quad t \in [t_0, t_{\text{к}}],$$

где
$$\bar{n}_{\text{ДВ}}^{\text{др}}(t) = \bar{n}_{\text{ДВ}}^{\text{р}}(t) \bar{n}_{\text{НВ}}(t). \quad (6.3.13)$$

Будем считать, что для улучшения характеристик продольной устойчивости БВ применяется управляемый стабилизатор, установленный на его хвостовой балке.

В современной вертолетной технике управление углом $\varphi_{ст}$ отклонения стабилизатора связано с управлением общим шагом НВ [49].

При этом окончательный вид нелинейной зависимости:

$$\varphi_{ст.} = f(\varphi_{ош}) \quad (6.3.14)$$

получают обычно в результате летных испытаний вертолета [45].

Для формирования закона управления $\varphi_{ст}(t)$ проводится аппроксимация результатов летных экспериментов.

Рассмотрим формирование входящего в вектор (6.3.1) косвенного управления БВ угла $\chi(t)$ с помощью его автомата перекоса (АП).

По определению АП является механизмом управления общим и циклическим шагом НВ, позволяющим осуществить требуемые изменения значения и направления силы тяги НВ [35, 47].

Как было отмечено в Разд. 2.4, в перспективных БВ для сокращения стоимости их производства предлагается использовать более простые АП кривошипного типа [47, рис. 10.12]. Такой АП действует только в продольном направлении изменения положения вектора $T_{нв}$ (см. Рис. 2.9,а). Наклон плоскости вращения происходит за счет наклона на угол $\delta_{ап}$ оси стакана управления АП при соответствующем повороте кривошипа. Последний, к которому крепятся шарниры лопастей НВ, жестко соединен с валом управления АП.

Ось кривошипа наклонена относительно оси вала управления на угол $\delta_{ап}$. При повороте кривошипа на угол 90° ось стакана управления наклоняется на угол $\delta_{ап}$, поворачивая на

В дальнейшем будет использован параметр $k_{\text{НВ}}$, описывающий передаточное отношение между углами наклона стакана управления АП и отклонением оси конуса вращения НВ [35].

На Рис. 6.10 введены следующие обозначения: 1 – вал НВ; 2 – сферический шарнир; 3 – стакан управления; 4 – шарниры НВ; 5 – тяги механизма изменения угла наклона стакана управления; 6 – механизм изменения циклического шага НВ.

Из этого рисунка следует соотношение вида:

$$k_{\text{НВ}} \delta_{\text{ап}}(t) + \varepsilon_{\text{НВ}} = 0,5\pi - \chi(t).$$

Отсюда получаем искомый закон управления:

$$\delta_{\text{ап}}(t) = \frac{0,5\pi - \chi(t) - \varepsilon_{\text{НВ}}}{k_{\text{НВ}}}, \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (6.3.15)$$

Пример 6.8.

Проиллюстрируем применение полученной формулы при $\varepsilon_{\text{НВ}} = 6^\circ$ и $k_{\text{НВ}} = 3,6$ для углов $\chi(t)$, использованных в Примере 2.6.

Для реализации прямолинейной траектории набора высоты БВ при $\theta(t) = 15^\circ$ угол $\chi(t) = 80,823^\circ$. Тогда из формулы (6.3.15) имеем, что:

$$\delta_{\text{ап}}(t) = \frac{90 - 80,823 - 6}{3,6} = 0,883^\circ.$$

При $\theta = 0^\circ$ и $\chi(t) = 67,468^\circ$ получаем:

$$\delta_{\text{ап}}(t) = 4,592^\circ.$$

Для $\theta = -15^\circ$ и $\chi(t) = 55,106^\circ$ имеем:

$$\delta_{\text{ап}}(t) = 8,026^\circ.$$

Из этих результатов следует увеличение значений угла $\delta_{\text{ап}}(t)$ при уменьшении угла $\theta(t)$ наклона траектории полетов БВ.

В Примере 2.8, в котором моделировался при $\chi(t) = 112,254^\circ$ процесс обратного полета БВ по ранее выполненной прямой

при $\theta = 0^\circ$ траектории. Для его реализации необходимо отклонить АП на угол:

$$\delta_{\text{ап}}(t) = \frac{90 - 112,254 - 6}{3,6} = -7,848^\circ.$$

Рассмотрим методику формирования прямого управления тягой РВ БВ.

Рулевой винт БВ является винтом изменяемого шага [39], который работает при заданном значении числа $n_{\text{рв}} = \text{const}$ оборотов его вала.

При формировании закона управления тягой РВ требуется для известного закона $T_{\text{рв}}(t)$ из вектора (6.3.1) определить зависимость $\varphi_{\text{рв}}(t)$ при $t \in [t_0, t_k]$.

Сила тяги РВ вычисляется по известной формуле [35, 49]:

$$T_{\text{рв}}(t) = 0,5c_{\text{т рв}}(\varphi_{\text{рв}}(t))\rho(y(t))(\omega_{\text{рв}}R_{\text{рв}})^2\pi R_{\text{рв}}^2, \quad (6.3.16)$$

где $c_{\text{т рв}}(\varphi_{\text{рв}}(t))$ – коэффициент тяги РВ; $\omega_{\text{рв}}$ – угловая скорость вращения РВ; $R_{\text{рв}}$ – радиус РВ.

Отметим, что коэффициент тяги РВ, так же как и соответствующий коэффициент для НВ, определяется экспериментальным путем [49].

Преобразуем выражение (6.3.16) в параметрическое уравнение вида:

$$c_{\text{т рв}}(\varphi_{\text{рв}}(t)) = \frac{2T_{\text{рв}}(t)}{\rho(y(t))(\omega_{\text{рв}}R_{\text{рв}})^2\pi R_{\text{рв}}^2}, \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (6.3.17)$$

Будем считать, что экспериментальные значения коэффициента тяги РВ с достаточной точностью аппроксимируются кубическим полиномом:

$$c_{\text{т рв}}(\varphi_{\text{рв}}) = \bar{c}_0 + \bar{c}_1\varphi_{\text{рв}} + \bar{c}_2\varphi_{\text{рв}}^2 + \bar{c}_3\varphi_{\text{рв}}^3, \quad (6.3.18)$$

где \bar{c}_i – коэффициенты, определенные методом наименьших квадратов [21].

Для построения управления $\varphi_{рв}(t)$ введем вспомогательную функцию:

$$B(t) = \frac{2T_{рв}(t)}{\rho(y(t))(\omega_{рв}R_{рв})^2 \pi R_{рв}^2}.$$

Тогда с учетом выражения (6.3.18) параметрическое уравнение (6.3.17) примет следующий вид:

$$\bar{c}_0 + \bar{c}_1\varphi_{рв} + \bar{c}_2\varphi_{рв}^2 + \bar{c}_3\varphi_{рв}^3 - B(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (6.3.19)$$

Данное кубическое уравнение для каждого $t \in [t_0, t_k]$ решается одним из численных методов, изложенных в работе [9].

Вычисленные компоненты вектора прямого управления БВ:

$$\Delta(t) = \left(\varphi_{нв}(t), \bar{n}_{дв}^{др}(t), \varphi_{ст}(t), \delta_{ап}(t), \varphi_{рв}(t) \right), t \in [t_0, t_k] \quad (6.3.20)$$

должны в каждый момент времени t удовлетворять ограничениям вида:

$$\begin{aligned} \varphi_{нв}^{\min} &\leq \varphi_{нв}(t) \leq \varphi_{нв}^{\max}; \\ 0 &\leq \bar{n}_{дв}(t) \leq \bar{n}_{дв}^p; \\ \varphi_{ст}^{\min} &\leq \varphi_{ст}(t) \leq \varphi_{ст}^{\max}; \\ \delta_{ап}^{\min} &\leq \delta_{ап}(t) \leq \delta_{ап}^{\max}; \\ \varphi_{рв}^{\min} &\leq \varphi_{рв}(t) \leq \varphi_{рв}^{\max}. \end{aligned} \quad (6.3.21)$$

Минимальные и максимальные значения компонент вектора (6.3.20) определяются конструктивными параметрами рассматриваемого БВ и условиями эффективной эксплуатации его НВ и РВ.

Рассмотрим примеры формирования векторов (6.3.20) для режимов полета БВ с характеристиками, представленными в Табл. 2.9. При этом конкретизируем ограничения (6.2.21) с использованием работ [35, 45-50] в виде следующих неравенств:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \varphi_{\text{НВ}}(t) \leq 23^\circ; \\
0 &\leq \bar{n}_{\text{ДВ}}^{\text{ДР}}(t) \leq 0,83; \\
-20^\circ &\leq \varphi_{\text{СТ}}(t) \leq 27^\circ; \\
-10^\circ &\leq \delta_{\text{АП}}(t) \leq 10^\circ; \\
-30^\circ &\leq \varphi_{\text{РВ}}(t) \leq 30^\circ.
\end{aligned} \tag{6.3.22}$$

Пример 6.9.

Сформируем законы прямого управления БВ при его пространственном снижении с разворотом (см. Рис. 5.7) на интервале времени $[0; 170,539]$ с. со скоростью $V_{\text{зад}} = 30$ м/с.

Компоненты $T_{\text{НВ}}(t)$, $\chi(t)$, $T_{\text{РВ}}(t)$ вектора косвенного управления $u(t)$, вычисленные в Примере 5.4, представлены в Табл. 5.10.

При формировании управления тягой несущего винта БВ будем считать, что коэффициент тяги, определенный экспериментальным методом, описывается зависимостью $c_{\text{Т НВ}}(\varphi_{\text{НВ}})$ из работы [49, рис. 1.4]. Значения этого коэффициента приведены на Рис. 6.11 и в Табл. 6.7.

Эти данные будем аппроксимировать методом наименьших квадратов [21] полиномом вида:

$$c_{\text{Т НВ}}(\varphi_{\text{НВ}}) = a_1\varphi_{\text{НВ}} + a_2\varphi_{\text{НВ}}^2 + \dots + a_m\varphi_{\text{НВ}}^m, \tag{6.3.23}$$

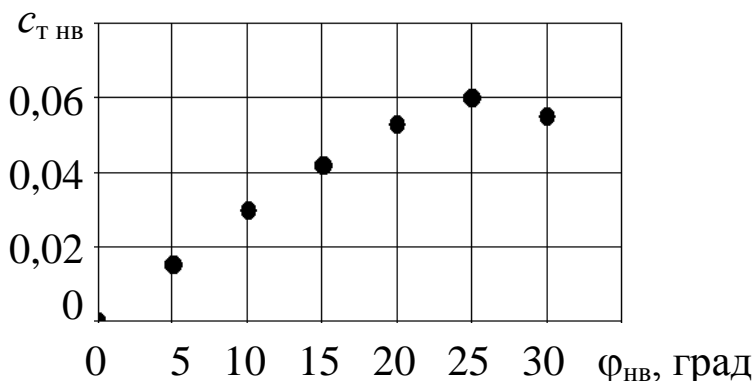


Рис. 6.11

Таблица 6.7

$\varphi_{\text{НВ}}$, град	$c_{\text{Т НВ}}$
0	0
5	0,015
10	0,030
15	0,042
20	0,053
25	0,060
30	0,055

Такая аппроксимация при $m = 1$ дает зависимость вида:

$$c_{\text{Т НВ}} = 0,165\varphi_{\text{НВ}}. \tag{6.3.24}$$

При $m = 3$ полином (6.3.23) конкретизируется как:

$$c_{ТНВ} = 0,152\varphi_{НВ} + 0,189\varphi_{НВ}^2 - 0,527\varphi_{НВ}^3. \quad (6.3.25)$$

График этой функции и экспериментальные значения из Табл. 6.7 представлены на Рис. 6.12.

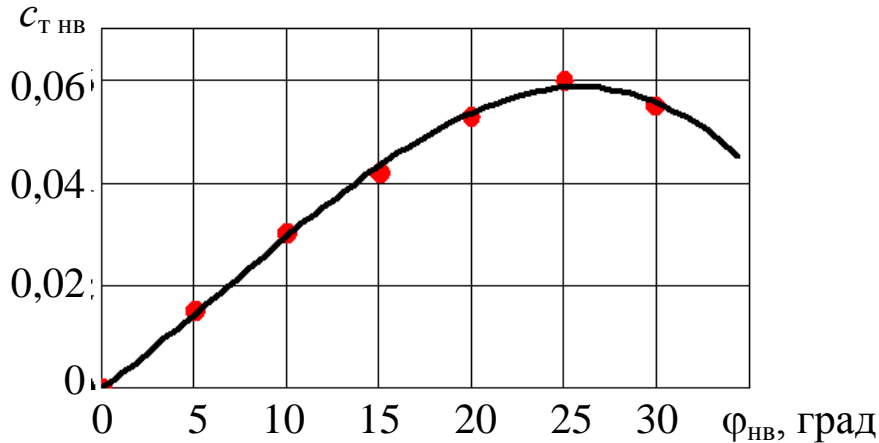


Рис. 6.12

Оценки точности аппроксимации приведенных выше экспериментальных значений коэффициента $c_{ТНВ}$ зависимостями (6.3.24) и (6.3.25) приведены в Табл. 6.8.

В этой таблице через $\delta c_{ТНВ}^{(1)}$ и $\delta c_{ТНВ}^{(3)}$ обозначены относительные значения погрешности использования функции (6.3.23) при $m = 1$ и $m = 3$ для описания экспериментальных данных по коэффициенту тяги НВ, представленных на Рис. 6.11.

Таблица 6.8

$\varphi_{НВ}$, град	$c_{ТНВ}$	$c_{ТНВ}^{(1)}$	$c_{ТНВ}^{(3)}$	$\delta c_{ТНВ}^{(1)}$, %	$\delta c_{ТНВ}^{(3)}$, %
0	0	0	0	0	0
5	0,015	0,014	0,014	4,286	4,457
10	0,030	0,029	0,029	4,286	1,862
15	0,042	0,043	0,043	-2,551	-2,922
20	0,053	0,057	0,054	-8,356	-1,106
25	0,060	0,072	0,058	-19,643	2,640
30	0,055	0,086	0,056	-56,623	-1,116

Из Табл. 6.8 следует, что линейная аппроксимация (6.3.24) дает удовлетворительную погрешность только для значений

$\varphi_{\text{НВ}} \in [0^\circ; 15^\circ]$, тогда как кубическая зависимость (6.3.25) удовлетворяет требованиям точности проведения инженерных расчетов при $\varphi_{\text{НВ}} \in [0; 30]^\circ$.

Отметим, что определение значений коэффициентов a_i , $i = (\overline{1, m})$ должно проводиться для значений $\varphi_{\text{НВ}}$, переведенных из градусов в радианы.

При использовании более точной зависимости (6.3.25) уравнение (6.3.11) для формирования закона $\varphi_{\text{НВ}}(t)$ примет следующий вид:

$$2\varphi_{\text{НВ}}(t) - \frac{0,152 + 0,378\varphi_{\text{НВ}}(t) - 1,581\varphi_{\text{НВ}}^2(t)}{0,152\varphi_{\text{НВ}}(t) + 0,189\varphi_{\text{НВ}}^2(t) - 0,527\varphi_{\text{НВ}}^3(t)} A(t) = 0, \quad (6.3.26)$$

где $A(t)$ определяется выражением (6.3.5).

При значениях $T_{\text{НВ}}(t)$, $t \in [0; 170,539]$ с. из Табл. 5.10 функция $A(t)$ будет дополнительно зависеть от времени за счет изменения плотности воздуха, описываемой зависимостью:

$$\rho(y(t)) = 1,225e^{-0,0001 y(t)}, \quad (6.3.27)$$

где $y(t)$ – текущая высота полета БВ в момент времени $t \in [0; 170,539]$ с., представленная в Табл. 5.8.

Конкретизируем функцию $A(t)$ с использованием исходных данных по НВ БВ из Табл. 2.9 и формулы (6.3.27).

Полученное нелинейное параметрическое уравнение будем решать на интервале времени $[0; 170,539]$ с. одним из численных методов, приведенных в работе [9]. По найденным значениям $\varphi_{\text{НВ}}^0(t)$ вычисляются по формуле (6.3.12) относительные значения $\bar{n}_{\text{НВ}}(t)$ числа оборотов вала НВ.

Для определения закона изменения числа оборотов вала двигателя БВ будем считать, что:

$$n_{\text{ДВ}}^{\text{max}} = 2900 \text{ об/мин}; \quad n_{\text{ДВ}}^{\text{р}} = 2400 \text{ об/мин};$$

$$\bar{n}_{\text{ДВ}}^{\text{р}} = 0,8276; \quad k_{\text{гр}} = \frac{1}{8}.$$

Тогда имеем:

$$n_{\text{max}} = k_{\text{гр}} n_{\text{ДВ}}^{\text{р}} = 300 \text{ об/мин.}$$

Искомый закон дросселирования двигателя будем вычислять по ормуде (6.3.13), которая конкретизируется как:

$$\bar{n}_{\text{ДВ}}^{\text{др}}(t) = 0,8276 \bar{n}_{\text{НВ}}(t), \quad t \in [0; 170,539].$$

Результаты расчетов приведены в Табл. 6.9 и на Рис. 6.13.

Таблица 6.9

$t, \text{с}$	$T_{\text{НВ}}, \text{Н}$	$\varphi_{\text{НВ}}, \text{град}$	$\bar{n}_{\text{НВ}}$	$n_{\text{НВ}}, \text{об/мин}$	$\bar{n}_{\text{ДВ}}^{\text{др}}$
0	15528,418	19,088	0,582	174,750	0,482
17,054	17846,377	19,586	0,613	183,949	0,507
34,108	18227,499	19,569	0,612	183,620	0,506
51,162	18281,426	19,480	0,606	181,919	0,502
68,216	18307,062	19,376	0,600	179,976	0,497
85,270	18400,612	19,262	0,593	177,869	0,491
102,324	18677,095	19,168	0,587	176,182	0,486
119,377	18944,191	19,149	0,586	175,835	0,485
136,431	19349,269	19,198	0,589	176,710	0,487
153,485	19834,406	19,282	0,594	178,238	0,492
170,539	20199,059	19,352	0,598	179,538	0,495

Определим закон изменения угла $\varphi_{\text{ст}}(t)$ отклонения стабилизатора БВ. Будем считать, что экспериментально определенная для БВ зависимость вида (6.3.14) имеет вид графика, из работы [49, рис. 1.31].

Применяя к нему метод наименьших квадратов [21], получим следующую аппроксимацию требуемой зависимости:

$$\varphi_{\text{ст}} = -16,374 + 4,971\varphi_{\text{НВ}} - 0,392\varphi_{\text{НВ}}^2 + 0,012\varphi_{\text{НВ}}^3. \quad (6.3.28)$$

Результаты расчетов по этой формуле для значений $\varphi_{\text{НВ}}(t)$ из Табл. 6.9 представлены в Табл. 6.10 и на Рис. 6.14.

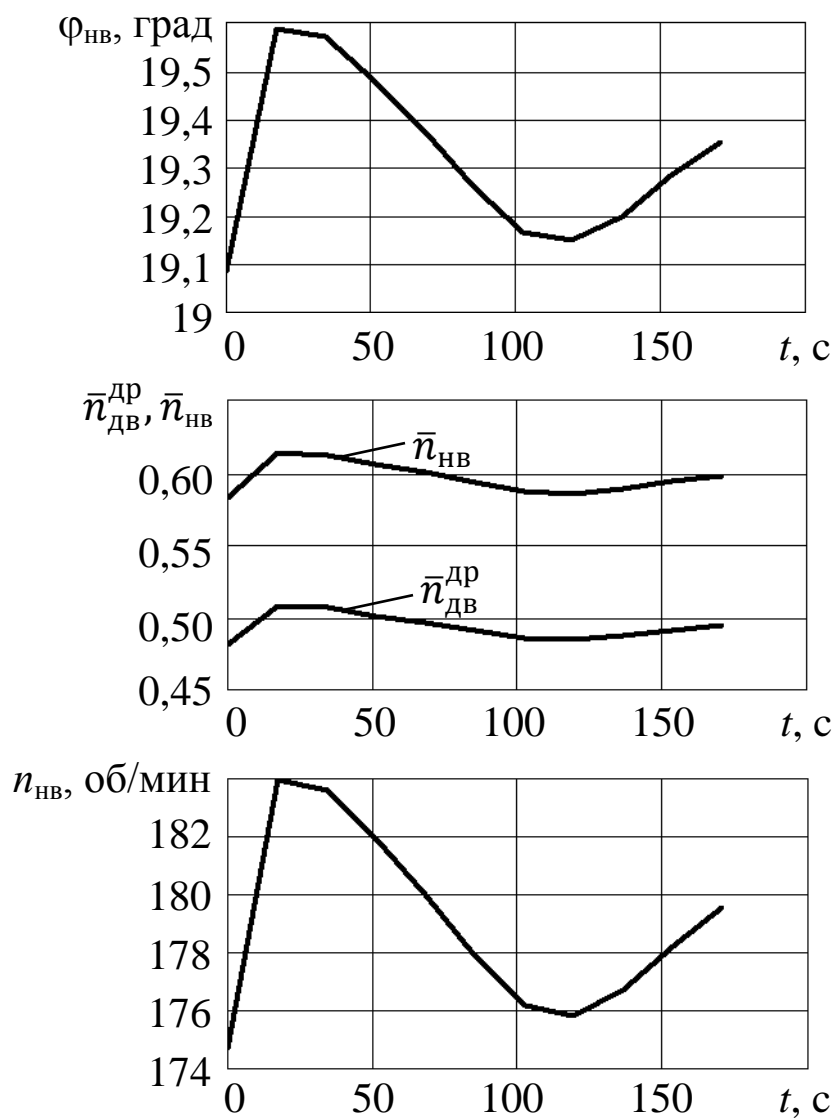


Рис. 6.13

Таблица 6.10

t, c	$\varphi_{нв}, \text{град}$	$\varphi_{ст}, \text{град}$
0	19,088	19,335
17,054	19,586	20,982
34,108	19,569	20,923
51,162	19,480	20,619
68,216	19,376	20,271
85,270	19,262	19,894
102,324	19,168	19,592
119,377	19,149	19,529
136,431	19,198	19,686
153,485	19,282	19,960
170,539	19,352	20,193

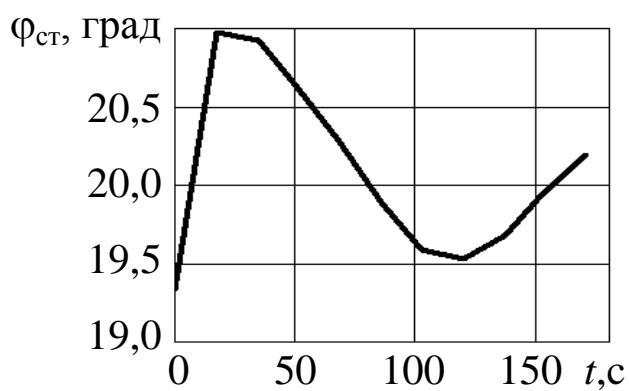


Рис. 6.14

Управление $\delta_{ап}(t)$ автоматом перекося БВ при значениях $\chi(t)$, $t \in [0; 170,539]$ из Табл. 5.10 определим с использованием формулы (6.3.15) при $\varepsilon_{нв} = 6^\circ$ и $k_{нв} = 3,6$. Результаты расчетов для текущих значений $\chi(t)$ и $\theta_{тр}(t)$ представлены в Табл. 6.11 и на Рис. 6.15.

Таблица 6.11

t, c	$\chi, \text{град}$	$\theta, \text{град}$	$\delta_{ап}, \text{град}$
0	86,230	0	-0,619
17,054	46,947	-43,420	10,292
34,108	39,362	-51,996	12,399
51,162	36,481	-55,172	12,200
68,216	35,619	-56,291	13,439
85,270	37,185	-55,310	13,004
102,324	44,162	-49,374	11,066
119,377	53,542	-40,458	8,461
136,431	65,030	-29,271	5,269
153,485	78,778	-15,387	1,451
170,539	86,461	0	-0,684

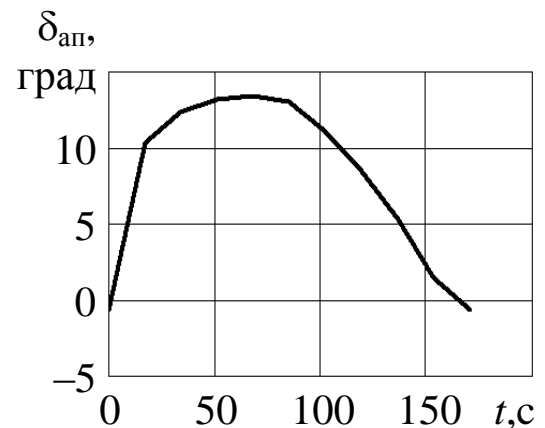


Рис. 6.15

При управлении РВ БВ будем использовать экспериментальную зависимость $c_{т рв}(\varphi_{рв})$ из работы [49, рис. 1.37].

Обработывая эту зависимость методом наименьших квадратов [21], конкретизируем функцию (6.3.18) выражением вида:

$$c_{т рв}(\varphi_{рв}) = 0,14212\varphi_{рв} + 0,00156\varphi_{рв}^2 - 0,25722\varphi_{рв}^3. \quad (6.3.29)$$

Расчет значений $\varphi_{рв}(t)$ путем численного решения уравнения (6.3.19) при $T_{рв}(t)$, $t \in [0; 170,539]$ с. из Табл. 5.10 и конкретизации функции $B(t)$ с использованием данных из Табл. 2.9 приведен в Табл. 6.12 и на Рис. 6.16.

Проведем анализ допустимости полученных законов прямого управления рассматриваемого БВ.

Таблица 6.12

t, c	$\varphi_{рв}, \text{град}$
0	16,766
17,054	17,448
34,108	17,347
51,162	17,607
68,216	17,897
85,270	18,336
102,324	18,736
119,377	18,882
136,431	18,982
153,485	19,003
170,539	19,048

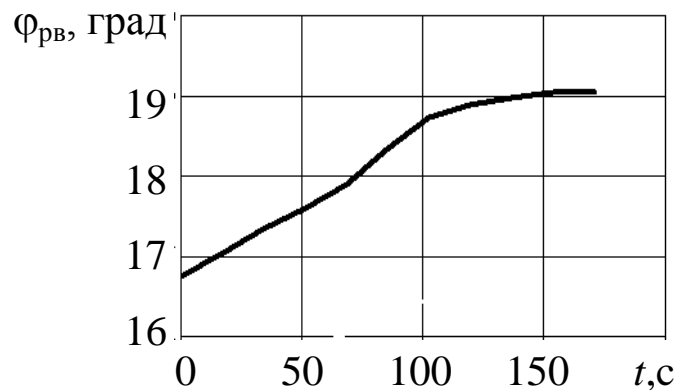


Рис. 6.16

Из сопоставления зависимостей $\varphi_{нв}(t)$, $\bar{n}_{дв}^{др}(t)$, $\varphi_{ст}(t)$, $\delta_{ап}(t)$, $\varphi_{рв}(t)$, $t \in [0; 170,539]$ с. с ограничениями (6.3.22) следует, что все управления, кроме $\delta_{ап}(t)$ являются допустимыми. Последнее, согласно Табл. 6.10, нарушается при $t \in [17,054; 119,377]$ с. Это означает, что сформированная в Примере 5.4 требуемая траектория снижения БВ с пространственным разворотом является нереализуемой при имеющихся значениях конструктивных параметров БВ.

Для получения допустимого управления БВ в этом режиме его полета необходимо изменить при требуемых высотах y_0 , y_k граничные значения θ_0 , θ_k , Ψ_0 , Ψ_k углов наклона и поворота требуемой траектории снижения вертолета.

Рассмотрим еще один пример определения законов прямого управления БВ.

Пример 6.10.

Пусть БВ осуществляет вертикальный взлет с переменной скоростью до высоты $h = 500$ м. с последующим зависанием.

Компоненты $T_{\text{НВ}}(t)$, $\chi(t)$ и $T_{\text{РВ}}(t)$, $t \in [0; 48,925]$ с. вектора $u(t)$ косвенного управления БВ были определены в Примере 5.7 и представлены выражениями (5.2.30).

Характерными особенностями рассматриваемого режима полета являются следующие постоянные значения:

$$\chi(t) = \pi/2; \quad T_{\text{РВ}}(t) = 945,656 \text{ Н}, \quad t \in [0; 48,925]. \quad (6.3.30)$$

При формировании законов управления $\varphi_{\text{НВ}}(t)$, $\bar{n}_{\text{ДВ}}^{\text{ДР}}(t)$, $\varphi_{\text{СТ}}(t)$, $\delta_{\text{АП}}(t)$, $\varphi_{\text{РВ}}(t)$, $t \in [0; 48,925]$ с. будем использовать данные Табл. 2.9 и сформированные в Примере 6.9 зависимости (6.3.25), (6.3.27)-(6.3.29). Применим приведенную выше методику формирования прямого управления БВ.

Закон управления тягой НВ представлен в Табл. 6.13 и на Рис. 6.17.

Таблица 6.13

$t, \text{ с}$	$y, \text{ м}$	$T_{\text{НВ}}, \text{ Н}$	$\varphi_{\text{НВ}}, \text{ град}$	$\bar{n}_{\text{ДВ}}^{\text{ДР}}$	$n_{\text{НВ}}, \text{ об/мин}$
0	0	19240,647	18,723	0,562	168,503
4,077	1,523	19961,579	18,881	0,571	171,160
8,154	10,898	20959,784	19,092	0,583	174,826
12,231	32,695	21230,328	19,155	0,587	175,952
16,308	68,440	21232,968	19,171	0,587	176,232
20,385	117,203	20933,780	19,132	0,585	175,530
24,462	176,180	20311,137	19,029	0,579	173,716
28,540	241,288	12445,537	18,871	0,570	170,999
32,617	307,747	18546,849	18,697	0,560	168,080
36,694	370,666	17906,755	18,573	0,554	166,051
40,771	425,635	17798,224	18,571	0,553	166,011
44,848	469,310	18378,001	18,727	0,562	168,579
48,925	500	19240,647	18,936	0,574	172,113

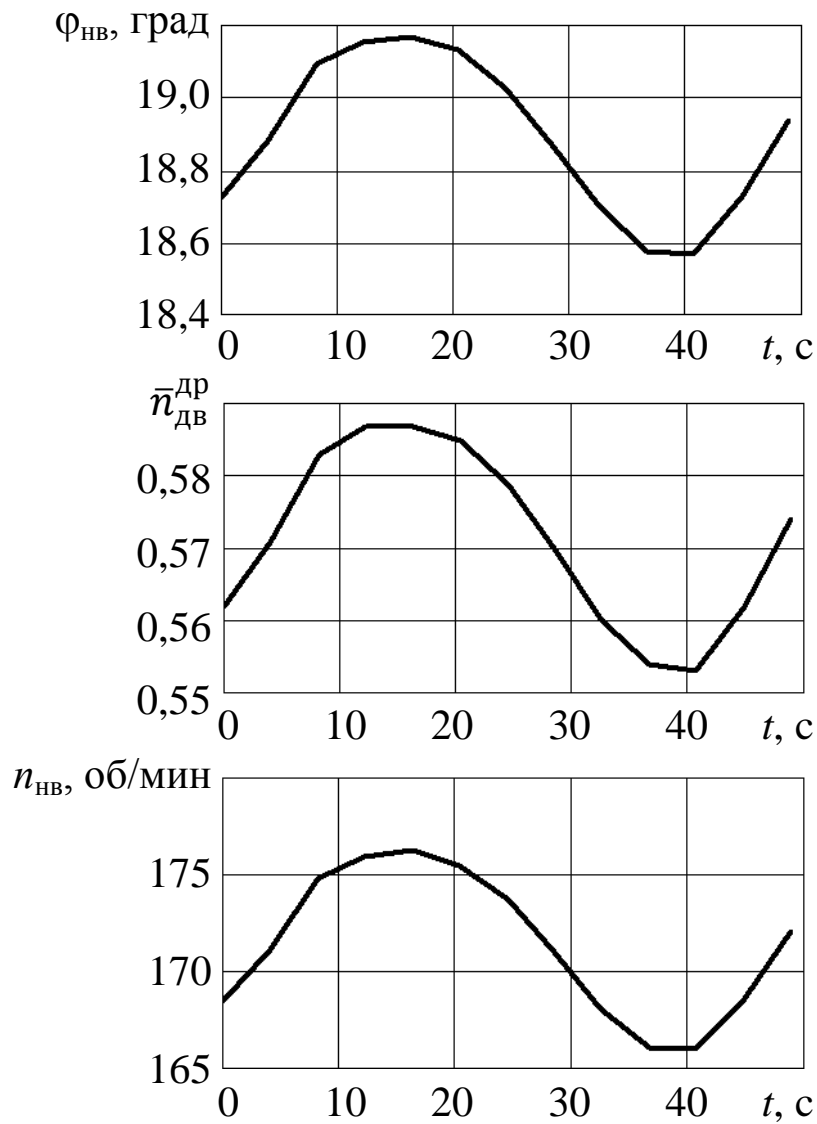


Рис. 6.17

Изменение угла $\varphi_{ст}(t)$ поворота управляемого стабилизатора БВ приведено на Рис. 6.18 и в Табл. 6.14.

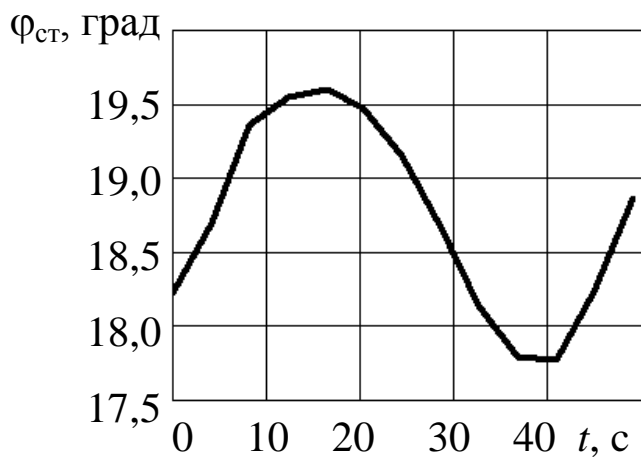


Рис. 6.18

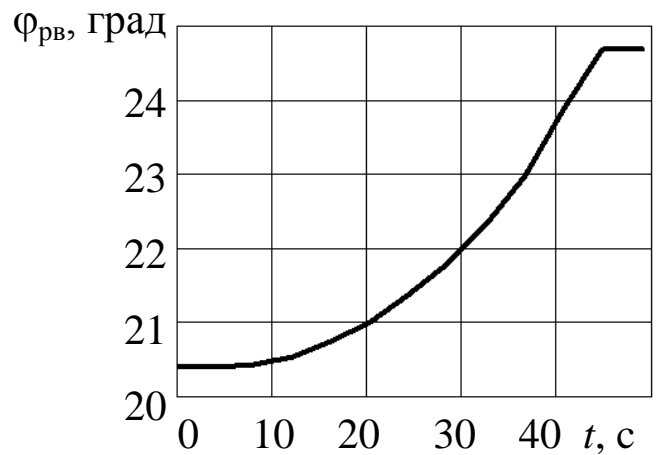


Рис. 6.19

Таблица 6.14

t, c	$\varphi_{\text{нв}}, \text{град}$	$\varphi_{\text{ст}}, \text{град}$
0	18,723	18,223
4,077	18,881	18,695
8,154	19,092	19,349
12,231	19,155	19,551
16,308	19,171	19,600
20,385	19,132	19,475
24,462	19,029	19,151
28,540	18,871	18,666
32,617	18,697	18,148
36,694	18,573	17,789
40,771	18,571	17,782
44,848	18,727	18,236
48,925	18,936	18,865

Таблица 6.15

t, c	$y, \text{м}$	$\varphi_{\text{рв}}, \text{град}$
0	0	20,383
4,077	1,523	20,391
8,154	10,898	20,437
12,231	32,695	20,548
16,308	68,440	20,735
20,385	117,203	21,005
24,462	176,180	21,360
28,540	241,288	21,801
32,617	307,747	22,333
36,694	370,666	22,976
40,771	425,635	23,864
44,848	469,310	24,706
48,925	500	24,706

Угол отклонения АП при вертикальном взлете БВ, вычисленный при $k_{\text{нв}} = 3,6$ и $\varepsilon_{\text{нв}} = 6^\circ$ по формуле (6.3.15) с учетом первого из выражений (6.3.30), будет равен:

$$\delta_{\text{ап}}(t) = -1,667^\circ, \quad t \in [0; 48,925] \text{ с.}$$

Закон $\varphi_{\text{рв}}(t)$ управления тягой РВ представлен на Рис. 6.19 и в Табл. 6.15.

Сопоставление полученных управлений с ограничениями (6.3.22) показывает их полную допустимость на интервале времени взлета БВ от 0 с. до 48,925 с.

В заключение главы отметим, что задачи разработки методик формирования прямого программного управления БЛА нуждаются в более глубоких и детальных исследованиях с широким привлечением специалистов по аэродинамике, динамике полета и системам управления беспилотной авиационной техники.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обзор существующих работ по динамике полета и управлению БЛА различных видов и назначения показывает отсутствие комплексного подхода к решению этой проблемы и, главное, наличие в них упрощенных методов решения соответствующих задач для использования в полевых условиях эксплуатации беспилотной авиационной техники. Вместе с тем, современная практика показывает, что пункты управления БЛА оснащены достаточно мощными образцами компьютерной техники.

По нашему мнению, последнее в рамках широкого мирового использования информационных технологий требует обеспечения эксплуатирующего персонала беспилотных авиационных комплексов (БАК) различного назначения современным программным обеспечением оперативного решения возникающих на практике задач управления БЛА.

В основу решения таких задач должны быть положены существующие и перспективные методы прикладной и вычислительной математики, а также методы компьютерной графики.

Для решения задач, рассмотренных в данной монографии, можно предложить типовой комплекс программ управления БЛА, включающий в себя следующие основные прикладные модули:

- определение координат пункта управления БАК и стартовых площадок БЛА с использованием электронных карт местности и систем ГЛОНАСС/GPS;
- формирование для каждой проводимой операции требуемых траекторий движения применяемых БЛА;

- верификация сформированных траекторий БЛА путем оперативного моделирования их полетов;
- формирование косвенного программного управления каждым БЛА для обеспечения их движения по заданным траекториям;
- моделирование движения БЛА для верификации полученных управлений;
- формирование законов прямого программного управления всеми БЛА, участвующими в планируемой операции;
- передача по соответствующим радиоканалам полученных программ полетов в запоминающие устройства САУ БЛА, находящихся на стартовых площадках и в воздухе.

При реализации этих программных модулей должны использоваться хорошо отработанные на практике численные методы решения систем обыкновенных дифференциальных, линейных и нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений, а также аппроксимации экспериментальных значений аэродинамических, моментных, высотно-скоростных и других характеристик применяемых БЛА и их силовых установок.

Последнее подразумевает, что ответственным за создание таких комплексов программ должны быть переданы предприятиями-разработчиками БЛА соответствующие аналитические зависимости этих характеристик.

На наш взгляд, такой современный подход к управлению БЛА позволит значительно повысить эффективность их применения при решении все расширяющегося спектра военных и гражданских задач, решаемых беспилотной авиационной техникой.

Литература

1. *Павлушенко М.И., Евстафьев Г.М., Макаренко И.К.* Беспилотные летательные аппараты: история, применение, угроза распространения и перспективы развития. М.: Изд-во ПИР-центра, 2005. 610 с.
2. Основы проектирования, конструирования и производства летательных аппаратов (дистанционно пилотируемые летательные аппараты). Под ред. И.С. Голубева и Ю.И. Янкевича. М.: Изд-во МАИ, 2006. 528 с.
3. *Моисеев В.С.* Российская беспилотная авиационная техника: основные проблемы и пути решения. Материалы Всероссийской научно-технической конференции «X Научные чтения, посвященные памяти Н.Е. Жуковского» / Сборник докладов. М.: Изд-во Академии им. Н.Е. Жуковского, 2013. С. 554-559.
4. *Моисеев В.С., Гущина Д.С., Моисеев Г.В.* Основы теории создания и применения информационных беспилотных авиационных комплексов. Казань: Изд-во МОиН РТ, 2010. 196 с. (Серия «Современная прикладная математика и информатика»).
5. Беспилотные летательные аппараты. Под ред. Л.С. Чернобровкина. М.: Машиностроение, 1967. 440 с.
6. Беспилотные летательные аппараты. Основы устройства и функционирования. Под ред. И.С. Голубева и И.К. Туркина. М.: Изд-во МАИ, 2008. 656 с.
7. *Лазарев Ю.Н.* Управление аэрокосмическими объектами. – Самара: Сам. центр РАН, 2007. 274 с.
8. *Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С.* Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1973. 616 с.

9. *Моисеев В.С.* Прикладная теория управления беспилотными летательными аппаратами: монография. Казань: Республиканский центр мониторинга качества образования (РЦ МКО), 2013. 768 с. (Серия «Современная прикладная математика и информатика»).

10. *Моисеев Г.В., Моисеев В.С.* Основы теории создания и применения имитационных беспилотных авиационных комплексов. (Серия «Современная прикладная математика и информатика») Казань: РЦМКО, 2013. 208 с.

11. *Янкевич Ю.* Применение беспилотных авиационных комплексов в гражданских целях. // *Аэрокосмический курьер*, 2006, № 6. С. 55-57.

12. *Остославский И.В., Стражева И.В.* Динамика полета. Траектории летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1969. 499 с.

13. *Летов А.М.* Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 360 с.

14. *Аэромеханика самолета. Динамика полета.* Под ред. А.Ф. Бочкарева и В.В. Андреевского. 2-е изд. перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1985. 360 с.

15. *Расчет и анализ движения летательных аппаратов.* Инженерный справочник. М.: Машиностроение, 1971. 352 с.

16. *Гимадеев Р.Г., Моисеев В.С., Арутюнова Н.К.* Обратные задачи управления беспилотными летательными аппаратами артиллерийской разведки. Казань: Изд-во РЦМКО, 2013, 245 с. (Серия «Современная прикладная математика и информатика»).

17. *Крутько П.Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем: нелинейные модели. М.: Наука, 1988. 328 с.

18. *Брюшгенс Г.С., Студнев Р.В.* Динамика самолета. Пространственное движение. М.: Машиностроение, 1983. 320 с.
19. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 631 с.
20. Управление и наведение беспилотных маневренных летательных аппаратов на основе современных информационных технологий. Под ред. М.Н. Красильникова, Т.Г. Серебрякова. М.: Физматлит, 2005. 280 с.
21. *Демиденко Е.З.* Линейная и нелинейная регрессии. М.: Финансы и статистика, 1981. 302 с.
22. *Моисеев В.С.* Групповое применение беспилотных летательных аппаратов. Казань: Редакционно-издательский центр (РИЦ) «Школа», 2017. 572 с. (Серия «Современная прикладная математика и информатика»).
23. Динамика полета. Под ред. А.М. Мхитаряна. Изд. 2-е, доп. и перераб. М.: Машиностроение, 1978. 424 с.
24. *Тарг С.М.* Краткий курс теоретической механики. М.: Физматгиз, 1961. 400 с.
25. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. М.: Физматгиз, 1962. 607 с.
26. *Котик М.Г.* Динамика взлета и посадки самолетов. М.: Машиностроение, 1984. 256 с.
27. *Мхитарян А.М.* Аэродинамика. М.: Машиностроение, 1976. 448 с.
28. *Поклад Г.Г.* Геодезия. М.: Акад. Проект, 2007. 589 с.
29. *Моисеев В.С.* Основы теории эффективного применения беспилотных летательных аппаратов. Казань: РИЦ «Школа», 2013. 444 с. (Серия «Современная прикладная математика и информатика»).

30. *Герц Е.В.* Пневматические устройства и системы. М.: Машиностроение, 1981. 287 с.

31. Справочник авиационного инженера. Под ред. В.Г. Александрова. М.: Транспорт, 1973. 400 с

32. Парашютные системы спасения. Официальный сайт ООО «Научно-промышленные системы» КБ «Взлет». [Электронный ресурс] www.kbvzlet.com.

33. *Амброжевич М.В., Карташев А.С., Середя В.А., Яшин С.А.* Критериальные оценки транспортного совершенства беспилотных летательных аппаратов воздушного старта // Авиационно-космическая техника и технология, 2007, №6(42). С. 33-37.

34. *Борзов Г.Е., Козар А.Н., Моисеев В.С.* Применение беспилотных разведывательно-корректировочных вертолетов в разведывательно-огневых комплексах артиллерии тактического звена. Казань: Научное издание. КВВКУ(ВИ), 2009. 148 с.

35. *Володко А.М.* Основы аэродинамики и динамики полета вертолетов. М.: Транспорт 1988. 342 с.

36. *Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.

37. *Лобанов Н.А.* Основы расчета и конструирования парашютов. М.: Машиностроение, 1965. 362 с.

38. *Миеле А.* Механика полета. Т.1. Теория траекторий полета. М.: Наука, 1965. 408 с.

39. *Александров В.Л.* Воздушные винты. М.: Оборонгиз, 1951. 493 с.

40. *Романенко Л.Г.* Проектирование систем управления летательных аппаратов. Казань: Магариф, 2004. 180 с.

41. *Доброленский Ю.П.* Динамика полета в неспокойной атмосфере. М.: Машиностроение, 1969. 256 с.

42. Новоселов А.С., Болнокин В.Е., Чинаев П.Н., Юрьев А.Н. Системы адаптивного управления летательными аппаратами аппаратами. М.: Машиностроение, 1987. 280 с.

43. Быстров Р.П., Гвоздев А.Е., Немцов А.В., Потанов А.А., Шеремет И.Б. Современное состояние и перспективы развития беспилотных летательных аппаратов ведущих стран мира. М.: 3 ЦНИИ МО РФ, 2016. 399 с.

44. Алемасов В.Е., Дрегалин А.Ф., Тишин А.П. Теория ракетных двигателей. Изд 3-е, перераб. и дополн. Под ред. В.П. Глушко. М.: Машиностроение, 1980. 533 с.

45. Миль М.Л., Некрасов А.В., Браверман А.С., Гродко Л.Н., Лейканд М.А. Вертолеты. Расчет и проектирование. Кн. 1. Аэродинамика. Под ред. М.Л. Миль. М.: Машиностроение, 1966. 480 с.

46. Тищенко М.Н., Некрасов А.В., Радин А.С. Вертолеты. Выбор параметров при проектировании. М.: Машиностроение, 1976. 366 с.

47. Богданов Ю.С., Михеев Р.А., Скулков Д.Д. Конструкция вертолетов. М.: Машиностроение, 1990. 272 с.

48. Базов Д.И. Аэродинамика вертолетов. М.: Транспорт, 1972. 184 с.

49. Ромасевич В.Ф., Самойлов Г.А. Практическая аэродинамика вертолетов. М.: Воениздат, 1980. 384 с.

50. Кривцов В.С., Карпов Я.С., Лосев Л.И. Проектирование вертолетов. Харьков: ХАИ, 2003. 344 с.

Виктор Сергеевич Моисеев

**ДИНАМИКА ПОЛЕТА И УПРАВЛЕНИЕ
БЕСПИЛОТНЫМИ ЛЕТАТЕЛЬНЫМИ АППАРАТАМИ**

Монография

Подписано к печати 24.11.2017.

Формат 60x84^{1/16}. Бумага офсетная.

Гарнитура «Times». Печать ризографическая.

Усл. печ. 24,18 л. Печ. 26 л. Тираж 100 экз. Заказ № 209.

420111, Казань, Дзержинского, 9/1. Тел. сот.: +7(917)264-84-83.

Отпечатано с готового оригинал-макета
в редакционно-издательском центре «Школа»

E-mail: ric-school@yandex.ru