

В.С. Моисеев, И.Т. Мокеева

НЕКОТОРЫЕ НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

МОНОГРАФИЯ



Москва
1980

В.С. Моисеев, Л.Т. Моисеева

**НЕКОТОРЫЕ НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ**

МОНОГРАФИЯ



**Казань
2020**

УДК 519.6

ББК 22.19

М 74

Редактор серии:

В.С. Моисеев – заслуженный деятель науки и техники Республики Татарстан, д-р техн. наук, профессор.

Моисеев В.С., Моисеева Л.Т.

М 74 Некоторые неклассические задачи вычислительной математики: монография. – Казань: Редакционно-издательский центр «Школа», 2020. – 176 с. (Серия «Современная прикладная математика и информатика»).

ISBN 978–5–00162–115–7

Монография посвящена задачам вычислительной математики, численные методы решения которых отсутствуют в существующей литературе. К таким неклассическим задачам в данной работе отнесены методы решения нелинейных уравнений, содержащих интегралы с искомым параметром; методы формирования, исследования и применения неявно заданных функций одной переменной; методы решения нелинейных параметрических уравнений и систем уравнений; методы решения дифференциальных уравнений с разрывной правой частью по используемому аргументу.

Книга предназначена для специалистов в области разработки численных методов, а также магистрантов, аспирантов и докторантов, осуществляющих с использованием методов вычислительной математики решение разнообразных прикладных задач.

УДК 519.6

ББК 22.19

ISBN 978–5–00162–115–7

© Моисеев В.С., 2020

© Моисеева Л.Т., 2020

© РИЦ «Школа», 2020

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА СЕРИИ	5
ВВЕДЕНИЕ	26
Глава 1. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ИНТЕГРАЛ, ЗАВИСЯЩИЙ ОТ ПАРАМЕТРА	27
1.1. Собственные интегралы с параметром	27
1.2. Описание метода	33
1.3. Определение радиуса действия беспилотного вертолета при действии ветра.....	49
Глава 2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ПРИМЕНЕНИЯ НЕЯВНО ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ.....	55
2.1. неявно заданные функции.....	55
2.2. Численные методы построения неявных функций на заданном интервале их аргументов.....	60
2.3. Методы исследования неявных функций.....	80
2.4. Вычисление интегралов от неявных функций	87
2.5. Применение неявных функций при решении дифференциальных уравнений и задач вариационного исчисления.....	94
2.6. Применение неявных функций для планирования траекторий движения БЛА	106
Глава 3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.....	112
3.1. Применение существующих численных методов.....	112
3.2. Применение сингулярных дифференциальных равнений.....	120
3.3. Применение методов построения неявных функций.....	125

3.4. Формирование закона изменения угла общего шага несущего винта беспилотного вертолета	134
Глава 4. АППРОКСИМАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ	140
4.1. Определение, свойства и примеры дифференциальных уравнений с разрывной правой частью	140
4.2. Вспомогательные функции численного метода решения разрывных дифференциальных уравнений	153
4.3. Описание метода	159
4.4. Моделирование вертикального взлета беспилотного вертолета со стартовыми двигателями	167
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	173
Список литературы	174

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА СЕРИИ

В серии книг «Современная прикладная математика и информатика», ориентированных на специалистов в этих областях, а также на студентов, магистрантов, аспирантов, адъюнктов и докторантов соответствующих специальностей, выходит очередная монография, посвященная численным методам решения некоторых неклассических задач вычислительной математики. Основой этих методов явились задачи современной теории эффективного применения беспилотных летательных аппаратов (БЛА) самолетных и вертолетных схем.

В течение 2004-2020 г.г. в этой серии опубликованы следующие работы:

1. Моисеев В.С., Козар А.Н. Основы теории применения управляемых артиллерийских снарядов. Казань: Изд-во КВАКУ, 2004.

Рассмотрена теория применения управляемых артиллерийских снарядов, даны модели и методы их оптимального планирования. Особое внимание уделяется методам преодоления управляемыми артиллерийскими снарядами зон активной защиты целей и планированию одновременного удара по цели несколькими управляемыми артиллерийскими снарядами.

Книга может быть полезна как для слушателей и курсантов высших военных учебных заведений, так и для работников научно-исследовательских институтов.

2. Медведев В.И. Программирование на C++, C++.NET и C#. Казань: Мастер Лайн, 2005.

Излагаются основные понятия и методика разработки объектно-ориентированных программ на языках C++, C++.NET и C# с использованием библиотеки классов Framework .NET платформы. Особое внимание уделено разработке Windows приложений из потоковых объектов и компонентов.

Монография предназначена для студентов вузов по направлению вычислительная техника и информатика, а также для всех, владеющих языком программирования С и желающих освоить .NET технологию программирования.

3. Зайдуллин С.С., Моисеев В.С. Математические модели и методы управления территориально распределёнными системами. Казань: Мастер Лайн, 2005.

Рассмотрены теоретические основы управления сложными территориально распределёнными организационно-техническими системами. Решение задач анализа, синтеза и управления такими системами выполняется на основе специальных прикладных информационных технологий.

Монография предназначена для широкого круга инженерно-технических работников, занимающихся вопросами разработки территориально распределённых систем.

4. Медведев В.И. Разработка компонентов и контейнеров на С++.NET и С#. Казань: Мастер Лайн, 2005.

Углублённо рассмотрено построение компонентов, контейнеров и объединение компонентов в контейнере с предоставлением сервисных услуг на базе библиотеки классов .NET Framework.

Монография имеет практическую направленность и предназначена для всех, владеющих объектно-ориентированным программированием на языках С++.NET и С# и желающих освоить программирование .NET компонентов.

5. Рахматуллин А.И., Моисеев В.С. Математические модели и методы оптимизации нестационарных систем обслуживания: монография. – Казань: РИЦ «Школа», 2006.

Рассмотрены теоретические основы оптимизации и адаптивного управления процессами обслуживания в сложных информационных и организационно-технических системах. Применение разработанных математических моделей, методов и алгоритмов иллюстрируется на практических задачах оптимизации и адаптивного управления функционированием систем обслуживания.

Монография предназначена для широкого круга инженерно-технических работников, занимающихся вопросами исследования и

оптимизации нестационарных процессов в сложных системах различного назначения.

6. Медведев В.И. .NET компоненты, контейнеры и удаленные объекты. Казань: РИЦ «Школа», 2006.

Книга посвящена компонентам – основным программным единицам при построении Windows-приложений в .NET технологии. Кроме компонентов и контейнеров, объединяющих компоненты в коллекции, значительное внимание уделено удалённым объектам и событиям, а также разработке использующих их распределённых приложений.

Для студентов и преподавателей вузов по направлению вычислительной техники и информатики. Представляет интерес для всех, знающих основы языков C++.NET и C# и желающих овладеть технологией создания и использования .NET компонентов для распределённых Windows приложений.

7. Козар А.Н., Борзов Г.Е., Рахматуллин А.И., Сотников С.В. Информатика ракетных войск и артиллерии. - Казань: «Отечество», 2006. 96 с.

Работа посвящена применению современных программных оболочек типа Delphi для создания информационных технологий управления действиями ракетных войск и артиллерии тактического звена.

8. Габитов Р.И., Емалетдинова Л.Ю. Модели и методы разработки автоматизированных систем организационного управления: монография. – Казань: РИЦ «Школа», 2007. – 120 с., ил.

В монографии рассмотрены теоретические основы проектирования унифицированного программного обеспечения автоматизированных систем организационного управления технологическими процессами деятельности специалистов, а также оптимизационные модели, методы и алгоритмы, обеспечивающие эффективное функционирование проектируемой распределенной системы.

Монография предназначена для широкого круга инженерно-технических работников, занимающихся вопросами разработки автоматизированных систем организационного управления.

9. Литвин В.М., Набережнов Г.М., Песошин В.А., Шлеймович М.П. Сжатие данных в системах числового программного управления: монография. – Казань: РИЦ «Школа», 2007. – 108 с.

Монография предназначена для широкого круга научных и инженерно-технических работников и студентов, занимающихся вопросами проектирования и моделирования систем числового программного управления.

10. Валеев М.Ф., Емалетдинова Л.Ю. Автоматизация организационного управления технологическими процессами налогообложения граждан: монография. – Казань: РИЦ «Школа», 2007. – 136 с., ил.

В монографии рассмотрены теоретические основы проектирования программного обеспечения автоматизированных систем организационного управления технологическими процессами налогообложения граждан, а также предлагается методика краткосрочного прогнозирования доходов граждан на основе автоматизированного построения моделей временных рядов.

Монография предназначена для широкого круга инженерно-технических работников, занимающихся вопросами разработки автоматизированных систем организационного управления.

11. Тутубалин П.И., Моисеев В.С. Вероятностные модели обеспечения информационной безопасности автоматизированных систем обработки информации и управления: монография. – Казань: РИЦ «Школа», 2008. – 151 с.

В монографии рассмотрены теоретические и практические основы создания максимально информационно безопасных, с точки зрения вероятностных критериев, автоматизированных систем обработки информации и управления, а так же разработаны подходы и методы повышения эффективности использования средств информационной безопасности.

Монография предназначена для широкого круга инженерно-технических работников, занимающихся вопросами разработки автоматизированных систем специального назначения.

12. Зиновьев П.А., Мейко А.В., Моисеев В.С. Инженерные методы расчета функциональной надежности и живучести корпоративных информационных систем: монография. Казань: Отечество, 2009. – 256 с.

В монографии рассматриваются состав, структура и характеристики корпоративных информационных систем (КИС), обсуждаются их основные показатели надежности и живучести, формулируется постановка задач оценки функциональной надежности и живучести таких систем. Предлагаются математические модели и инженерные методы расчета этих критически важных показателей функционирования КИС.

Монография предназначена для широкого круга специалистов-разработчиков и инженерно-технических работников, занимающихся вопросами проектирования, внедрения и эксплуатации информационных систем корпоративного масштаба, а также оптимизацией режимов их функционирования на всех этапах жизненного цикла. Она может быть полезна также студентам старших курсов ВУЗов, бакалаврам, магистрам и аспирантам соответствующих специальностей.

13. Красильников В.Н., Козар А.Н., Моисеев В.С., Красильников О.В. Переносные комплексы автоматизированного управления огнем артиллерии тактического звена: монография. Казань, Казанское высшее военное командное училище (военный институт), 2009. – 108 с.

В книге проведен анализ и сравнительная оценка отечественных и зарубежных комплексов автоматизированного управления огнем тактического звена управления. Предложена методика построения перспективного переносного комплекса автоматизированного управления огнем. Дан обзор современных средств управления огнем в тактическом звене, в том числе и компонентов двойного назначения. Представлена методика разработки математического, программного, информационного и методического обеспечения переносного комплекса автоматизированного управления огнем. Рассмотрены перспективы включения переносного комплекса в интегрированную АСУ артиллерии тактического звена. Приведено расчетно-экспериментальное обоснование результатов проведенной работы.

Книга может быть полезна как для слушателей и курсантов высших военных учебных заведений, так и для работников научно-исследовательских институтов Министерства обороны Российской

Федерации, занимающихся вопросами разработок и применения АСУ.

14. Борзов Г.Е., Козар А.Н., Моисеев В.С. Применение беспилотных разведывательно-корректировочных вертолетов в перспективных комплексах автоматизированного управления огнем артиллерии тактического звена. Научное издание. Казанское высшее военное командное училище (военный институт), 2009. – 148 с.

В монографии проведен анализ существующих и перспективных разведывательно-огневых комплексов (РОК) артиллерии тактического звена. Приведен анализ существующих и перспективных БЛА вертолетного типа. Предложена общая структура, функции и принципы построения на базе АСУ садн перспективного РОК с применением БРКВ. Описан процесс функционирования РОК. Предложены математические модели и методы разведки, целеуказания и выбора начальных параметров стрельбы управляемых артиллерийских снарядов (УАС) с применением БРКВ. Предложены математические модели и методы управления БРКВ, целеуказания и выбора начальных параметров стрельбы УАС в вертикальной плоскости с использованием БРКВ в режимах «висения», вертикального подъема/снижения и горизонтального полета. Рассмотрены основные принципы, направления и рекомендации по созданию перспективной АСУ садн как среды для применения РОК. Предложена общая ИТ разведки, целеуказания и применения УАС в составе РОК перспективной АСУ садн. Предложена вероятностная оценка эффективности РОК для стрельбы УАС с использованием БРКВ.

Монография может быть использована как для слушателей и курсантов высших военных учебных заведений, так и для работников научно-исследовательских институтов Министерства обороны Российской Федерации, занимающихся вопросами разработок и применения беспилотных летательных аппаратов.

15. Новикова С.В., Роднищев Н.Е. Основы идентификации динамических систем: монография. Казань: РИЦ «Школа», 2009. – 192 с.

В монографии рассмотрены теоретические и практические основы создания эффективных методов и процедур адаптивной коррекции параметрической динамической системы в условиях неоднородности и неопределенности ее параметров при наличии внешних возмущающих факторов. Приводится разработка методов и процедур идентификации и коррекции управляемых стохастических систем с ограничениями на вектор состояния и параметры.

Монография предназначена для широкого круга инженерно-технических работников, занимающихся вопросами разработки и доводки автоматизированных технических систем.

16. Альмухаметова А.Ф., Моисеев В.С. Математические модели и методы комплексного управления запасами и спросом в территориально-распределенной торговой корпорации: монография. Казань: РИЦ «Школа», 2010. – 170с.

В монографии рассмотрена проблема управления основной деятельностью территориально-распределенной торговой корпорации, сформулированы основные задачи комплексного управления запасами и спросом. Разработаны математические модели, методы, алгоритмы и прикладная информационная технология, обеспечивающие решение и реализацию представленных в работе задач.

Монография предназначена для широкого круга инженерно-технических работников, занимающихся вопросами математического моделирования процессов оптимального управления запасами и спросом в логистике, а также разработкой и развитием корпоративных информационных систем в крупных торговых корпорациях. Книга может быть полезна студентам и аспирантам соответствующих специальностей.

17. Моисеев В.С., Гущина Д.С., Моисеев Г.В. Основы теории создания и применения информационных беспилотных авиационных комплексов: монография. – Казань: РИЦ «Школа», 2010. - 189с., ил.

В монографии рассмотрены основы прикладной теории создания на этапе аналитического проектирования и применения беспилотных авиационных комплексов, решающих задачи информационного обес-

печения. Приводится научно-методический аппарат для выбора оптимальных проектных и эксплуатационных параметров таких комплексов.

Монография рассчитана на широкий круг специалистов, связанных с разработкой и эксплуатацией беспилотных авиационных комплексов, а также для студентов и аспирантов, специализирующихся в этой области.

18. Ризаев И.С., Рахал Я. Интеллектуальный анализ данных для поддержки принятия решений: монография. – Казань: РИЦ «Школа», 2011. - 170с.

Рассматриваются модели и алгоритмы в области интеллектуального анализа данных с использованием технологии Data Mining: классификация, кластеризация, поиск ассоциативных правил, прогнозирование. Методы проектирования хранилищ данных различной архитектуры. Разработка программного комплекса системы поддержки принятия решений.

Монография предназначена для широкого круга научных и инженерно-технических работников, преподавателей и студентов, занимающихся вопросами интеллектуального анализа данных на основе баз и хранилищ данных.

19. Моисеев В.С., Матвеев И.В., Нестерова Л.Е. Модели и методы создания перспективных учебно-тренировочных вертолетов: монография. – Казань: РИЦ «Школа», 2011. - 160с., ил.

В монографии рассмотрены теоретические и практические основы создания перспективных учебно-тренировочных вертолетов на базе существующих образцов, разработан научно-методический аппарат выбора оптимального для модернизации вертолета, и решения круга задач его модернизации в учебно-тренировочный вариант применения.

Монография предназначена для широкого круга специалистов, занимающихся исследованиями в области разработки цифровых систем управления современных пилотируемых и беспилотных летательных аппаратов вертолетной схемы.

20. Бутузова А.В., Моисеев В.С., Тутубалин П.И. Теоретические основы информатизации службы скорой медицинской помощи: монография. – Казань: РИЦ «Школа», 2011. - 242с., ил.

В монографии изложены результаты оригинальных научных исследований и практические реализации, связанные с актуальной задачей разработки математических моделей и методов информатизации лечебно-профилактических учреждений и защиты персональных данных в них, в частности в работе рассмотрены подходы к информатизации деятельности такой жизненно важной структуры как служба скорой медицинской помощи.

Монография предназначена для широкого круга инженерно-технических работников, занимающихся вопросами разработки автоматизированных систем специального назначения.

21. Горбунов Д.А., Моисеев В.С. Основы прикладной теории неявных математических моделей и методов: монография. – Казань: РЦ МКО, 2012. – 172 с.

В монографии изложены результаты оригинальных научных исследований и практические реализации, связанные с актуальной задачей разработки математических моделей и методов построения и оптимизации неявно заданных функциональных моделей в задачах анализа и синтеза реальных технических систем.

Монография предназначена для широкого круга инженерно-технических работников, занимающихся вопросами разработки автоматизированных систем специального назначения.

22. Иванов К.В., Тутубалин П.И. Марковские модели защиты автоматизированных систем управления специального назначения: монография. – Казань: РЦ МКО, 2012. – 216 с., ил.

В монографии изложены результаты оригинальных научных исследований и практические реализации, связанные с актуальной задачей разработки математических моделей и методов обеспечения информационной безопасности автоматизированных систем управления специального назначения.

В работе рассмотрены подходы по информатизации таких особо важных структур как военные и полевые мобильные автоматизиро-

ванные системы управления на основе предложенных новых образцов информационного оружия. Анализ защищённости систем, оснащённых новыми образцами информационного оружия, проводится с применением теории вероятностей и марковских процессов.

Монография предназначена для широкого круга инженерно-технических работников, занимающихся вопросами разработки автоматизированных систем специального назначения.

23. Медведев В.И. .NET компонентно-ориентированное программирование. – Казань: РЦ МКО, 2012 – 276 с.: ил

Книга посвящена компонентам. Являясь особыми объектами объектно-ориентированного программирования, объекты компонентов обладают дополнительными свойствами и поведением, позволяющими построение из них надежных программ.

Компонентно-ориентированное программирование рассматривает особенности поведения и взаимосвязи компонентов, предлагая общие правила их построения и использования при разработке надежных и безопасных многокомпонентных программ.

В книге излагаются основы программирования .NET компонентов совместно с контейнерами, существенно облегчающих их совместное применение. Уделено внимание базовым интерфейсам и классам компонентов и контейнеров, а также активно используемым компонентам и асинхронным вызовам и событиям, потокам и их синхронизации, освобождению ресурсов, сериализации объектов, удаленным компонентам.

Изложение сопровождается многочисленными примерами законченных консольных программ и Windows приложений на языках объектно-ориентированного программирования C++/CLI и C#.

Книга завершается разработкой распределенных многокомпонентных приложений с объектами компонентов, объединенных в объекте контейнера на сервере и управляемых клиентом через удаленный компонент. Программы поясняются диаграммами языка UML.

Для студентов и преподавателей вузов по направлению вычислительной техники и информатики. Представляет интерес для всех, знакомым с объектно-ориентированным программированием на языках

C# и C++/CLI и желающих овладеть основами технологии .NET компонентно-ориентированного программирования.

24. Козар А.Н., Моисеев В.С. Информационные технологии оптимального применения управляемых артиллерийских снарядов: монография. – РЦ МКО, 2012. – 348 с.

В книге рассмотрена теория применения управляемых артиллерийских снарядов, даны модели и методы их оптимального планирования. Особое внимание уделяется методам преодоления управляемыми артиллерийскими снарядами зон активной защиты целей и планированию одновременного удара по цели неуправляемыми и управляемыми артиллерийскими снарядами. Излагаются модели и методы организации подсвета целей с беспилотных летательных аппаратов. Сделан обзор опубликованных исследований ряда авторов, работающих в области применения управляемых артиллерийских снарядов. Приводится описание перспективного бортового оборудования управляемых артиллерийских снарядов и рассмотрены информационные технологии и их применения.

Книга может быть полезна как для слушателей и курсантов высших военных учебных заведений, так и для работников научно-исследовательских институтов Министерства обороны Российской Федерации, занимающихся вопросами применения управляемых артиллерийских снарядов.

25. Моисеев Г.В., Моисеев В.С. Основы теории создания и применения имитационных беспилотных авиационных комплексов: монография. – Казань: РЦ МКО, 2013. – 207 с., ил.

В монографии рассмотрены основы прикладной теории создания и применения имитационных беспилотных авиационных комплексов.

На основе результатов системного анализа предметной области определены роль и место, особенности проектирования и типовые эпизоды применения комплексов авиационных ложных целей воздушного старта. Рассмотрен типовой состав и функции воздушного пункта управления авиационными ложными целями.

Предложен комплекс математических моделей и методов определения оптимального состава смешанных авиационных группировок,

продолжительности их применения, оценки потерь и требуемого количества воздушных пунктов управления. Предложен оригинальный метод формирования законов управления авиационной ложной целью на основе бортовых полетных данных самолета-имитатора.

Приводятся постановки и методы решения основных задач создания авиационных ложных целей, обеспечивающих формирование оптимальных проектных и управленческих решений в процессе их разработки, в том числе при определении проектных параметров системы «самолет-носитель – авиационные ложные цели».

Монография рассчитана на широкий круг специалистов, связанных с разработкой и эксплуатацией беспилотных авиационных комплексов, а также на студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

26. Медведев В.И. Особенности объектно-ориентированного программирования на C++/CLI, C# и Java: 4-е изд., испр. и доп. - Казань: РЦ МКО, 2013. 450 с.: ил.

Излагаются основные понятия и методика разработки объектно-ориентированных программ на языках C++/CLI, C# и Java (J#) с применением пакетов языка Java и библиотеки .NET Framework языков C++/CLI и C#.

Изложение сопровождается многочисленными примерами законченных программ. Программы поясняются диаграммами языка UML.

Особое внимание акцентировано на наиболее сложных для понимания делегатах, событиях уведомлений, потоках и их синхронизации, преобразовании данных.

Параллельное изложение схожих основных языковых конструкций позволит лучше выявить не только близость и различие языков C++/CLI, C# и Java, но и лучше понять особенности этих языков.

В четвертом издании книги добавлен раздел о данных и их преобразовании, расширены ряд разделов, заменена поэтапно разрабатываемая много объектная программа на более интересную, также содержащую абстрактный класс, множество потоков, событий и уведомлений, наглядно иллюстрирующих особенности написания программ на языках C++/CLI, C# и Java.

Для студентов и преподавателей вузов и специалистов по направлению вычислительной техники и информатики. представляет интерес для всех, знающих язык С и изучающих объектно-ориентированное программирование, а также для тех, кто, овладев языком С++, интересуется особенностями и отличиями программирования на языках С++/CLI, Java и С#.

27. Моисеев Г.В. Методы параллельных вычислений: учебное пособие. Казань: РЦ МКО, 2013. 117 с.

Приводятся принципы построения параллельных вычислительных систем, модели и методы анализа параллельных вычислений, методы оценки коммуникационной трудоемкости параллельных алгоритмов и принципы их разработки.

Предназначено для бакалавров техники и технологии по направлению 230100.62 – «Информатика и вычислительная техника».

28. Гимадеев Р.Г., Моисеев В.С., Арутюнова Н.К. Обратные задачи управления беспилотными летательными аппаратами артиллерийской разведки: монография. – Казань: РЦ МКО, 2013. – 245 с.

На основе результатов системного анализа предметной области определены требования, предъявляемые к беспилотным летательным аппаратам артиллерийской разведки, и разработана их классификация. Предложена структура и функции беспилотных авиационных комплексов ближней, средней и дальней артиллерийской разведки. Рассмотрены вопросы эксплуатации таких комплексов.

Предложены методы расчета характеристик областей обзора наземной поверхности средствами воздушной артиллерийской разведки – бортовыми оптико-электронными системами и радиолокационными станциями. Сформированы типовые траектории полетов беспилотных летательных аппаратов артиллерийской разведки.

Разработаны методы решения обратных задач управления динамическими системами при наличии ограничений на управления и для случаев, когда число управляющих воздействий больше числа фазовых координат объектов.

Эти методы предложено использовать совместно с типовыми траекториями полетов беспилотных летательных аппаратов артилле-

рийской разведки для формирования программного управления их реализацией.

Приведены примеры решения задач формирования управлений для поиска и обнаружения различных видов объектов артиллерийской разведки.

Монография рассчитана на широкий круг специалистов, связанных с разработкой и эксплуатацией беспилотных авиационных комплексов, а также на студентов (курсантов) и аспирантов (адъюнктов) соответствующих специальностей.

29. Моисеев В.С. Прикладная теория управления беспилотными летательными аппаратами: монография. – Казань: РЦ МКО, 2013. – 768 с.

Предлагаются определения и классификация существующих и перспективных образцов беспилотной авиационной техники. Рассматриваются основные вопросы организации ее применения. Формулируются базовые положения прикладной теории управления БЛА, ориентированной на ее использование персоналом беспилотных авиационных комплексов различного назначения. Приводятся краткие сведения по математическим основам этой теории и численным методам, применяемым при формировании программного управления БЛА. Предлагаются общие и частные модели управляемого движения БЛА самолетной и вертолетной конструктивных схем.

Для формирования управления БЛА используются методы теории обратных задач динамики управляемого движения, вариационного исчисления и оптимального управления.

Рассматриваются основные подходы к реализации перспективных задач интеллектуального управления БЛА.

Книга предназначена для специалистов по эксплуатации БЛА, разработчиков и испытателей БЛА, а также для студентов, курсантов, аспирантов и докторантов, специализирующихся по направлениям, связанным с управлением различными видами беспилотной авиационной техники.

30. Катасев А.С. Математическое и программное обеспечение формирования мягких экспертных систем диагностики состояния сложных объектов: монография. – Казань: РЦ МКО, 2013. – 200 с.

Рассмотрена проблема формирования баз знаний экспертных систем диагностики сложных объектов. Предложена технология автоматизированного формирования баз знаний на основе мягких вычислений. Разработано математическое и программное обеспечение, эффективность которого показана на примере решения ряда практических задач.

Монография предназначена для широкого круга научных и инженерно-технических работников, занимающихся вопросами формирования баз знаний мягких экспертных диагностических систем.

31. Моисеева Л.Т. Статистические методы в машиностроении: учебное пособие. – Казань: РЦ МКО, 2014. – 103 с.

Приводятся основные понятия классической теории вероятности и математической статистики, основные положения теории малой выборки статистических данных, статистические методы в проектировании, производстве и эксплуатации изделий машиностроения.

Предназначено для студентов технических специальностей.

32. Моисеев В.С. Дискретные линейные математические модели динамических процессов в банковских накоплениях, рыночной экономике, медицине, биологии, здравоохранении и технике: учебное пособие. – Казань: РЦ МКО, 2014. – 146 с.

Приводятся определение и современная классификация математических моделей процессов (объектов). Отмечается слабая распространенность на практике моделей дискретных динамических процессов. Дается краткая характеристика теории разностных уравнений как математического аппарата построения и использования таких моделей. Подробно рассматриваются свойства и методы решения разностных уравнений 1-го и 2-го порядков. Приводятся примеры их применения при моделировании разнообразных динамических процессов (объектов).

Предназначено для магистрантов и аспирантов соответствующих направлений подготовки и специальностей.

33. Моисеева Л.Т. Применение современных математических методов в технологии машиностроения: монография – Казань: РИЦ «Школа», 2014. – 216 с.

Предлагаются методы оптимизации геометрических параметров, режимов обработки, набора инструментов для обработки изделий машиностроения. Рассматривается двухкритериальная оптимизация механической обработки корпусного изделия. Предлагается применение метода условной оптимизации в технологических процессах. Используются статистические методы для уменьшения доли бракованных изделий в машиностроительном производстве. Используется метод решения задачи коммивояжера в технологии машиностроительных производств.

Книга предназначена для студентов, магистрантов, аспирантов и специалистов по технологии машиностроения.

34. Моисеева Л.Т. Microsoft Office 2007: учебное пособие для лабораторных работ по информатике. – Казань: РИЦ «Школа», 2014. – 66 с.

Приводятся основные отличительные особенности Microsoft Office 2007 в сравнении с Microsoft Office 2003 на примере Word 2007 и Excel 2007.

Предназначено для студентов технических специальностей.

35. Медведева С.В. Проектирование информационных технологий обучения в профессиональной математической подготовке в инженерном образовании: монография. – Казань: РИЦ «Школа». 2014. – 264 с.

Предлагаются методы проектирования компьютерных технологий обучения для математических дисциплин, основным содержанием которых являются математические методы, имеющие сложную логическую структуру. В основу этих методов полагается подход, использующий многократное применение инвариантов – дидактических, алгоритмических и программных этапов проектирования. Обсуждаются методики применения разработанных технологий обучения.

Книга предназначена для студентов, магистрантов, аспирантов и специалистов по разработке электронных обучающих ресурсов.

36. Моисеев В.С. Основы теории эффективного применения беспилотных летательных аппаратов: монография. – Казань: РИЦ «Школа», 2015. 444 с.

В книге с использованием системного подхода предлагаются основные положения теории эффективного применения БЛА различного назначения. Формулируются и решаются такие задачи теории как оптимизация потребного числа БЛА, организации процессов их эффективного применения, оптимизация основных режимов полетов БЛА, оптимальное размещение наземных компонентов беспилотных авиационных комплексов (БАК) и оптимизация процессов их перебазирования.

Заключительные главы посвящены задачам управления запасами расходуемых материалов БАК, расчетам числа запасных БЛА и вопросам информатизации процессов применения БЛА.

Представленные в работе задачи сопровождаются значительным числом примеров.

Книга предназначена для специалистов по эксплуатации БЛА, а также для студентов, аспирантов и докторантов соответствующих специальностей.

37. Медведев В.И. Особенности объектно-ориентированного программирования на C++/CLI, C# и Java. 5-е изд., испр. Казань: РИЦ «Школа», 2015. 472.

Излагаются основные понятия и методика разработки объектно-ориентированных программ на языках C++/CLI, C# и Java (J#) с применением пакетов языка Java и библиотеки .NET Framework языков C++/CLI, C#. Изложение сопровождается многочисленными примерами законченных программ. Программы поясняются диаграммами языка UML. Используются среды разработки программ Visual Studio .NET и Eclipse. Особое внимание акцентировано на наиболее сложных для понимания делегатах, событиях, уведомлениях, потоках и их синхронизации, преобразовании данных. Параллельное изложение схожих основных языковых конструкций позволит выявить не только близость и различие языков C++/CLI, C# и Java, но и лучше понять особенности этих языков. В конце книги разрабатывается многообъектная программа, содержащая абстрактный класс, множество пото-

ков, событий и уведомлений, наглядно иллюстрирующих особенности написания программ на языках C++/CLI, C# и Java.

Для студентов и преподавателей вузов и специалистов по направлению вычислительной техники и информатики.

38. Аникин И.В. Методы оценки и управления рисками информационной безопасности в корпоративных информационных сетях: монография. – РИЦ «Школа», 2015. – 224 с.

Рассмотрена проблема оценки и управления рисками информационной безопасности в корпоративных информационных сетях. Предложены методы решения соответствующих задач на основе экспертных оценок и методов теории нечетких множеств. Рассмотрены примеры решения данных задач.

Монография предназначена для широкого круга научных и инженерно-технических работников, занимающихся вопросами информационной безопасности.

39. Моисеева Л.Т. Математическое моделирование и оптимизация: Лабораторный практикум. Часть 1. РИЦ «Школа», 2015. 36 с.

Приводятся основные методы и средства программирования в пакете MathCad. Все объяснения сопровождаются примерами и заданиями для самостоятельного выполнения.

Предназначено для студентов технических специальностей.

40. Моисеева Л.Т., Полянкина З.Ш. Математическое и компьютерное моделирование динамики банковских накоплений: монография. – Казань: РИЦ «Школа». 2016. – 248 с.

Книга содержит обзор существующих методов расчета банковских накоплений и оригинальные математические модели описания динамики размера вклада при различных условиях накопления средств.

Предложен диалоговый программный комплекс моделирования, ориентированный на широкие круги населения. Применение этого комплекса позволит проанализировать различные варианты накоплений и сделать правильный выбор в пользу конкретного вклада и банка.

41. Моисеев В.С. Групповое применение беспилотных летательных аппаратов: монография. – Казань: Редакционно-издательский центр «Школа», 2017. 572 с.

Монография посвящена комплексному решению актуальной и перспективной организационно-технической проблемы группового применения беспилотных летательных аппаратов (БЛА) при решении широкого круга военных и гражданских задач.

В рамках решения этой проблемы приводятся постановки и методы решения следующих основных задач: организация беспилотных подразделений различного назначения; определение потребной численности БЛА в группировке при проведении различных операций; расчеты требуемого количества операторов управления БЛА при их групповом применении; задачи логистики беспилотных подразделений при эксплуатации группировки БЛА в полевых условиях; организация и выполнение групповых полетов БЛА; формирование управления БЛА при их групповых полетах.

Представленные в работе задачи сопровождаются значительным числом примеров с расчетным и графическим материалом.

Книга предназначена для специалистов по эксплуатации БЛА, а также для студентов, аспирантов, адъюнктов и докторантов соответствующих специальностей.

42. Моисеева Л.Т., Белобородова Н.В. Оптимизация фрезерных операций при ремонте лопаток газотурбинных двигателей: монография. – Казань: Редакционно-издательский центр «Школа», 2017. 144 с.

В книге приведены особенности технологического процесса механической обработки лопаток компрессора газотурбинных двигателей. Предложены математические модели и методы оптимизации технологического процесса фрезерования ремонтируемых лопаток. Применение оптимальных режимов позволит снизить время ремонта лопаток в полтора раза.

Книга предназначена для студентов, магистрантов, аспирантов и специалистов по технологии машиностроения.

43. Моисеев В.С. Динамика полета и управление беспилотными летательными аппаратами. – Казань: Редакционно-издательский центр «Школа», 2017. 416 с.

Монография посвящена решению актуальной проблемы программирования полетов БЛА при их применении для решения широкого круга военных и гражданских задач.

В рамках решения этой проблемы приводятся классификация современных БЛА, упрощенные уравнения движения при их старте, полете и посадке, методы формирования требуемых траекторий движения БЛА, а также методы синтеза инвариантного относительно конструктивных схем БЛА и прямого управления для БЛА классической самолетной схемы.

Представленные в работе модели и методы сопровождаются значительным числом примеров с расчетным и графическим материалом.

Книга предназначена для специалистов по управлению БЛА, а также для студентов, аспирантов и докторантов соответствующих специальностей.

44. Моисеев В.С. Лекции по математическому моделированию в прикладной информатике: научно-учебное издание. – Казань: Редакционно-издательский центр «Школа», 2018. 307 с.

В книге приводится генезис информатики, ее связь с кибернетикой и развитием средств вычислительной техники. Дается современная классификация математических моделей, применяемых в науке, технике и экономике. Рассмотрен существующий и перспективный математический аппарат, который предлагается использовать в моделях информационных систем, технологий и в задачах защиты информации. Приведено значительное число математических моделей прикладной информатики.

Книга предназначена для магистрантов, аспирантов, докторантов, занимающихся исследованиями и разработками в области прикладной информатики. Материал лекций может быть полезен преподавателям ВУЗов при подготовке соответствующих лекций, лабораторных практикумов и выборе тем курсовых и выпускных квалификационных работ.

45. Моисеев В.С., Моисеева Л.Т. Некоторые неклассические задачи вычислительной математики: монография. – Казань: Редакционно-издательский центр «Школа», 2020. 177 с.

Монография посвящена задачам вычислительной математики, численные методы решения которых отсутствуют в существующей литературе. К таким неклассическим задачам в данной работе отнесены методы решения нелинейных уравнений, содержащих интегралы с искомым параметром; методы формирования, исследования и применения неявно заданных функций одной переменной; методы решения нелинейных параметрических уравнений и систем уравнений; методы решения дифференциальных уравнений с разрывной правой частью по используемому аргументу.

Книга предназначена для специалистов в области разработки численных методов, а также магистрантов, аспирантов и докторантов, осуществляющих с использованием методов вычислительной математики решение разнообразных прикладных задач.

Авторами опубликованных в серии «Современная прикладная математика и информатика» монографий и учебников являются сотрудники кафедр «Прикладная математика и информатика», «Автоматизированные системы обработки информации и управления», «Компьютерные системы» Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева (КНИТУ-КАИ), преподаватели бывшего Казанского высшего военного командного артиллерийского училища, ученые Института проблем информатики АН РТ, специалисты ОАО ICL-КПОВС и ОАО НПО им. А.М. Симонина (бывшее ОКБ «Сокол»).

Многие из полученных научных и прикладных результатов внедрены в практику работы предприятий и организаций г. Казани и получили положительные оценки военных специалистов, ученых и IT-специалистов РФ. Материалы, опубликованных монографий активно использовались в учебном процессе и научной работе студентами, аспирантами и докторантами КНИТУ-КАИ и других вузов г. Казани.

*Заслуженный деятель науки и техники РТ,
доктор технических наук, профессор В.С. Моисеев*

ВВЕДЕНИЕ

Вычислительная математика (методы вычислений, численные методы), которая является обязательным средством для решения сложных задач науки и техники, имеет к настоящему времени значительное развитие. При этом можно констатировать, что в этом разделе математики повсеместно излагаются методы и алгоритмы решения классических (традиционных, стандартных) задач, составляющих ее основу.

Вместе с тем, применение прикладной математики в различных сферах деятельности современного общества ставит перед вычислительной математикой задачи, которые не укладываются в традиционные алгоритмы и для которых в ней отсутствуют четкие рекомендации по их решению.

В предлагаемой работе приводятся методы решения некоторых задач, которые возникли при разработке теоретических вопросов создания и применения беспилотной авиационной техники.

Авторы отдают себе отчет в том, что эти методы являются результатом первого (предварительного) этапа постановки и исследования сформулированных неклассических задач вычислительной математики и надеются, что эти исследования продолжат специалисты из этой предметной области.

На сайте **Моисеев-БПЛА.РФ** можно ознакомиться и скачать текст этой и некоторых других книг серии «Современная прикладная математика и информатика».

Глава 1. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ИНТЕГРАЛ, ЗАВИСЯЩИЙ ОТ ПАРАМЕТРА

Численные методы решения нелинейных уравнений являются одним из основных разделов вычислительной математики. Различные методы решения таких уравнений общего вида изложены в значительном числе классических работ [1-5 и др.].

Анализ показал, что в существующей научной и учебной литературе отсутствуют методы решения нелинейных уравнений, содержащих собственные (определенные) интегралы, в которых искомое значение корня входит как параметр.

В данной главе предлагается достаточно простой численный метод решения нелинейных уравнений, учитывающих свойства таких интегралов.

1.1. Собственные интегралы с параметром

Рассмотрим функцию $\varphi(w, x)$ двух переменных, определенную для всех значений w в некотором интервале $[a, b]$ и всех значений x , принадлежащих множеству X . В качестве такого множества обычно используется интервал $[c, d]$.

Будем считать, что при каждом значении $x \in X$ функция $\varphi(w, x)$ будет интегрируема на отрезке $[a, b]$ в собственном или несобственном смысле [6].

Тогда интеграл:

$$J(x) = \int_a^b \varphi(w, x) dw \quad (1.1.1)$$

будет функцией от параметра x .

Отметим, что в общем случае пределы интегрирования в этом выражении являются функциями:

$$a = \alpha(x); \quad b = \beta(x). \quad (1.1.2)$$

При изучении свойств этой функции решаются следующие вопросы [6]:

1. Существование и непрерывность функции $J(x)$;
2. Условия равномерной сходимости интеграла (1.1.1) к предельной функции $p(w)$ при $x \rightarrow x_0$.
3. Дифференцируемость функции $J(x)$ и вид ее производной по параметру x .
4. Интегрируемость функции $J(x)$ по параметру x в области X .

Все эти свойства устанавливаются и подробно доказываются в форме соответствующих теорем и следствий в работе [6].

Первые два свойства позволяют вычислять предельные значения вида:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} J(x) = \int_a^b \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(w, x) dw = \int_a^b \varphi(w, x_0) dw; \quad (1.1.3)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_a^b \varphi(w, x) dw = \int_a^b p(w) dw. \quad (1.1.4)$$

Применение указанных выше свойств позволяет упростить вычисление определенных интегралов с параметром и классических интегралов.

Пример 1.1.

Имеем, что:

$$J(x) = \int_0^1 \frac{dw}{1 + w^2 + x^2}.$$

Пусть требуется вычислить его значение [7]:

$$J(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{dw}{1 + w^2 + x^2}.$$

Тогда вследствие выражения (1.1.3) получим:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} J(x) &= \int_0^1 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+w^2+x^2} dw = \\ &= \int_0^1 \frac{dw}{1+w^2} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Свойство 3 конкретизируется теоремой Лейбница [6, 7].

Пусть функция $\varphi(w, x)$ определена и непрерывна в прямоугольной области $[a, b] \times [c, d]$. В этой области существует и является непрерывной частная производная:

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi(w, x) = \varphi'_x(w, x). \quad (1.1.5)$$

Тогда на отрезке $[c, d]$ существует непрерывная производная:

$$J'(x) = \int_a^b \varphi'_x(w, x) dw. \quad (1.1.6)$$

Таким образом, при дифференцировании интеграла (1.1.1) при $a = \text{const}$ и $b = \text{const}$ необходимо в его подынтегральную функцию подставить производную (1.1.5).

Пример 1.2.

С помощью операции дифференцирования по параметру интеграла:

$$J(x) = \int_0^1 \frac{dw}{w^2 + x^2} \quad (1.1.7)$$

вычислить интеграл [7]:

$$I(x) = \int_0^1 \frac{dw}{(w^2 + x^2)^2}. \quad (1.1.8)$$

Так как $\varphi(w, x) = 1/(w^2 + x^2)$, то выражение (1.1.5) примет вид:

$$\varphi'_x(x) = -\frac{2x}{(w^2 + x^2)^2}.$$

Интеграл (1.1.7) по соответствующим правилам его вычисления определяется как:

$$J(x) = \frac{1}{x} \operatorname{arctg}\left(\frac{w}{x}\right) \Big|_0^1 = \frac{1}{x} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Производная от этого выражения имеет вид:

$$J'(x) = -\frac{x + (1 + x^2) \operatorname{arctg}(1/x)}{x^2(1 + x^2)}.$$

Тогда интеграл (1.1.8) вычисляется как:

$$\begin{aligned} I(x) &= -\frac{1}{2x} \int_0^1 \left(\frac{1}{w^2 + x^2} \right)'_x dw = -\frac{J'(x)}{2x} = \\ &= \frac{x + (1 + x^2) \operatorname{arctg}(1/x)}{2x^3(1 + x^2)}. \end{aligned}$$

Интегрирование выражения (1.1.1) по параметру осуществляется путем перестановки порядка интегрирования в повторных интегралах [6, 7] следующим образом:

$$\int_c^d dx \int_a^b \varphi(w, x) dw = \int_c^d J(x) dx = \int_a^b dw \int_c^d \varphi(w, x) dx. \quad (1.1.9)$$

Пример 1.3.

Требуется вычислить интеграл [7]:

$$I = \int_0^1 \frac{w^d - w^c}{\ln w} dw. \quad (1.1.10)$$

Рассмотрим функцию:

$$\varphi(w, x) = w^x,$$

которая непрерывна в области $[0, 1] \times [c, d]$.

Тогда, используя соотношения (1.1.9), имеем:

$$\int_c^d dx \int_0^1 w^x dx = \int_0^1 dw \int_c^d w^x dx.$$

Известно, что:

$$\int_0^1 w^x dw = \frac{1}{1+x}.$$

Поэтому:

$$\int_c^d dx \int_0^1 w^x dx = \int_c^d \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) \Big|_c^d = \ln \frac{1+d}{1+c}.$$

Отсюда искомый интеграл (1.1.10) будет равен:

$$I = \ln \frac{1+d}{1+c}.$$

Рассмотрим общий случай интеграла (1.1.1), когда его пределы описываются функциями (1.1.2):

$$J(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \varphi(w, x) dx. \quad (1.1.11)$$

Отметим, что функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются непрерывными и дифференцируемыми в интервале $[c, d]$.

Тогда $J(x)$ непрерывна в этом интервале и имеет место предельный переход:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \varphi(w, x) dw = \int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x_0)} \varphi(w, x_0) dw = J(x_0). \quad (1.1.12)$$

Пример 1.4.

Вычислить предельное значение при $x \rightarrow 0$ следующего интеграла [7]:

$$J(x) = \int_x^{1+x} \sqrt{w^2 + x^2} dw.$$

Используя выражение (1.1.12), имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{1+x} \sqrt{w^2 + x^2} dw = \int_0^1 \sqrt{w^2} dw = \int_0^1 w dw = 1 = J(0).$$

Производная от интеграла (1.1.11) записывается как [6]:

$$J'(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \varphi'_x(w, x) dw + \beta'(x)\varphi(\beta(x), x) - \alpha'(x)\varphi(\alpha(x), x). \quad (1.1.13)$$

В приложениях часто рассматривается интеграл с переменным верхним или нижним пределами [6] вида:

$$J_1(x) = \int_a^x \varphi(w, x) dw; \quad J_2(x) = \int_x^b \varphi(w, x) dw. \quad (1.1.14)$$

Согласно выражению (1.1.13), производная от интегралов (1.1.14) определяется как:

$$J'_1(x) = \varphi(x, x); \quad J'_2(x) = -\varphi(x, x). \quad (1.1.15)$$

Пример 1.5.

Найти производную $J'(x)$ от интеграла [7]:

$$J(x) = \int_x^{1+x} \sqrt{w^2 + x^2} dx.$$

В связи с тем, что:

$$\varphi'_x(w, x) = \frac{x}{\sqrt{w^2 + x^2}};$$

$$\alpha(x) = x; \quad \beta(x) = 1 + x; \quad \alpha'(x) = \beta'(x) = 1,$$

с использованием формулы (1.1.13) имеем:

$$J'(x) = \int_x^{1+x} \frac{x}{\sqrt{w^2 + x^2}} dw + 1 \cdot \sqrt{(1+x)^2 + x^2} - 1 \cdot \sqrt{x^2 + x^2}.$$

Заметим, что в работе [7] рассматриваются отмеченные выше свойства и примеры несобственных интегралов 1-го и 2-го рода с параметром.

1.2. Описание метода

В общем случае нелинейное уравнение, включающее в себя определенный интеграл, зависящий от неизвестного параметра x , имеет вид [9]:

$$\psi(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \varphi(x, w) dw = 0, \quad (1.2.1)$$

где $\psi(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\varphi(x, w)$ – заданные непрерывные функции своих аргументов.

Уравнение (1.2.1) характерно тем, что включает в себя искомым параметр x , входящий во внеинтегральное слагаемое, пределы интегрирования и подынтегральную функцию.

Рассмотрим частные случаи уравнения вида (1.2.1).

Будем считать, что в рассматриваемых случаях функция $\psi(x) = -A = \text{const}$, а подынтегральная функция φ не зависит от параметра x . Пределы интегрирования $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ в каждом из этих случаев равняются x и заданным константам, что превращает второе слагаемое в уравнении (1.2.1) в определенные интегралы с переменным нижним или верхним пределами интегрирования вида (1.1.14).

Таким образом, в этих случаях решаемые уравнения записываются как:

$$\int_a^x f(w) dw - A = 0; \quad (1.2.2)$$

$$\int_x^b f(w) dw - A = 0, \quad (1.2.3)$$

где a , b и A – заданные постоянные.

Если использовать геометрический смысл определенного интеграла [8], то решение этих уравнений позволяет опреде-

литель значение x , при котором площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $f(w)$ будет равна заданной величине A . Этот факт иллюстрирует Рис. 1.1.

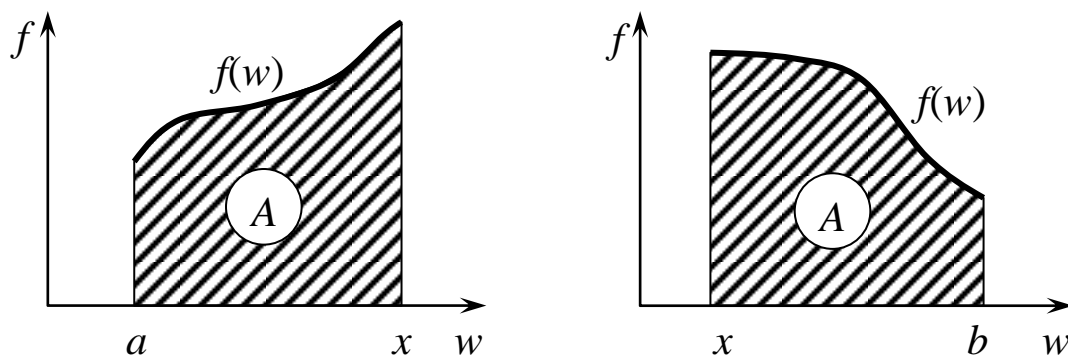


Рис. 1.1

Приложения к задачам физики, механики и техники уравнений вида (1.2.2) и (1.2.3) при использовании в соответствующих формулах переменных пределов интегрирования могут быть получены с использованием материала, изложенного в работах [6, 8].

Рассмотрим методы решения уравнения (1.2.2).

При возможности вычисления входящего в него интеграла в квадратурах, то есть получения первообразной функции $F(x)$, применяя известную формулу Ньютона-Лейбница [8], получаем нелинейное уравнение вида:

$$F(x) = F(a) + A,$$

которое в общем случае решается известными численными методами [1-5].

Проиллюстрируем применение полученной формулы на следующем примере.

Пример 1.6.

Пусть в уравнении (1.2.2) функция $f(w)$ имеет вид:

$$f(w) = w,$$

и его параметры a и A принимают следующие значения:

$$a = 1; \quad A = 16.$$

Вычисляя неопределенный интеграл от функции $f(w)$, имеем:

$$F(w) = \frac{w^2}{2}.$$

В этом случае приведенное выше уравнение конкретизируется как:

$$\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} + 16.$$

Решая это уравнение, получаем следующие значения его корней:

$$x_1^* = -\sqrt{33} = -5,745; \quad x_2^* = +\sqrt{33} = +5,745.$$

При невозможности получения функции $F(x)$ в явной форме для нахождения корней уравнения (1.2.2) необходимо использовать специальный численный метод.

Известно, что достаточно быструю сходимость к искомому корню нелинейного уравнения:

$$\Phi(x) = 0 \tag{1.2.4}$$

дает использование метода Ньютона, вычислительная схема которого имеет вид [5]:

$$x_j = x_{j-1} - \frac{\Phi(x_{j-1})}{\Phi'(x_{j-1})}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \tag{1.2.5}$$

При задании начального приближения x_0 искомого корня вычисления по рекуррентной формуле (1.2.5) продолжаются до значения $j = N$, при котором выполняется условие:

$$|x_N - x_{N-1}| \leq \varepsilon, \tag{1.2.6}$$

где ε – требуемая точность вычисления корня уравнения (4).

При выполнении этого неравенства в качестве значения x^* искомого корня выбирается значение x_N .

При решении уравнения (1.2.2) функция Φ будет иметь вид:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(w)dw - A. \quad (1.2.7)$$

Используя выражение (1.1.15), получим:

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \left[\int_a^x f(w)dw - A \right] = f(x). \quad (1.2.8)$$

Подставляя выражения (1.2.7) и (1.2.8) в формулу (1.2.5), имеем:

$$x_j = x_{j-1} - \frac{1}{f(x_{j-1})} \left[\int_a^{x_{j-1}} f(w)dw - A \right], \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (1.2.9)$$

Для вычисления на каждом j -м шаге входящего в эту формулу значения интеграла необходимо использовать один из известных численных методов [1, 5, 6]. Для его применения необходимо на интервале интегрирования $[a, x_j]$ построить сетку n значений переменной w :

$$a = w_0 < w_1 < \dots < w_k < \dots < w_n = x_j \quad (1.2.10)$$

с шагом:

$$h_j = \frac{x_j - a}{n}, \quad (1.2.11)$$

где n – достаточно большое число.

Узлы этой сетки с учетом выражения (1.2.11) определяются по формуле вида:

$$w_k = a + kh_j, \quad k = (\overline{0, n}). \quad (1.2.12)$$

Значения подынтегральной функции в выражении (1.2.9) в этих точках вычисляются как:

$$f_k = f(w_k) = f(a + kh_j), \quad k = (\overline{0, n}). \quad (1.2.13)$$

Применяя наиболее простой в реализации численный метод прямоугольников из указанных выше работ, графическая реализация которого приведена на Рис. 1.2, имеем:

$$\int_a^x f(w)dw = h_j \sum_{k=0}^{n-1} f(a + kh_j).$$

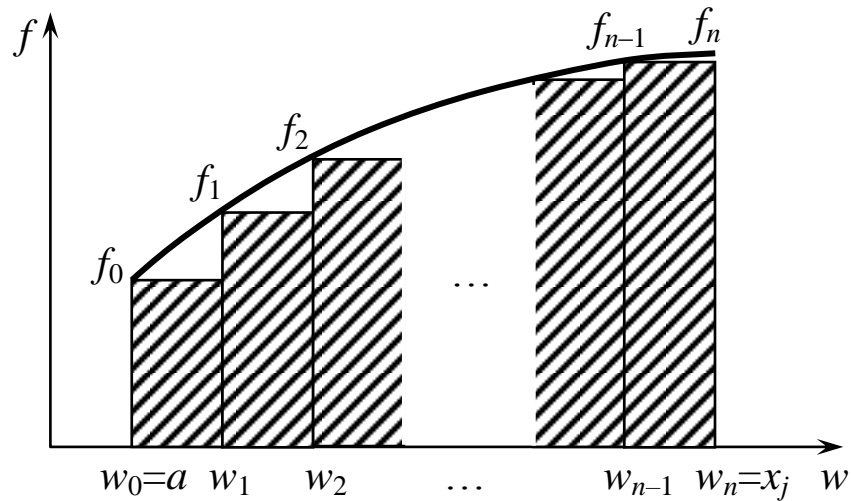


Рис. 1.2

Используя в этой формуле выражение (1.2.11), получаем следующее соотношение:

$$\int_a^{x_j} f(w)dw \cong \frac{x_j - a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(x_j - a)\right). \quad (1.2.14)$$

Тогда расчетная схема вида (1.2.9) для решения уравнения (1.2.2) с использованием выражения (1.2.12) принимает следующий окончательный вид:

$$x_j = x_{j-1} - \frac{1}{f(x_{j-1})} \left[\frac{x_{j-1} - a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(x_{j-1} - a)\right) - A \right], \quad (1.2.15)$$

$$j = 1, 2, 3, \dots$$

Пример 1.7.

Решим уравнение вида (1.2.2) предложенным выше численным методом с точностью $\varepsilon = 0,001$ при исходных данных из Примера 1.6.

Расчетная схема вида (1.2.15) конкретизируется как:

$$x_j = x_{j-1} - \frac{1}{x_{j-1}} \left[\frac{x_{j-1} - 1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}(x_{j-1} - 1)\right) - 16 \right], \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Результаты расчета с использованием этого выражения при начальном приближении $x_0 = 1$ представлены в Табл. 1.1.

Таблица 1.1

j	0	1	2	3	4	5	6
x_j	1,0000	17,0000	9,4723	6,4796	5,7875	5,7451	5,7449
$ x_j - x_{j-1} $	—	16,0000	7,5277	2,9927	0,6921	0,0424	0,0002

Из данных этой таблицы, полученных при $n = 5000$, следует, что требуемая точность вычислений ε достигается на шестой итерации. В этом случае в качестве корня выбирается значение $x_6 = 5,7449$.

Для начального приближения $x_0 = -1$ при том же числе итераций получаем второе значение корня $x_6 = -5,7451$.

Сравнение полученных результатов с результатами Примера 1.6 указывает на их совпадение с точностью до трех значащих цифр.

Отметим, что для более точного метода трапеций [5, 6, 8] приближенное представление интеграла в выражении (1.2.9) записывается как:

$$\int_a^{x_j} f(w)dw \cong \frac{x_j - a}{n} \left[f(a) + f(x_j) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(x_j - a)\right) \right].$$

При решении уравнения вида (1.2.3) в его представлении в форме выражения (1.2.4) функция Φ будет иметь следующий вид:

$$\Phi(x) = \int_x^b f(w)dw - A. \quad (1.2.16)$$

Производная от этого выражения, включающего интеграл с переменным нижним пределом, будет равна [6]:

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_x^b f(w)dw - A \right) = -f(x).$$

Тогда расчетная схема (1.2.5) примет следующий вид:

$$x_j = x_{j-1} + \frac{\Phi(x_{j-1})}{f(x_{j-1})}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (1.2.17)$$

где $\Phi(x_j)$ согласно выражению (1.2.16) вычисляется как:

$$\Phi(x_j) = \int_{x_j}^b f(w)dw - A. \quad (1.2.18)$$

Для вычисления этого интеграла введем по аналогии с выражениями (1.2.10) и (1.2.11) на интервале $[x_j, b]$ сетку значений:

$$x_j = w_0 < w_1 < \dots < w_k < \dots < w_n = b$$

с шагом

$$h_j = \frac{b - x_j}{n}. \quad (1.2.19)$$

Значения переменной w на этой сетке будем определять по формуле:

$$w_k = x_j + kh_j, \quad k = (\overline{0, n}). \quad (1.2.20)$$

Тогда значения подынтегральной функции в выражении (1.2.18) на введенной выше сетке с использованием формулы (1.2.20) вычисляются как:

$$f_k = f(w_k) = f\left(x_j + \frac{k}{n}(b - x_j)\right), \quad k = (\overline{0, n}).$$

Применяя описанный выше метод прямоугольников, выражение (1.2.18) представляется соотношением вида:

$$\Phi(x_j) = \frac{b - x_j}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_j + \frac{k}{n}(b - x_j)\right) - A. \quad (1.2.21)$$

Используя это выражение, получаем окончательную расчетную схему для решения уравнения вида (1.2.3):

$$x_j = x_{j-1} - \frac{1}{f(x_{j-1})} \left[\frac{b - x_{j-1}}{n} \times \right. \\ \left. \times \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_{j-1} + \frac{k}{n}(b - x_{j-1})\right) - A \right], \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (1.2.22)$$

При решении уравнений вида (1.2.3) с использованием расчетной схемы (1.2.22) выбирается начальное приближение x_0 искомого корня, требуемая точность его вычислений ε и значение n . Далее на каждом шаге итерационного процесса контролируется выполнение условия вида (1.2.6). При его выполнении процесс поиска решения уравнения (1.2.3) останавливается и за его значение принимается результат последней выполненной итерации.

Пример 1.8.

Рассмотрим одно из приложений уравнения вида (1.2.3).

Пусть имеется кривая, которая описывается выражением:

$$y(w) = 0,2w^2 + 3w + 1$$

с заданной длиной $A = 25$.

Известна ее правая граничная точка с координатами $b = 10$. Требуется определить координату x левой граничной точки кривой $y(w)$ так, чтобы ее длина равнялась заданной величине A .

При решении этой задачи будем использовать известную формулу для вычисления длины непрерывной кривой [8]:

$$L = \int_{w_1}^{w_2} \sqrt{1 + y'^2(w)} dw.$$

Тогда при $y'(w) = 0,4w + 3$ уравнение вида (1.2.3) конкретизируется как:

$$\int_x^{10} \sqrt{1 + (0,4w + 3)^2} dw - 25 = 0.$$

Здесь: $f(w) = \sqrt{1 + (0,4w + 3)^2}$.

Для решения этого уравнения с точностью $\varepsilon = 0,0001$ будем использовать вычислительную схему вида (1.2.22), упрощенную с учетом приведенных выше соотношений:

$$x_j = x_{j-1} + \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2(x_{j-1})}} \left[\frac{10 - x_{j-1}}{n} \times \right. \\ \left. \times \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + y'^2 \left(x_{j-1} + \frac{k}{n} (10 - x_{j-1}) \right)} - 25 \right], \\ j = 1, 2, 3, \dots$$

Результаты применения этого рекуррентного выражения при $x_0 = 0$ и $n = 1000$ имеют вид:

$$x_1 = 8,2300; \quad x_2 = 6,1734; \quad x_3 = 6,0234; \\ x_4 = 6,0228; \quad x_5 = 6,0222; \quad x_6 = 6,0221.$$

Из анализа на каждой итерации условия вида (1.2.6) следует, что искомый корень будет равен:

$$x^* = x_6 = 6,0221.$$

Процесс сходимости к этому значению иллюстрирует Рис. 1.3.

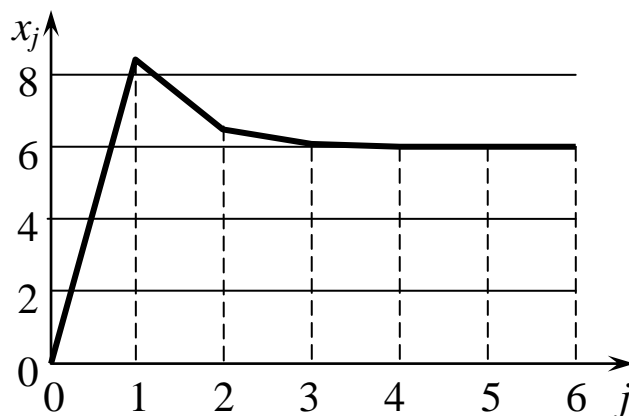


Рис. 1.3

Отметим, что нелинейные уравнения вида (1.2.2) и (1.2.3) могут иметь несколько корней. Поэтому при их решении не-

обходимо в обязательном порядке задавать несколько различных значений начального приближения x_0 .

Рассмотрим уравнение вида:

$$\int_a^x f_1(w)dw - \int_x^b f_2(w)dw - A = 0. \quad (1.2.23)$$

Введем следующие обозначения:

$$\Phi_1(x) = \int_a^x f_1(w)dw; \quad \Phi_2(x) = \int_x^b f_2(w)dw.$$

Тогда уравнение (1.2.23) примет вид:

$$\Phi_1(x) - \Phi_2(x) - A = 0.$$

Обозначим левую часть этого уравнения через $\Psi(x)$:

$$\Psi(x) = \Phi_1(x) - \Phi_2(x) - A.$$

Схема метода Ньютона для уравнения $\Psi(x) = 0$ записывается как:

$$x_j = x_{j-1} - \frac{\Psi(x_{j-1})}{\Psi'(x_{j-1})}, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Из выражений (1.2.14), (1.2.21) и (1.2.15) следует, что:

$$\begin{aligned} \Psi(x_{j-1}) &= \Phi_1(x_{j-1}) - \Phi_2(x_{j-1}) - A = \\ &= \frac{x_{j-1} - a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_1\left(a + \frac{k}{n}(x_j - a)\right) - \\ &\quad - \frac{b - x_{j-1}}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_2\left(x_{j-1} + \frac{k}{n}(b - x_j)\right) - A; \end{aligned}$$

$$\Psi'(x_{j-1}) = \Phi_1'(x_{j-1}) - \Phi_2'(x_{j-1}) = f_1(x_{j-1}) + f_2(x_{j-1}).$$

Тогда расчетная схема решения уравнения (1.2.23) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
x_j = & x_{j-1} - \frac{1}{f_1(x_{j-1}) + f_2(x_{j-1})} \times \\
& \times \left[\frac{x_{j-1} - a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_1 \left(a + \frac{k}{n} (x_j - a) \right) - \right. \\
& \left. - \frac{b - x_{j-1}}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_2 \left(x_{j-1} + \frac{k}{n} (b - x_j) \right) - A \right];
\end{aligned} \tag{1.2.24}$$

Примером задачи, в которой необходимо решать уравнение (1.2.23) при $f_1(w) = f_2(w) = f(w)$, $A = 0$, является задача дихотомии площади криволинейной трапеции, построенной с помощью кривой $f(w)$ на интервале значений $w \in [a, b]$ (Рис. 1.4).

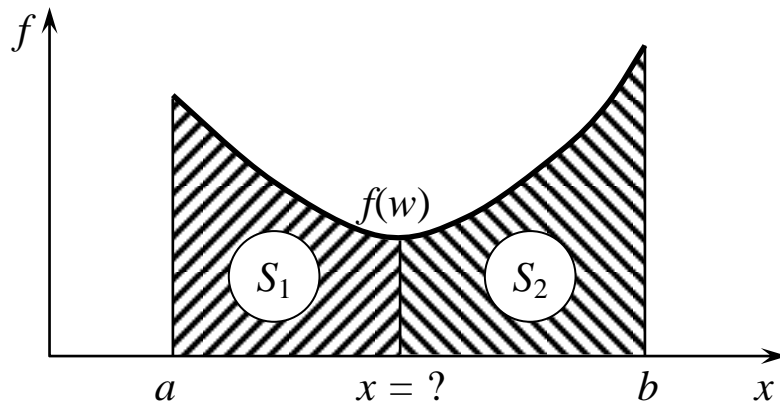


Рис. 1.4

На этом рисунке через S_1 и S_2 обозначены площади частей трапеции, которые должны удовлетворять условию:

$$S_1(x) = S_2(x),$$

где:

$$S_1(x) = \int_a^x f(w)dw; \quad S_2(x) = \int_x^b f(w)dw.$$

Пример 1.9.

Решим уравнение (1.2.23) для задачи, представленной на Рис. 1.4 при следующих исходных данных:

$$f(w) = 1 + w; \quad a = 0; \quad b = 4; \quad A = 0.$$

С учетом этих данных решаемое уравнение примет вид:

$$\int_0^x (1+w)dw - \int_x^4 (1+w)dw = 0.$$

Получим аналитическое решение этого уравнения.

Проводя интегрирование, имеем:

$$\frac{(1+w)^2}{2} \Big|_0^x - \frac{(1+w)^2}{2} \Big|_x^4 = 0.$$

Проводя несложные преобразования, получаем уравнение вида:

$$(1+x)^2 = 13,$$

откуда значение искомого корня будет равно:

$$x^0 = 2,6056.$$

Расчетная схема (1.2.24) численного решения рассматриваемого уравнения конкретизируется как:

$$x_j = x_{j-1} - \frac{1}{2(1+x_{j-1})} \left[\frac{x_{j-1}}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n} x_{j-1} \right) - \frac{(4-x_{j-1})}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + x_{j-1} + \frac{k}{n} (4-x_{j-1}) \right) \right], \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Итерационный процесс ее применения для параметров:

$$x_0 = 1; \quad n = 5000; \quad \varepsilon = 0,0001$$

дает результаты, приведенные в Табл. 1.2 и на Рис. 1.5.

Таблица 1.2

x_j	$x_j - x_{j-1}$
3,249800	2,25
2,654501	-0,595
2,605951	-0,049
2,605619	$-3,322 \cdot 10^{-4}$
2,605618	$-5,216 \cdot 10^{-8}$

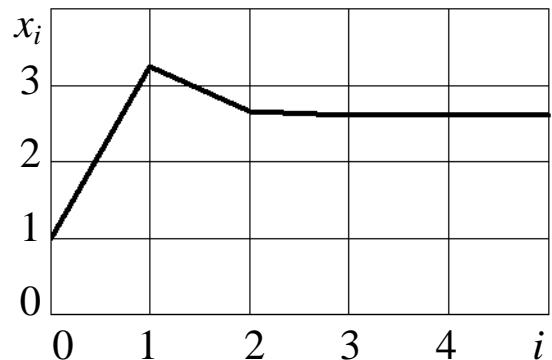


Рис. 1.5

Из них следует, что точность ε вычисления корня достигается на 5-м шаге процесса.

Таким образом, искомое значение корня, полученное предлагаем численным методом, будет равно:

$$x^* = 2,605618.$$

Расчетная схема решения общего уравнения (1.2.1) методом Ньютона имеет вид выражения (1.2.5), где:

$$\Phi(x_j) = \psi(x_j) + \int_{\alpha(x_j)}^{\beta(x_j)} \varphi(x_j, w) dw; \quad (1.2.25)$$

$$\begin{aligned} \Phi'(x_j) = \psi'(x_j) + \int_{\alpha(x_j)}^{\beta(x_j)} \varphi'_w(x_j, w) dw + \\ + \beta'(x_j) \varphi(x_j, \beta(x_j)) - \alpha'(x_j) \varphi(x_j, \alpha(x_j)). \end{aligned} \quad (1.2.26)$$

Формула (1.2.26) получена с использованием выражения (1.1.13).

В этой формуле $\varphi'_w(x, w)$ обозначена частная производная подынтегральной функции $\varphi(x, w)$ по переменной w .

Сформируем расчетные формулы для вычисления методом прямоугольников интегралов, входящих в выражения (1.2.25) и (1.2.26).

Введем для них следующие обозначения:

$$\begin{aligned} J_1(x_j) = \int_{\alpha(x_j)}^{\beta(x_j)} \varphi(x_j, w) dw; \\ J_2(x_j) = \int_{\alpha(x_j)}^{\beta(x_j)} \varphi'_w(x_j, w) dw. \end{aligned} \quad (1.2.27)$$

Для повышения точности их вычислений, как и выше, зададимся достаточно большим значением числа n в сетке значений переменной интегрирования w :

$$\alpha(x_j) = w_0 < w_1 < \dots < w_k < \dots < w_n = \beta(x_j).$$

Каждое значение этой сетки формируется по формуле:

$$w_k = \alpha(x_j) + kh_j, \quad k = (\overline{0, n}) \quad (1.2.28)$$

с шагом h_j , который вычисляется при фиксированном значении x_j следующим образом:

$$h_j = \frac{\beta(x_j) - \alpha(x_j)}{n}, \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.2.29)$$

С использованием двух последних соотношений формулы для приближенного вычисления интегралов (1.2.27) могут быть представлены выражениями вида:

$$\begin{aligned} J_1(x_j) &= \frac{\beta(x_j) - \alpha(x_j)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \left(x_j; \alpha(x_j) + \frac{k}{n} (\beta(x_j) - \alpha(x_j)) \right); \\ J_2(x_j) &= \frac{\beta(x_j) - \alpha(x_j)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi' \left(x_j; \alpha(x_j) + \frac{k}{n} (\beta(x_j) - \alpha(x_j)) \right). \end{aligned} \quad (1.2.30)$$

Заметим, что формулы (1.2.11) и (1.2.19) являются частными случаями выражения (1.2.29) при $\alpha(x) = a$, $\beta(x) = x$ и $\alpha(x) = x$, $\beta(x) = b$.

С использованием соотношений (1.2.25), (1.2.26), (1.2.30) расчетная схема (1.2.5) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} x_j &= x_{j-1} - \\ & - \frac{\psi(x_{j-1}) + J_1(x_{j-1})}{\psi'(x_{j-1}) + J_2(x_{j-1}) + \beta'(x_{j-1})\varphi(x_{j-1}, \beta(x_{j-1})) - \alpha'(x_{j-1})\varphi(x_{j-1}, \alpha(x_{j-1}))}, \quad (1.2.31) \\ & j = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

При использовании этой расчетной схемы также необходимо задаться несколькими значениями начального приближения x_0 к искомым корням уравнения (1.2.1), требуемой точ-

ностью ε их определения и для каждого x_0 по формулам (1.2.30), (1.2.31) реализовать итерационный процесс с контролем на каждом шаге выполнения условия вида (1.2.6).

Пример 1.10.

Пусть уравнение вида (1.2.1) при функциях:

$$\psi(x) = -x; \quad \alpha(x) = x; \quad \beta(x) = 2x; \quad \varphi(x, w) = x + w \quad (1.2.32)$$

записывается как:

$$-x + \int_x^{2x} (x + w)dw = 0. \quad (1.2.33)$$

Построим аналитическое решение этого уравнения. Проводя интегрирование в выражении (1.2.33), получаем:

$$-x + \frac{(x + w)^2}{2} \Big|_x^{2x} = 0.$$

После подстановки пределов интегрирования и несложных преобразований имеем следующее квадратное уравнение относительно искомого параметра x :

$$-x + \frac{5}{2}x^2 = 0,$$

откуда получаем следующие два корня уравнения (1.2.33):

$$x_1^* = 0; \quad x_2^* = 0,4.$$

Определим решение этого уравнения с точностью $\varepsilon = 0,0001$ с использованием расчетной схемы (1.2.31).

Конкретизация выражений (1.2.27) с использованием функции (1.2.32) имеет вид:

$$\begin{aligned} J_1(x_j) &= \int_{x_j}^{2x_j} (x_j + w)dw = \frac{5}{2}x_j^2 = 2,5x_j^2; \\ J_2(x_j) &= \int_{x_j}^{2x_j} dw = x_j. \end{aligned} \quad (1.2.34)$$

Необходимые для формирования расчетной схемы (1.2.31) производные и функции записываются как:

$$\begin{aligned} \psi'(x_j) &= -1; & \alpha'(x_j) &= 1; & \beta'(x_j) &= 2; & \varphi'_w(x_j, w) &= 1; \\ \varphi(x_j, \beta(x_j)) &= x_j + 2x_j = 3x_j; & & & & & & (1.2.35) \\ \varphi(x_j, \alpha(x_j)) &= x_j + x_j = 2x_j. \end{aligned}$$

Подставляя выражения (1.2.34) и (1.2.35) в правую часть формулы (1.2.31), после несложных преобразований получаем расчетную схему вида:

$$x_j = x_{j-1} - \frac{2,5x_{j-1}^2 - x_{j-1}}{5x_{j-1} - 1}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (1.2.36)$$

Полагая $x_0 = 0,25$, получаем по этой расчетной схеме следующую последовательность приближений к искомому корню:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,6252; & x_2 &= 0,4623; \\ x_3 &= 0,4074; & x_4 &= 0,4002; & x_5 &= 0,4001. \end{aligned}$$

Откуда с использованием условия (1.2.6) имеем, что:

$$x_1^* = x_5 = 0,4001.$$

При $x_0 = -1$ получаем по схеме (1.2.36) последовательность вида:

$$\begin{aligned} x_1 &= -0,4172; & x_2 &= -0,1411; & x_3 &= -0,0294; \\ x_4 &= -1,845 \cdot 10^{-3}; & x_5 &= -8,433 \cdot 10^{-6}; & x_6 &= -1,778 \cdot 10^{-10}. \end{aligned}$$

Второй (тривиальный) корень уравнения (1.2.33) будет равен

$$x_2^* = x_6 = -1,778 \cdot 10^{-10}.$$

Заметим, что полученные с помощью расчетной схемы (1.2.36) значения корней x^* полностью совпадают в пределах требуемой точности $\varepsilon = 0,0001$ с их значениями, полученными аналитическим методом. Графическая иллюстрация схо-

димости итерационных процессов к значениям корней решаемого уравнения представлена на Рис. 1.6.

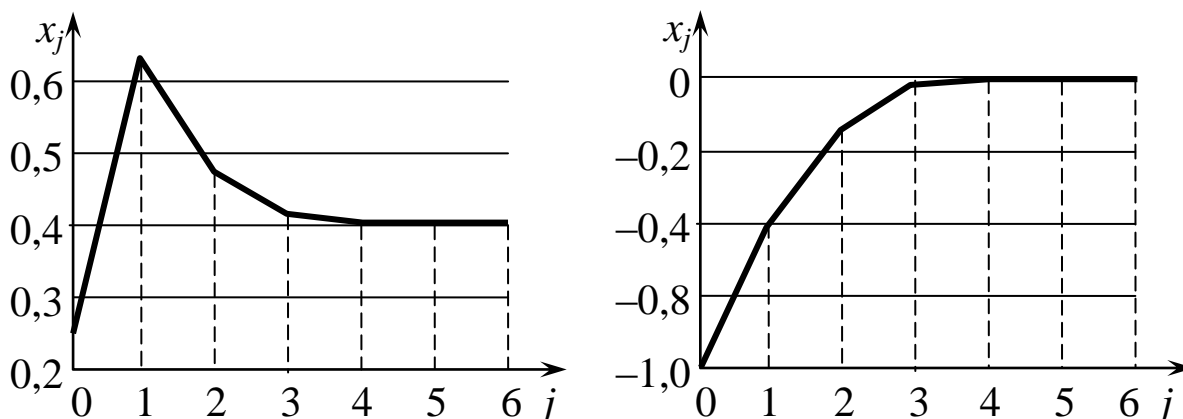


Рис. 1.6

Краткое изложение предлагаемого метода представлено в статье авторов [9]. Дальнейшее развитие этого метода связано с нелинейными уравнениями, содержащими сумму интегралов с параметрами, а также несобственные интегралы 1-го и 2-го рода с параметрами, библиография по которым приведена в работе [7].

1.3. Определение радиуса действия беспилотного вертолета при действии ветра

В перспективных задачах применения беспилотных вертолетов (БВ) [10] необходимо определить законы изменения скорости вертолета, обеспечивающей большой радиус его действия при встречном и попутном ветре.

Аналогичная задача при постоянной скорости прямого и обратного полета самолета достаточно просто решается в работе [11]. В работах [10, 11] приводится следующая формула искомого радиуса действия:

$$R = \frac{V^2 - W^2}{2V} T, \quad (1.3.1)$$

где V – скорость БВ; W – скорость ветра; T – полетное время.

Пусть заданы требуемые законы изменения скорости $V_1(t)$ и $V_2(t)$ прямого и обратного полетов вертолета. Запас бортового топлива соответствует величине T его полетного времени. Кроме этого задано значение W скорости действующего на его трассе ветра. Расчетная схема задачи приведена на Рис. 1.7.

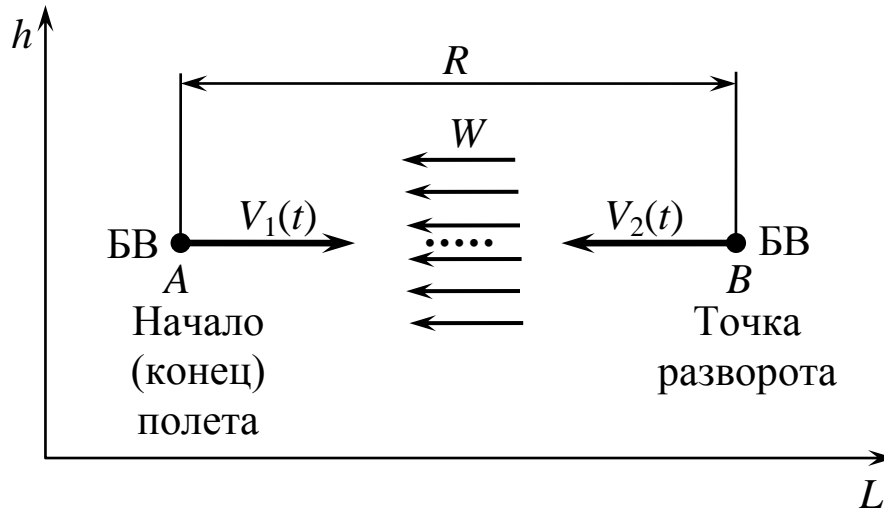


Рис. 1.7

Будем считать, что полет БВ начинается в момент времени $t = 0$. Затраты времени на прямой t_1 и обратный t_2 полеты должны быть связаны соотношением:

$$t_1 + t_2 = T. \quad (1.3.2)$$

Длины маршрутов БЛА между точками A и B задаются выражениями:

$$L_{AB} = \int_0^{t_1} (V_1(t) - W) dt; \quad (1.3.3)$$

$$L_{BA} = \int_0^{t_2} (V_2(t) + W) dt; \quad (1.3.4)$$

Радиус действия БВ определяется условием вида:

$$R = L_{AB} = L_{BA}. \quad (1.3.5)$$

Для определения величины R с использованием соотношений (1.3.3)-(1.3.5) и условия (1.3.2) имеем следующее выражение:

$$\int_0^{t_1} (V_1(t) - W) dt - \int_0^{T-t_1} (V_2(t) + W) dt = 0. \quad (1.3.6)$$

Из этого уравнения требуется определить величину t_1 . По значению его корня t_1^* радиус действия R с использованием выражений (1.3.5) и (1.3.3) вычисляется как:

$$R = \int_0^{t_1^*} (V_1(t) - W) dt. \quad (1.3.7)$$

Сформируем расчетную схему для численного решения уравнения (1.3.6) с применением использованного в Разд. 1.2 метода Ньютона.

В связи с тем, что входящие в его левую часть интегралы являются интегралами с переменными верхними пределами, будем использовать в этой схеме выражение (1.2.5), в котором производная конкретизируется в точке $t = t_{j-1}$ как:

$$\begin{aligned} \Phi'(t_{j-1}) &= (V_1(t_{j-1}) - W) + (V_2(T - t_{j-1}) + W) = \\ &= V_1(t_{j-1}) + V_2(T - t_{j-1}) \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Значения левой части уравнения (1.3.6) в этой точке представим с использованием выражения (1.2.14) при $a = 0$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi(t_{j-1}) &= \frac{t_{j-1}}{n} \sum_{k=0}^{n-1} V_1\left(\frac{k}{n} t_{j-1}\right) - \\ &- \frac{T - t_{j-1}}{n} \sum_{k=0}^{n-1} V_2\left(\frac{k}{n} (T - t_{j-1})\right). \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

Тогда с использованием выражения (1.2.5), (1.3.8), (1.3.9) получаем расчетную схему решения уравнения (1.3.6) вида:

$$t_j = t_{j-1} - \frac{1}{V_1(t_{j-1}) + V_2(T - t_{j-1})} \times \left[\frac{t_{j-1}}{n} \sum_{k=0}^{n-1} V_1\left(\frac{k}{n} t_{j-1}\right) - \left[\frac{T - t_{j-1}}{n} \sum_{k=0}^{n-1} V_2\left(\frac{k}{n} (T - t_{j-1})\right) \right] \right]. \quad (1.3.10)$$

Пример 1.11.

Рассмотрим БВ, для которого методами, описанными в работе [10], сформированы следующие законы изменения скорости:

$$V_1(t) = 560t - 520t^2; \quad V_2(t) = 80t. \quad (1.3.11)$$

Будем считать, что рассматриваемый вертолет имеет следующие скоростные характеристики горизонтального полета:

$$V_{\max} = 150 \text{ км/ч}; \quad V_{\text{крейс}} = 120 \text{ км/ч}; \quad V_{\min} = 40 \text{ км/ч}. \quad (1.3.12)$$

Пусть перед выполнением очередного полетного задания (ПЗ) установлены наличие бортового топлива на $T = 0,6$ ч полета и наличие горизонтального ветра со скоростью $W = 20 \text{ м/с} = 72 \text{ км/ч}$.

Требуется найти возможное при выполнении данного ПЗ значение радиуса действия БВ.

Уравнение (1.3.6) для указанных исходных данных конкретизируется как:

$$\int_0^{t_1} (560t - 520t^2 - 72)dt - \int_0^{0,6-t_1} (80t + 72)dt = 0. \quad (1.3.12)$$

Аналитическое решение этого уравнения имеет вид:

$$t^* = 0,4701 \text{ ч} = 1692 \text{ с}. \quad (1.3.13)$$

Для этого значения искомый радиус действия БВ, вычисленный с использованием выражений (1.3.7) и (1.3.11), будет равен:

$$R = 10,026 \text{ км} = 10026 \text{ м}.$$

Для численного решения уравнения (1.3.12) расчетная схема (1.3.10) конкретизируется выражением вида:

$$t_j = t_{j-1} - \frac{1}{560t_{j-1} - 520t_{j-1}^2 + 80t_{j-1}} \times$$

$$\times \left[\frac{t_{j-1}}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(560 \frac{k}{n} t_{j-1} - 520 \left(\frac{k}{n} t_{j-1} \right)^2 - 72 \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{0,6 - t_{j-1}}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(80 \frac{k}{n} (0,6 - t_{j-1}) + 72 \right) \right].$$

Результаты применения этой схемы для следующих значений параметров:

$$t_0 = 0,1; \quad n = 5000; \quad \varepsilon = 0,0001$$

приведены в Табл. 1.3 и на Рис. 1.8.

Таблица 1.9

t_j	$t_j - t_{j-1}$
0,1000	
0,9600	0,86
0,5434	-0,417
0,4840	-0,059
0,4723	-0,012
0,4705	$-1,844 \cdot 10^{-3}$
0,4702	$-2,735 \cdot 10^{-4}$
0,4702	$-4,015 \cdot 10^{-5}$
0,4701	$-5,884 \cdot 10^{-6}$

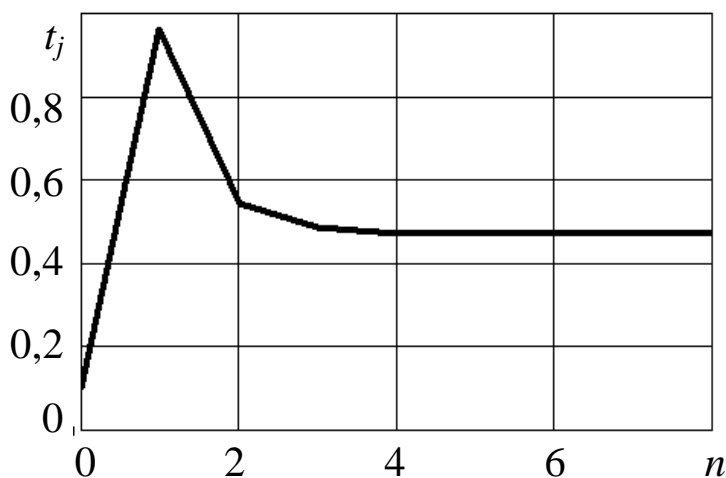


Рис. 1.8

Из этой таблицы следует, что на 9-й итерации получаем решение, полностью соответствующее значению (1.3.13).

Исследуем вопрос об использовании постоянных значений скоростей прямого и обратного полета БВ.

Будем считать, что:

$$V_1(t) = V_{\max}; \quad V_2(t) = V_{\min}.$$

Подставляя в уравнение (1.3.6) соответствующие значения из скоростных характеристик БВ (1.3.12) и проводя его несложные преобразования, получаем значение:

$$t^* = 0,3537 \text{ ч} = 1273 \text{ с.}$$

Интеграл (1.3.7) для этого значения времени будет равен:

$$R = 27,587 \text{ км} = 27587 \text{ м.} \quad (1.3.15)$$

Рассмотрим вариант полета БВ при значениях его скоростей:

$$V_1(t) = V_2(t) = V_{\text{крейс.}}$$

Применяя формулу (1.3.1) для значений

$$V = V_{\text{крейс}} = 120 \text{ км/ч}; \quad W = 72 \text{ км/ч} \text{ и } T = 0,6 \text{ ч,}$$

имеем следующее значение радиуса действий БВ:

$$R = 23,04 \text{ км/ч} = 23040 \text{ м.} \quad (1.3.16)$$

Сравнивая значения (1.3.14)-(1.3.16), имеем, что для получения наибольшего радиуса действия при встречном ветре БВ должен осуществлять полет с максимальной скоростью, а при попутном ветре – с минимальной скоростью.

Глава 2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ПРИМЕНЕНИЯ НЕЯВНО ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ

Неявные или неявно заданные функции одной и многих переменных достаточно давно рассматриваются в курсах математического анализа [12]. Однако следует отметить практическое отсутствие работ, в которых этот класс функций применялся бы для решения конкретных прикладных задач. На наш взгляд, основной причиной этого является полное отсутствие численных методов вычислительной математики [1-5], использующих неявные функции.

В данной главе рассматриваются простейшие подходы к разработке некоторых из таких методов с использованием неявных функций одной переменной.

2.1. Неявно заданные функции

Предположим, что значения двух переменных x и y связаны между собой уравнением, которое, если все его члены перенести в левую часть, в общем случае имеет вид [12]:

$$F(x,y) = 0. \quad (2.1.1)$$

Здесь $F(x,y)$ – функция двух переменных, заданная в какой-либо области. Если для каждого значения x из некоторого интервала существует одно или несколько значений y , которые совместно с x удовлетворяют уравнению (2.1.1), то этим определяется, однозначная или многозначная, функция $y = f(x)$, для которой равенство:

$$F(x,f(y)) = 0 \quad (2.1.2)$$

имеет место уже тождественно относительно x .

Например, уравнение:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (2.1.3)$$

определяет y как двужначную функцию от x в промежутке $[-1, 1]$ вида:

$$y = \pm\sqrt{1-x^2}.$$

Если вместо y подставить в уравнение (2.1.3) эту функцию, то получится тождество.

Здесь удалось найти для y очень простое аналитическое выражение через x в элементарных функциях. Если взять уравнение:

$$y - x - \varepsilon \sin y = 0, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad (2.1.4)$$

то этим уравнением y определяется как однозначная функция от x , хотя в конечном виде она через элементарные функции не выражается.

Функция называется неявной, если она задана при посредстве неразрешенного (относительно y) уравнения (2.1.1). Строго говоря, противопоставление неявного и явного задания функции с полной четкостью возможно лишь, если под явным заданием подразумевать аналитическую запись в форме:

$$y = f(x).$$

В простейшем случае, когда уравнение (2.1.1) алгебраическое, т.е. когда функция $F(x,y)$ есть целый относительно x и y многочлен, определяемая им неявная функция y от x (вообще многозначная) называется алгебраической. Если степень уравнения (относительно y) не выше четырех, то алгебраическая функция допускает явное выражение в радикалах, а при степени выше четырех такое выражение возможно лишь в виде исключения.

Рассмотрим вопрос о существовании и однозначности неявной функции, независимо от возможности представить ее в явном виде аналитической формулы. Отметим, что любая явно заданная функция представляется в виде (2.1.1) как:

$$y - f(x) = 0. \quad (2.1.5)$$

Приведем геометрическую трактовку указанного вопроса.

Уравнение (2.1.1), при известных условиях, выражает кривую на плоскости. В этом случае оно называется неявным уравнением кривой. Вопрос заключается в том, может ли кривая (2.1.1) (или ее часть) быть выражена обычным уравнением вида $y = f(x)$, с однозначной функцией справа. Геометрически это означает, что кривая (или ее часть) пересекается прямой, параллельной оси y , лишь в одной точке.

Если мы желаем иметь однозначную функцию, то, как видно на примере окружности, описанной выражением (2.1.3) и приведенной на Рис. 2.1, нужно ограничить не только область изменения x , но и область изменения y .

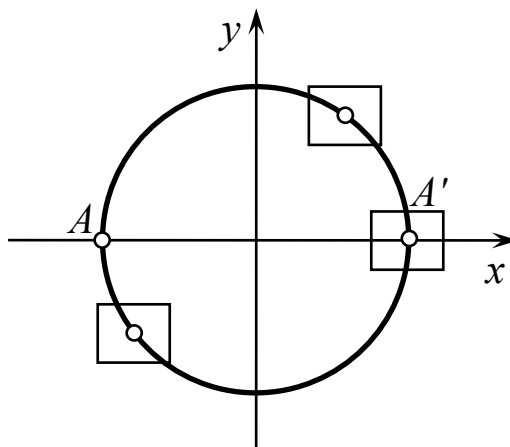


Рис. 2.1

Будем считать для краткости, что в прямоугольнике $(a, b; c, d)$ уравнение (2.1.1) определяет y как однозначную функцию от x , если при каждом значении x в промежутке (a, b) это уравнение имеет один, и только один, корень y в промежутке (c, d) . Обычно нас будет интересовать определенная точка (x_0, y_0) , удовлетворяющая уравнению (2.1.1) (лежащая на кривой), и в роли упомянутого прямоугольника будет фигурировать окрестность этой точки. Так, например, в случае окружности (см. Рис. 2.1), очевидно, можно утверждать, что урав-

нение (2.1.3) определяет ординату y как однозначную функцию от абсциссы x в достаточно малой окрестности любой точки окружности, кроме точек A и A' .

Условия, обеспечивающие существование однозначной и непрерывной неявной функции, определяются следующей теоремой [12]:

Теорема 1.

Предположим, что:

1) функция $F(x,y)$ определена и непрерывна в некотором прямоугольнике

$$D = [x_0 - \Delta, x_0 + \Delta; y_0 - \Delta', y_0 + \Delta']$$

с центром в точке (x_0, y_0) ;

2) $F(x,y)$ в этой точке равна нулю, т.е. $F(x_0, y_0) = 0$;

3) при постоянном x функция $F(x,y)$ монотонно возрастает (или монотонно убывает) с возрастанием y .

Тогда:

а) в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) уравнение (2.1.1) определяет y как однозначную функцию вида $y = f(x)$;

б) при $x = x_0$ эта функция принимает значение y_0 : $f(x_0) = y_0$;

в) при этом функция $f(x)$ непрерывна.

Рассмотрим вопрос о дифференцируемости неявной функции. Усилим предположения относительно функции $F(x,y)$ и получим возможность установить существование производной для функции $y = f(x)$.

Приведем следующую теорему [12]:

Теорема 2.

Предположим, что:

1) функция $F(x,y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике

$$D = [x_0 - \Delta, x_0 + \Delta; y_0 - \Delta', y_0 + \Delta']$$

с центром в точке (x_0, y_0) ;

2) частные производные F'_x и F'_y существуют и непрерывны в D ;

3) $F(x, y)$ в точке (x_0, y_0) обращается в ноль;

4) производная $F'_y(x_0, y_0)$ отлична от нуля.

Тогда выполняются заключения а), б), в) теоремы 1 и, кроме того, функция $f(x)$ имеет непрерывную производную.

Представив приращение ΔF по формуле (2.1.1), получим:

$$0 = \Delta F(x, y) = F'_x(x, y) \cdot \Delta x + F'_y(x, y) \cdot \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y,$$

где α и β зависят от Δx , Δy и стремятся к нулю, когда Δx и Δy одновременно стремятся к нулю. Отсюда следует, что:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x, y) + \alpha}{F'_y(x, y) + \beta}. \quad (2.1.6)$$

Устремим к нулю Δx ; в силу установленной выше непрерывности функции $y = f(x)$, при этом Δy также стремится к нулю, а потому и $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$. Так как $F'_y \neq 0$, то существует предел правой части выражения (2.1.6), а, следовательно, существует и производная y по x :

$$f'(x) = y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \quad (2.1.7)$$

Так как в числителе и в знаменателе здесь имеем непрерывные производные от непрерывных функций, и знаменатель не обращается в нуль, то отсюда следует, что $f'(x)$ – также непрерывная функция.

В приложениях часто используются производные 1-го и 2-го порядка от неявной функции (2.1.1). Если продифференцировать эту функцию по x по правилам дифференцирования сложной функции, учитывая, что $y = y(x)$, то получим [12]:

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \quad (2.1.8)$$

Отсюда, считая, что $F'_y(x, y) \neq 0$, получаем выражение вида:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}, \quad (2.1.9)$$

которое полностью соответствует формуле (2.1.7).

Производная 2-го порядка от функции (2.1.1) вычисляется как [12]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} = & \frac{2F'_x(x, y)F'_y(x, y)F''_{xy}(x, y)}{F_y'^3(x, y)} - \\ & - \frac{F_y'^2(x, y)F''_x(x, y) - F_x'^2(x, y)F''_y(x, y)}{F_y'^3(x, y)}. \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Аналогично уравнению (2.1.1) можно рассматривать и уравнение с бóльшим числом переменных:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0.$$

При известных условиях этим уравнением y определяется как неявная функция от n переменных x_1, x_2, \dots, x_n ;

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

которая вообще говоря, будет многозначной. Если подставить ее вместо y , то будем иметь:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0$$

уже тождественно относительно x_1, x_2, \dots, x_n .

Как отмечалось выше, такие неявные функции в данной главе не рассматриваются.

2.2. Численные методы построения неявных функций на заданном интервале их аргументов

Пусть заданная неявная функция имеет вид выражения (2.1.1):

$$F(x,y) = 0. \quad (2.2.1)$$

Приведем примеры некоторых неявных функций [8]:

- Декартов лист: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ($a > 0$);
- конхоида Никомеда: $(x - a)^2(x^2 + y^2) - l^2x^2 = 0$;
- улитка Паскаля: $(x^2 + y^2 - ax)^2 - l^2(x^2 + y^2) = 0$;
- овалы Кассини: $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4$;
- лемниската: $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$ – частный случай овала Кассини, при $a = c$.

Требуется построить зависимость $y = y(x)$ при $x \in [x_0, x_k]$.

Наиболее очевидным способом решения этой задачи является задание требуемой сетки значений переменной x вида:

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_k \quad (2.2.2)$$

и решения в ее узлах совокупности нелинейных уравнений:

$$F(x_i, y) = 0, \quad i = \overline{0, k} \quad (2.2.3)$$

известными численными методами [1-5].

Теоретическое обоснование такого подхода, основанного на методе последовательных приближений для однозначных функций $y = y(x)$, было впервые изложено в работе [6]. Этот метод основан на следующем утверждении:

Теорема 3.

Пусть функция $F(x,y)$ непрерывна вместе со своей производной $F'_y(x, y)$ в некотором квадрате:

$$D = \{x_0 - \Delta, x_0 + \Delta; y_0 - \Delta, y_0 + \Delta\}$$

с центром в точке (x_0, y_0) .

При этом:

$$F(x_0, y_0) = 0; \quad F'_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

Тогда уравнение (2.2.1) в окрестности точки (x_0, y_0) определяет y как однозначную и непрерывную функцию от x , которая при $x = x_0$ равна y_0 .

Для частного случая выражения (2.2.1) вида:

$$y = y_0 + \varphi(x, y), \quad (2.2.4)$$

где функция φ удовлетворяет условиям:

$$\varphi(x_0, y_0) = 0; \quad |\varphi'_y(x_0, y_0)| < 1, \quad (2.2.5)$$

предлагается следующая процедура:

1. Подставляя в правую часть этого выражения вместо y постоянную y_0 , получаем некоторую функцию от x :

$$y_1 = y_1(x) = y_0 + \varphi(x, y_0).$$

2. Полагая последовательно:

$$y_2 = y_2(x) = y_0 + \varphi(x, y_1);$$

$$y_3 = y_3(x) = y_0 + \varphi(x, y_2);$$

.....

$$y_n = y_n(x) = y_0 + \varphi(x, y_{n-1}), \quad (2.2.6)$$

3. Получаем последовательность функций:

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots, \quad (2.2.7)$$

осуществляющих последовательное приближение к искомой функции $y = y(x)$.

При использовании этой процедуры требуется, чтобы значения функций (2.2.7) не выходили за границы интервала $[y_0 - \Delta, y_0 + \Delta]$. Это необходимо для использования рекуррентного соотношения (2.2.6).

В работе [6] показывается, что функциональный ряд (2.2.7) равномерно сходится для всех значений $x \in [x_0 - \Delta, x_0 + \Delta]$ и предельная функция:

$$y = y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$$

будет в указанном интервале непрерывной.

Общий случай (2.2.1) приводится к выражению (2.2.4) как [6]:

$$y = y_0 + \left[y - y_0 - \frac{F(x, y)}{F'_x(x_0, y_0)} \right]. \quad (2.2.8)$$

Здесь использованная выше функция φ имеет вид:

$$\varphi(x, y) = y - y_0 - \frac{F(x, y)}{F'_x(x_0, y_0)}. \quad (2.2.9)$$

Отмечается, что условия (2.2.5) для этого выражения полностью выполняются.

На наш взгляд, основным недостатком этого метода является малость области D , необходимой для построения однозначной функции $y = y(x)$.

Рассмотрим более общие численные методы построения функции $y = y(x)$ на заданном интервале $[x_0, x_k]$ изменения ее независимой переменной x .

Обозначим правую часть выражений (2.2.3) в виде функций:

$$\Phi_i(y) = F(x_i, y), \quad i = (\overline{0, k}), \quad (2.2.10)$$

где значения x_i удовлетворяют заданной сетке (2.2.2).

Тогда совокупность уравнений (2.2.3) может быть представлена как:

$$\Phi_i(y) = 0, \quad i = (\overline{0, k}). \quad (2.2.11)$$

Применяя к этим уравнениям расчетную схему метода Ньютона в виде (1.2.5), имеем:

$$y_j^{(i)} = y_{j-1}^{(i)} - \frac{\Phi_i(y_{j-1}^{(i)})}{\Phi'_i(y_{j-1}^{(i)})}, \quad i = (\overline{0, k}), \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Подставляя в это соотношение выражение (2.2.10), получаем расчетную схему решения поставленной выше задачи на сетке (2.2.2) вида:

$$y_j(x_i) = y_{j-1}(x_i) - \frac{F(x_i, y_{j-1})}{F'_y(x_i, y_{j-1})}, \quad (2.2.12)$$

$$i = (\overline{0, k}), \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

При использовании такого подхода важным является вопрос о значениях начальных приближений $y_0(x_i)$, $i = (\overline{0, k})$.

Определим граничные значения y_0 и y_k переменной y в выражении (2.2.1) при $x \in [x_0, x_k]$. Для этого решим с помощью схемы (2.2.12) уравнения вида:

$$F(x_0, y) = 0; \quad F(x_k, y) = 0. \quad (2.2.13)$$

Для определения начальных приближений $y_0(x_i)$ полученный интервал $[x_0, x_k]$ разбивается на отрезки точками y_r , $r = (\overline{0, k})$, в которых в этих точках вычисляются значения $F(x_i, y_r)$. Далее для каждого отрезка $[y_{r-1}, y_r]$ осуществляется проверка условия:

$$F(x_i, y_{r-1})F(x_i, y_r) \leq 0. \quad (2.2.14)$$

Если это неравенство выполняется в некотором интервале $[\bar{y}_{r-1}, \bar{y}_r]$, то по теореме Больцано-Коши [5] можно утверждать, что в рассматриваемом промежутке располагается корень уравнения (2.2.3). Тогда начальное приближение определяется как:

$$y_0(x_i) = \bar{y}_{r-1}.$$

Пример 2.1.

Пусть в уравнении (2.1.4) при $\varepsilon = 0,5$ значения переменных x должны лежать в интервале $[x_0, x_k] = [0; 2]$. Тогда уравнения вида (2.2.13):

$$y - 0,5 \sin y = 0; \quad y - 2 - 0,5 \sin y = 0$$

имеют следующие корни, полученные с применением расчетной схемы (2.2.12):

$$y_0 = 0; \quad y_k = 2,354.$$

Решения приведенных выше уравнений являются единственными. Это дает основание утверждать, что функция $y = y(x)$, определяемая выражением (2.1.4) при $x \in [0; 2]$ является однозначной функцией.

Применяя сетку (2.2.2) с узлами:

$$x_0 = 0; \quad x_1 = 0,2; \quad x_2 = 0,5; \quad x_3 = 1; \quad x_4 = 1,5; \quad x_5 = 2$$

и разбиение интервала $[0; 2,354]$ точками:

$$y_0 = 0; \quad y_1 = 0,1; \quad y_2 = 0,3; \quad y_3 = 0,8; \quad y_4 = 1,2; \quad y_5 = 2,$$

а также выбирая из них значения по приведенному выше правилу начальных приближений $y_0(x_i)$, $i = \overline{0; 5}$ с привлечением расчетной схемы (2.2.12) при

$$F(x_i, y_{j-1}) = y_{j-1} - x_i - 0,5 \sin y_{j-1};$$

$$F'_y(x_i, y_{j-1}) = 1 - 0,5 \cos y_{j-1},$$

получаем числовое и графическое представления искомой функции $y = y(x)$, приведенные в Табл. 2.1 и на Рис. 2.2.

Таблица 2.1

x	y
0	0
0,2	0,390
0,5	0,888
1,0	1,499
1,5	1,962
2,0	2,354

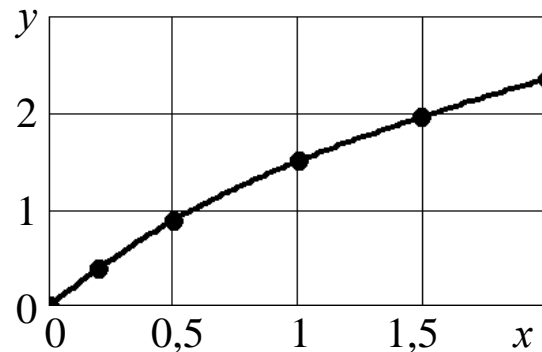


Рис. 2.2

Пример 2.2.

Пусть функция (2.2.1) имеет вид:

$$y^2 - \sin y + x = 0.$$

Будем считать, что переменная x должна принадлежать интервалу $[x_0, x_k] = [-1; 0]$.

Уравнения (2.2.13) конкретизируются как:

$$y^2 - \sin y - 1 = 0; \quad y^2 - \sin y = 0.$$

Решения этих уравнений по схеме (2.2.12) при соответствующих начальных приближениях дают следующие значения их корней:

$$y_0^{(1)} = 1,410; \quad y_0^{(2)} = -0,637; \quad y_k^{(1)} = 0,887; \quad y_k^{(2)} = 0.$$

Из этих результатов можно сделать вывод, что искомая функция $y = y(x)$ является на интервале $[-1; 0]$ двузначной функцией ее аргумента. Этот факт иллюстрирует Рис. 2.3, на котором представлена непрерывная аппроксимация значений этой функции, полученных с помощью расчетной схемы (2.2.12).

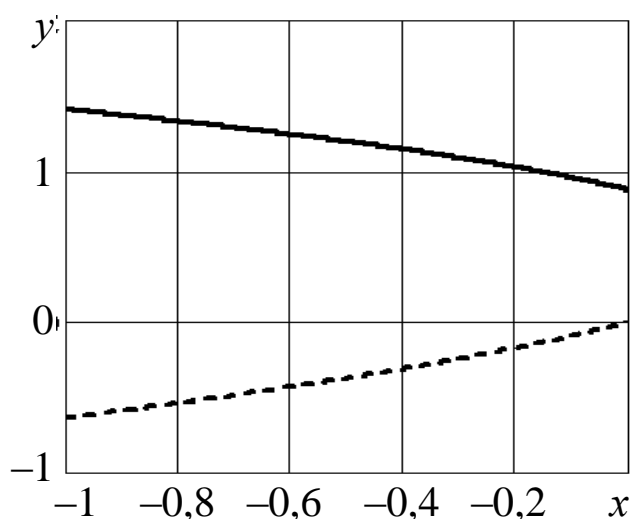


Рис. 2.3

Приведенный выше итерационный процесс (2.2.12) является весьма трудоемким, т.к. требует для каждого $(k + 1)$ -го узла сетки (2.2.3) определения значений начальных приближений и проверки на каждом шаге процесса условий типа (1.2.6). Поэтому предложим более простой метод построения функции $y = y(x)$ для $x \in [x_0, x_k]$, использующий определение (2.1.9) ее производной.

В этом случае построение искомой функции сводится к решению задачи Коши вида:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}, \quad x \in [x_0, x_k]; \quad (2.2.15)$$

$$y(x_0) = y_0. \quad (2.2.16)$$

При этом значение y_0 в правой части начального условия (2.2.16) определяется путем численного решения первого из уравнений (2.2.13).

Решение второго из этих уравнений можно использовать для контроля правильности получения интегральной кривой задачи (2.2.15), (2.2.13) в точке $x = x_k$.

Покажем на примере выражения (2.1.3) возможность построения функции $y = y(x)$ с помощью решения задачи (2.2.15), (2.2.16).

Представим указанное выше выражение в следующем виде:

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0. \quad (2.2.17)$$

Частные производные от этой функции записываются как:

$$F'_x(x, y) = 2x; \quad F'_y(x, y) = 2y.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (2.2.15), получим:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y}. \quad (2.2.18)$$

Начальное условие для этого уравнения, полученное из выражения (2.2.17) при $x_0 = 0$, имеет вид:

$$y(0) = -1. \quad (2.2.19)$$

Решая уравнение (2.2.18) как дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными [15], получаем:

$$2ydy = -2xdx; \quad y^2 = -x^2 + C. \quad (2.2.20)$$

Постоянная интегрирования C , определяемая из условия (2.2.19), будет равна:

$$C = 1.$$

Подставляя это значение в выражение (2.2.20), получаем следующее представление искомой функции:

$$y = \pm\sqrt{1-x^2},$$

которое непосредственно следует из выражения (2.2.13) и (2.2.17).

Отметим, что в реальных случаях для решения задачи Коши (2.2.15), (2.2.16) применяется один из известных численных методов интегрирования дифференциальных уравнений [1-5].

Пример 2.3.

Пусть выражение (2.2.1) имеет вид [8]:

$$F(x,y) = x^y - xy = 0, \quad x \in [1,5; 3].$$

Частные производные этой функции записываются как:

$$F'_x(x, y) = yx^{y-1} - y; \quad F'_y(x, y) = x^y \ln x - x.$$

Тогда дифференциальное уравнение (2.2.15) примет вид:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{yx^{y-1} - y}{x^y \ln x - x}. \quad (2.2.21)$$

Решая с помощью расчетной схемы (2.2.12) уравнение:

$$F(x_0,y) = 1,5^y - 1,5y = 0,$$

получаем значение $y_0 = 4,93917$.

Отсюда начальное условие для уравнения (2.2.21) запишется как:

$$y(1,5) = 4,93917. \quad (2.2.22)$$

Результаты решения задачи (2.2.21), (2.2.22) методом Рунге-Кутта [5] приведены в Табл. 2.2 и на Рис. 2.4.

Проведенные вычислительные эксперименты с дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1-0,5\cos y}; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2y-\cos y},$$

построенными на основе неявных функций, рассмотренных в Примерах 2.1 и 2.2, показали полное совпадение полученных

результатов с результатами применения в них расчетных схем вида (2.2.12).

Таблица 2.2

x	y
1,50	4,939
1,65	3,504
1,80	2,672
1,95	2,137
2,10	1,768
2,25	1,500
2,40	1,297
2,55	1,140
2,70	1,014
2,85	0,911
3	0,826

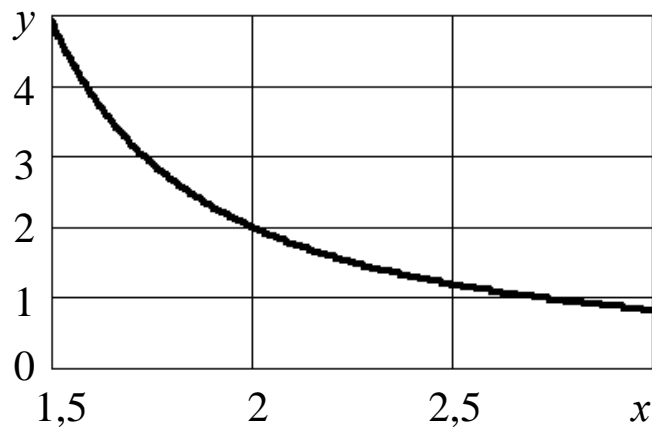


Рис. 2.4

Основным требованием использования выражения (2.1.9) является условие [8]:

$$F'_y(x, y) \neq 0.$$

Если в точке с координатами (x_0, y_0) имеет место равенство:

$$F'_y(x_0, y_0) = 0, \quad (2.2.23)$$

то при решении дифференциального уравнения (2.2.15) начальное условие (2.2.16) предлагается записывать в виде:

$$y(x_0) = y_0 \pm \varepsilon, \quad (2.2.24)$$

где ε – достаточно малая величина.

Проиллюстрируем этот прием на примере численного построения функции $y = y(x)$, $x \in [x_0, x_k] = [-1, +1]$ на основе выражения (2.2.17).

Пример 2.4.

Перепишем применяемое дифференциальное уравнение (2.2.18) как:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \quad (2.2.25)$$

В точке $x_0 = -1$ ордината искомой функции $y_0 = 0$. Но в этой точке выполняется условие (2.2.23), т.е. $F'_y(-1; 0) = 0$.

Функция (2.2.17) является двузначной функцией (см. Рис. 2.1). Поэтому ее построение будем проводить при двух начальных условиях:

$$y(-1) = +\varepsilon; \quad (2.2.26)$$

$$y(-1) = -\varepsilon; \quad (2.2.27)$$

В табл. 2.3 и на Рис. 2.5 приведены результаты решения задач (2.2.25), (2.2.26) и (2.2.25), (2.2.27).

Таблица 2.3

x	$y^{(+)}$	$y^{(-)}$
-1	$1 \cdot 10^{-4}$	$-1 \cdot 10^{-4}$
-0,8	0,603	-0,603
-0,6	0,803	-0,803
-0,4	0,919	-0,919
-0,2	0,982	-0,982
0	1,002	-1,002
0,2	0,982	-0,982
0,4	0,919	-0,919
0,6	0,803	-0,803
0,8	0,604	-0,604
1	0,067	-0,067

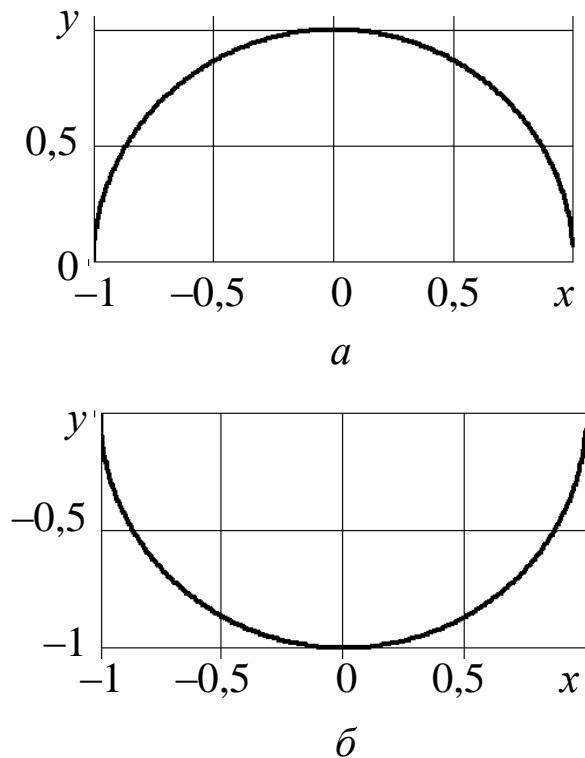


Рис. 2.5

На Рис 2.5,*а* приведен график положительной части окружности (2.1.17), а на Рис. 2.5,*б* – ее отрицательной части.

В Табл. 2.3 приведены соответственно приближенные значения положительных ($y^{(+)}$) и отрицательных ($y^{(-)}$) ординат формируемой функции $y = y(x)$.

Отметим, что для двузначных функций $y = y(x)$, у которых для каждого значения $y_0^{(1)}$ и $y_0^{(2)}$ условие (2.2.23) не выполняется, решается дифференциальное уравнение (2.2.15) с двумя начальными условиями:

$$y(x_0) = y_0^{(1)}; \quad y(x_0) = y_0^{(2)}. \quad (2.2.28)$$

При построении функции $y = y(x)$ с помощью уравнения (2.2.15) в Примере 2.2 эти условия конкретизируются как:

$$y(-1) = 1,41; \quad y(-1) = -0,637.$$

Получаемые при этом интегральные кривые уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2y - \cos y}$$

приведены на Рис. 2.3.

Рассмотрим метод построения двузначной замкнутой функции $y = y(x)$, $x \in [x_0, x_k]$ в процессе однократного решения уравнения (2.1.9).

В работе [16] для определения вектора $u(t)$ управления БЛА использовались условия вида:

$$u_1 \leq u(t) \leq u_2, \quad t \in [t_0, t_k],$$

где u_1 , u_2 – векторы эксплуатационных ограничений (углы атаки, отклонения рулей, дроссельной заслонки двигателя и т.п.). Для учета таких условий в задачах управления движением БЛА было предложено использовать новый вектор управления $\xi(t)$, связанный с вектором $u(t)$ соотношением:

$$u(t) = \frac{1}{2}[u_1 + u_2 + (u_2 - u_1) \sin \xi(t)], \quad t \in [t_0, t_k],$$

где $\xi(t) \in [-\infty, +\infty]$.

Используем этот подход к решению поставленной выше задачи.

На Рис. 2.6,*а* представлен общий вид формируемой функции $y = y(x)$, $x \in [x_0, x_k]$.

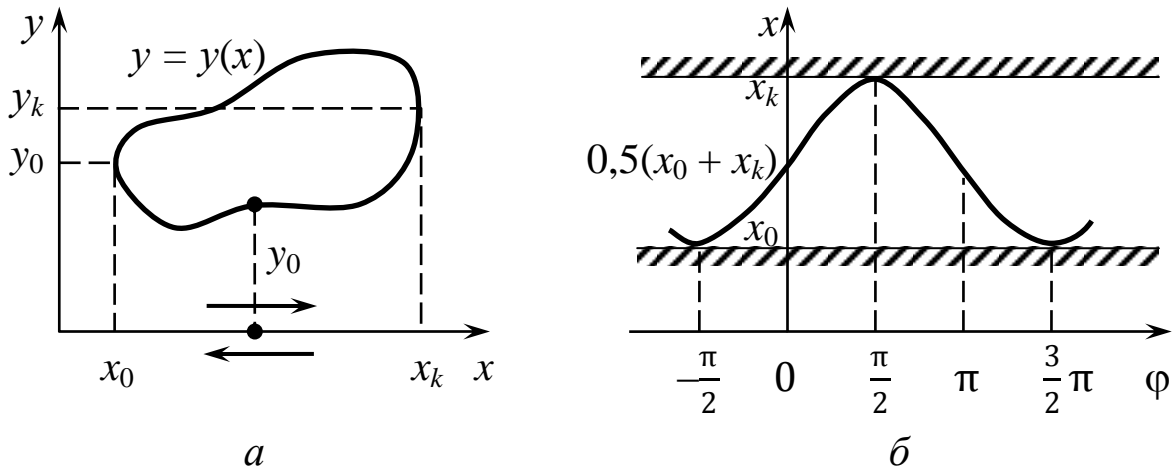


Рис. 2.6

Из этого рисунка следует, что при ее формировании процесс интегрирования уравнения (2.1.9) должен пройти в интервалах $[x_0, x_k]$ и $[x_k, x_0]$. Для этих целей используем замену независимой переменной x вида:

$$x = \frac{1}{2}[x_0 + x_k + (x_k - x_0) \sin \varphi]. \quad (2.2.29)$$

Покажем, что при изменении угла φ в определенных пределах условие:

$$x_0 \leq x \leq x_k \quad (2.2.30)$$

выполняется.

При $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ в выражении (2.2.29) значение $\sin \varphi = -1$.

Откуда:

$$x = \frac{1}{2}[x_0 + x_k + (x_k - x_0)(-1)] = \frac{2x_0}{2} = x_0.$$

Для $\varphi = 0$ и $\sin \varphi = 0$ имеем:

$$x = \frac{1}{2}[x_0 + x_k + (x_k - x_0) \cdot 0] = \frac{x_0 + x_k}{2}.$$

Значения $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\sin\varphi = +1$ дают следующие значения:

$$x = \frac{1}{2}[x_0 + x_k + (x_k - x_0) \cdot 1] = \frac{2x_k}{2} = x_k.$$

Таким образом, при значениях $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ реализуется изменение переменной x в интервале (2.2.30). Для обратного изменения x от значения x_k до x_0 необходимо изменять угол φ от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3}{2}\pi$. На Рис. 2.6,б показана зависимость вида (2.2.29) при $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$.

Перейдем в уравнении (2.1.9) к новой независимой переменной φ . Преобразуем его левую часть следующим образом:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{dy}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx}.$$

Дифференцируя выражение (2.2.29) по φ , имеем:

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{x_k - x_0}{2} \cos\varphi. \quad (2.2.31)$$

Подставляя (2.2.31) в предыдущее выражение, получим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(x_k - x_0) \cos\varphi} \frac{dy}{d\varphi}. \quad (2.2.32)$$

Подставляя правые части выражений (2.2.29) и (2.2.32) в уравнение (2.1.9), после несложных преобразований получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{d\varphi} = - \frac{(x_k - x_0) \cos\varphi \cdot F'_x(0,5[x_0 + x_k + (x_k - x_0) \sin\varphi], y)}{2F'_y(0,5[x_0 + x_k + (x_k - x_0) \sin\varphi], y)}, \quad (2.2.33)$$

которое интегрируется при начальном условии:

$$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = y_0. \quad (2.2.34)$$

Выражение (2.2.31) будем рассматривать как дифференциальное уравнение с начальным условием:

$$x\left(-\frac{\pi}{2}\right) = x_0. \quad (2.2.35)$$

Тогда параметрическое представление $x = x(\varphi)$, $y = y(\varphi)$ формируемой функции $y = y(x)$ получаем путем численного интегрирования системы уравнений (2.2.31), (2.2.33) с начальными условиями (2.2.35) и (2.2.34). Из таблицы результатов для каждого конкретного значения φ определяем пару значений (x, y) .

Точка с координатами (x_0, y_0) по определению имеет, согласно условию (2.2.23), нулевое значение знаменателя уравнения (2.2.33). Поэтому будем изменять φ в пределах от 0 до 2π . Тогда из выражения (2.2.29) и Рис. 2.6,б получаем новые начальные условия для уравнений (2.2.31) и (2.2.33) вида:

$$x(0) = 0,5(x_0 + x_k); \quad y(0) = y^0. \quad (2.2.36)$$

При этом значение y^0 определяется из решения уравнения:

$$F(0,5(x_0 + x_k), y) = 0. \quad (2.2.37)$$

Интегрирование системы уравнений (2.2.31), (2.2.33) с начальными условиями (2.2.37) проводится на интервале $[0; 2\pi]$.

Сформулируем условие для получения замкнутых решений системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{d\varphi} = -\frac{F'_x(\varphi, y)}{F'_y(\varphi, y)};$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{x_k - x_0}{2} \cos \varphi.$$

При интегрировании таких уравнений с помощью стандартных численных методов (например, метод Рунге-Кутты с фиксированным шагом) возникает проблема, связанная с тем, что при использовании подобных методов требуется задавать в программу количество n точек интегрирования. При этом интервал интегрирования для параметра φ задается кратным π (от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3}{2}\pi$ или от 0 до 2π). Однако такой интервал не делится на n нацело, вследствие чего конец интервала никогда не будет достигнут, каким бы большим ни было n . В этом случае компьютерная программа, не достигнув точки перехода на вторую ветвь искомой двузначной кривой, возвращается обратно по только что построенной части кривой.

Рассмотрим Пример 2.4 – построение окружности радиуса $R = 1$ с центром в начале координат. Система дифференциальных уравнений, описывающих такую окружность имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\varphi} &= \cos \varphi; \\ \frac{dy}{d\varphi} &= -\frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{y}. \end{aligned} \tag{2.2.38}$$

Начальные условия можно взять двух видов:

$$x(0) = 0; \quad y(0) = +1 \tag{2.2.39}$$

или

$$x(0) = 0; \quad y(0) = -1. \tag{2.2.40}$$

Поскольку производная $\frac{dy}{d\varphi}$ вычисляется по одной и той же формуле для обеих полуокружностей, то в связи с вышесказанным предлагаемый метод строит либо верхнюю полуокружность (при начальных условиях (2.2.39)), либо – нижнюю (при начальных условиях (2.2.40)). При этом график

$y = y(\varphi)$ имеет либо вид, показанный на Рис. 2.7,*а* при начальных условиях (2.2.39), либо принимает только отрицательные значения при начальных условиях (2.2.40) (Рис. 2.7,*б*).

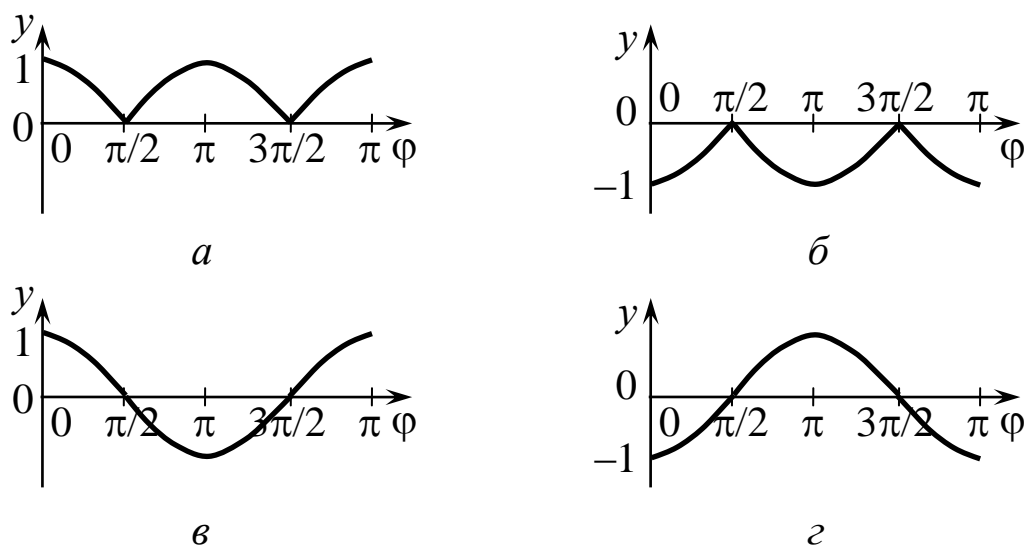


Рис. 2.7

Для построения полной окружности функция $y(\varphi)$ должна иметь вид, показанный на Рис. 2.7,*в* (при начальных условиях (2.2.39)) или на Рис. 2.7,*г* (при начальных условиях (2.2.40)).

Из Рис. 2.7 видно, что при условиях (2.2.39) производная $\frac{dy}{d\varphi}$ должна быть отрицательна на интервале $[0, \pi]$ и положительна на интервале $[\pi, 2\pi]$, а для условий (2.2.40) – наоборот. Поэтому предлагается следующий прием для построения двузначной функции вида окружность радиуса 1 с центром в начале координат.

Заменим второе уравнение в системе (2.2.38) при начальных условиях (2.2.39) на выражение:

$$\frac{dy}{d\varphi} = \begin{cases} - \left| \frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{y} \right| & \text{при } 0 \leq \varphi \leq \pi; \\ \left| \frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{y} \right| & \text{при } \pi \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Для условий (2.2.40) имеем выражение:

$$\frac{dy}{d\varphi} = \begin{cases} \left| -\frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{y} \right| & \text{при } 0 \leq \varphi \leq \pi; \\ \left| -\frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{y} \right| & \text{при } \pi \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

При построении окружности с центром в точке (a,b) начальные условия примут вид:

$$\begin{aligned} x(0) &= a; & y(0) &= b - R, \\ x(0) &= a; & y(0) &= b + R, \end{aligned}$$

где R – радиус окружности.

Принцип построения системы дифференциальных уравнений тот же, что и в предыдущем случае:

$$\frac{dy}{d\varphi} = \begin{cases} \left| -\frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{y - b} \right| & \text{при } 0 \leq \varphi \leq \pi; \\ \left| -\frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{y - b} \right| & \text{при } \pi \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

или

$$\frac{dy}{d\varphi} = \begin{cases} \left| -\frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{y - b} \right| & \text{при } 0 \leq \varphi \leq \pi; \\ \left| -\frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{y - b} \right| & \text{при } \pi \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Представленные выше дифференциальные уравнения являются уравнениями с разрывной правой частью [23, 25, 26], краткая характеристика которых будет рассмотрена в Разд. 4.1.

Отметим, что такие уравнения с абсолютными величинами в правых частях достаточно просто интегрируются с применением пакета Mathcad.

Для построения окружности, сдвинутой от центра координат на величины $a = 3$, $b = 2$, система дифференциальных уравнений примет следующий вид:

$$\frac{dx}{d\varphi} = \cos \varphi;$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \begin{cases} \left| -\frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{y-2} \right| & \text{при } 0 \leq \varphi \leq \pi; \\ \left| -\frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{y-2} \right| & \text{при } \pi \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Ее интегрирование производится с начальными условиями $x(0) = 3$; $y(0) = 1$.

Результат расчета приведен в Табл. 2.4 и на Рис. 2.8.

Таблица 2.4

φ , град.	x	y
0	3	1
36	3,588	1,191
72	3,951	1,691
108	3,951	2,309
144	3,588	2,809
180	3,000	3
216	2,412	2,809
252	2,049	2,309
288	2,049	1,691
324	2,412	1,191
360	3	1

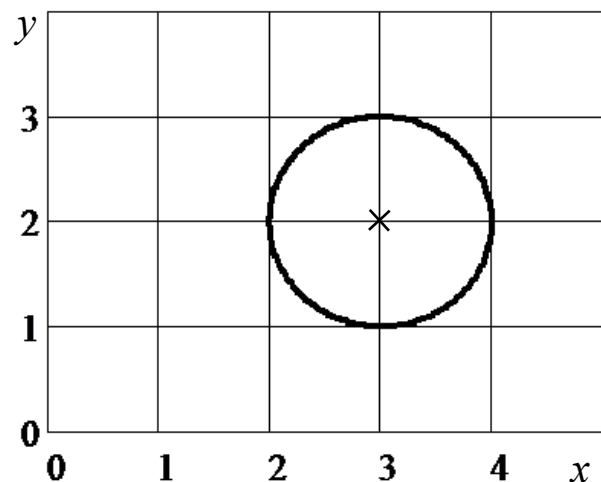


Рис. 2.8

Подобные преобразования правых частей дифференциальных уравнений легко осуществить с кривыми, симметричными относительно осей координат, или этими же кривыми, сдвинутыми от центра координат без поворота.

Если фигура повернута на какой-то угол, трудно предсказать поведение производной $\frac{dy}{d\varphi}$. В этом случае можно прибегнуть к замене переменных таким образом, чтобы оси ко-

ординат совпали с осями фигуры. Но этот метод значительно усложнит правые части дифференциальных уравнений. Поэтому предлагается избежать возвращения процесса обратно по только что построенной половине кривой добавлением к концу интервала интегрирования достаточно малой величины ε . В этом случае вычислительный процесс, дойдя до конца полуинтервала, «перешагнет» критическую точку на величину $\varepsilon/2$ и окажется на второй половине фигуры. При дальнейшем увеличении значения φ программа продолжит построение фигуры по этой второй половине.

Пример 2.5.

Рассмотрим пример построения окружности радиуса $R = 1$ с центром в начале координат.

Запишем дифференциальные уравнения для построения такой окружности в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\varphi} &= \cos \varphi; \\ \frac{dy}{d\varphi} &= -\frac{x \cdot \cos \varphi}{y} \end{aligned} \tag{2.2.41}$$

с начальными условиями (2.2.39).

Интегрировать эту систему будем в интервале $\varphi \in [0, 2\pi + \varepsilon]$, где $\varepsilon = 0,0001$.

Результаты интегрирования совпадают с результатами, полученными в Примере 2.4, что подтверждает правильность предложенного подхода.

Проверим правильность предлагаемого подхода, подсчитав площадь круга S и длину окружности L . Для этого согласно [8] введем в систему (2.2.41) третье уравнение:

$$\frac{dS}{d\varphi} = y \cdot \cos \varphi$$

с начальным условием $S(0) = 0$ для вычисления площади круга и четвертое уравнение:

$$\frac{dL}{d\varphi} = \sqrt{\cos^2 \varphi + \left(-\frac{x \cdot \cos \varphi}{y}\right)^2}$$

с начальным условием $L(0) = 0$ для вычисления длины окружности.

В результате интегрирования построенной системы четырех дифференциальных уравнений получены следующие значения:

$$S = 3,1417 = \pi \cdot 1^2; \quad L = 6,2833 = 2\pi \cdot 1,$$

что полностью подтверждает правильность приведенного выше подхода.

2.3. Методы исследования неявных функций

Пусть дана неявная функция (2.2.1), не содержащая особых точек [14]. Требуется определить область существования и точки экстремума полученной на ее основе функции $y = y(x)$.

Общий вид функции (2.2.1) с характерными точками и графическим представлением производной $y'(x)$ в этих точках приведен на Рис. 2.10.

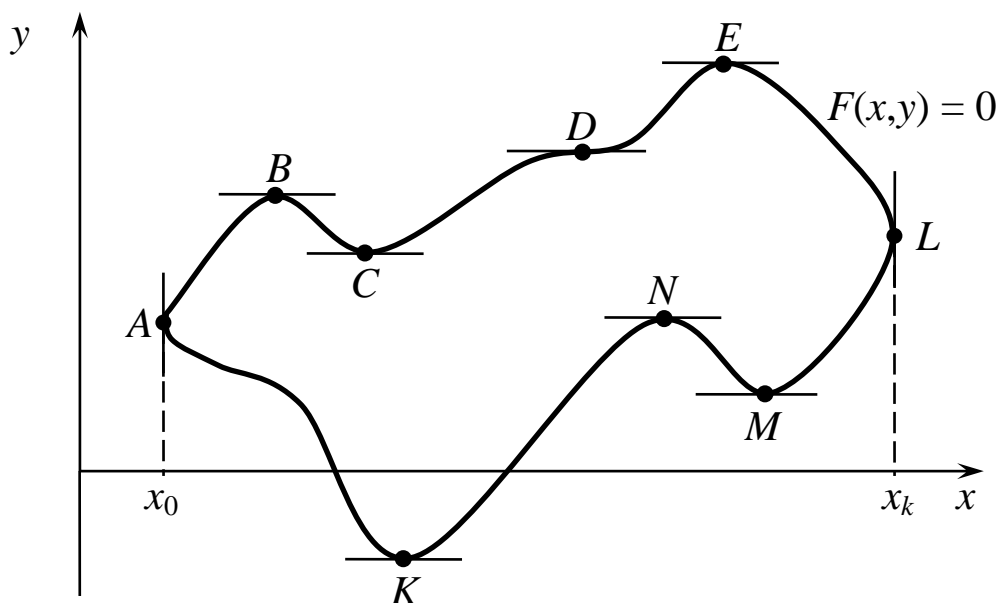


Рис. 2.10

Здесь в точках A и L значения производной функции $y = y(x)$ будут равны:

$$y'(x_A) = \infty; \quad y'(x_L) = \infty. \quad (2.3.1)$$

В остальных точках, согласно необходимым условиям экстремума [8, 12], значения производных этой функции:

$$y'(x_j) = 0, \quad j \in \{B, C, D, E, M, N, K\}. \quad (2.3.2)$$

Для решения сформулированных выше задач будем использовать выражения (1.1.1), (2.1.9) и (2.1.10).

Из выражения (2.1.9):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

следует, что условие (2.3.1) будет выполнено в некоторой точке (x, y) , где:

$$F'_y(x, y) = 0. \quad (2.3.3)$$

Тогда координаты точек A и L определяются путем решения следующей системы нелинейных уравнений 2-го порядка известными численными методами [1-5]:

$$\begin{aligned} F'_y(x, y) &= 0; \\ F(x, y) &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

при различных начальных приближениях.

В результате определения ее корней область изменения аргумента функции $y = y(x)$ будет описываться интервалом $[x_A, x_L] = [x_0, x_k]$.

Для определения координат точек, подозрительных на экстремум (стационарных точек), удовлетворяющих условию (2.3.2), необходимо численно решать систему уравнений:

$$\begin{aligned} F'_x(x, y) &= 0; \\ F(x, y) &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

при различных начальных приближениях.

В найденных точках (x_j, y_j) применяются известные достаточные условия экстремума с привлечением второй производной $y''(x)$ [8, 12], которая с использованием выражения (2.1.10) записывается как:

$$y''(x, y) = \left[2F'_x(x, y)F'_y(x, y)F''_{xy}(x, y) - F'^2_y(x, y)F''_{xx}(x, y) - F'^2_x(x, y)F''_{yy}(x, y) \right]. \quad (2.3.6)$$

При этом, если $y''(x_j, y_j) > 0$, то в этой точке функция $y = y(x)$ имеет минимум (см. точки C, M, K на Рис. 2.10). При значении $y''(x_j, y_j) < 0$ имеет место максимум функции $y = y(x)$ (см. точки B, E, N). Для значений $y''(x_j, y_j) = 0$ имеем точки перегиба функции $y = y(x)$, показанные на Рис. 2.10 точкой D .

Проиллюстрируем данный подход на модельном примере с использованием в качестве функции $F(x, y) = 0$ выражения (2.2.17):

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Частные производные от этой функции будут равны:

$$\begin{aligned} F'_x(x, y) &= 2x; & F'_y(x, y) &= 2y; & F''_{xy}(x, y) &= 0; \\ F''_{xx}(x, y) &= 2; & F''_{yy}(x, y) &= 2. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Система уравнений (2.3.4) с использованием этих выражений записывается как:

$$\begin{aligned} 2y &= 0; \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему, получаем следующие корни:

$$(x_1, y_1) = (-1, 0); \quad (x_2, y_2) = (+1, 0).$$

Таким образом, функция $y = y(x)$ будет определена при $x \in [-1; +1]$.

Система уравнений (2.3.5) с учетом выражений (2.3.7) конкретизируется следующим образом:

$$2x = 0;$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Корнями этой системы являются координаты

$$(x_1, y_1) = (0, +1); \quad (x_2, y_2) = (0, -1), \quad (2.3.8)$$

которые описывают стационарные точки функции $y = y(x)$.

Для наличия в них различных видов экстремума конкретизируем выражение (2.3.6), подставив в него производные (2.3.7).

Проводя несложные преобразования, получаем, что:

$$y''(x, y) = -\frac{1}{y^3}.$$

Подставляя в это выражение значения (2.3.8) и анализируя соответствующие знаки, имеем, что в точке с координатами $(0, +1)$ функция $y = y(x)$ достигает максимума, а в точке $(0, -1)$ – минимума.

Эти результаты полностью соответствуют графикам, приведенным на Рис. 2.5.

Для функции $F(x, y)$ из Примера 2.2 система уравнений (2.3.4) записывается как:

$$2y - \cos y = 0;$$

$$y^2 - \sin y + xx = 0.$$

Решая ее методом Ньютона [5], получаем корни:

$$x = 0,232; \quad y = 0,452.$$

Для рассматриваемой функции:

$$F(x, y) = y^2 - \sin y + x = 0$$

система (2.3.5) за счет того, что $F'_x(x, y) = 1$, является вырожденной. Последнее позволяет утверждать, что функция $y = y(x)$, определенная при $x \in [0,232; \infty]$, не имеет экстремальных точек.

Значительный класс неявных функций составляют алгебраические кривые на плоскости вида:

$$F(x, y) = a + b_1x + b_2y + c_1x^2 + 2c_2xy + c_3y^2 + \dots = 0. \quad (2.3.9)$$

Многочисленные примеры таких кривых приведены в работе [14].

Кривые (2.3.9) имеют особые точки, в которых выполняется условие:

$$F'_x(x, y) = 0; \quad F'_y(x, y) = 0. \quad (2.3.10)$$

Характер особой точки с координатами (x_0, y_0) в работе [14] предлагается определять путем решения квадратного уравнения:

$$F''_{yy}(x_0, y_0)y'^2 + 2F''_{xy}(x_0, y_0)y' + F''_{xx}(x_0, y_0) = 0, \quad (2.3.11)$$

в котором значения частных производных от функции (2.3.9) вычисляются в указанной точке.

Корни этого уравнения, которые описывают две касательные в точке (x_0, y_0) , могут быть действительными и различными («двойная точка» или «узел»), совпадающими («точка возврата» или «точка самоприкосновения») или мнимыми («изолированная точка»).

Пример 2.7.

Проведем исследование такой алгебраической кривой как «декартов лист» [14]:

$$F(x, y) = x^3 - 3xy + y^3 = 0. \quad (2.3.12)$$

Частные производные от этой функции имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} F'_x(x, y) &= 3x^2 - 3y; & F'_y(x, y) &= 3y^2 - 3x; \\ F''_{xx}(x, y) &= 6x; & F''_{yy}(x, y) &= 6y; & F''_{xy}(x, y) &= -3. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Используя конкретизацию с учетом (2.3.13) уравнения (2.3.10):

$$3x^2 = 0; \quad 3y^2 = 0,$$

имеем, что особой точкой функции (2.3.12) является точка с координатами $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Уравнение (2.3.11) с использованием значений производных (2.3.13) в этой точке примет вид:

$$-6y' = 0.$$

Откуда следует, что угол наклона касательной к формируемой функции $y = y(x)$ в точке $(0, 0)$ будет равен нулю.

Определим регулярные точки кривой (2.3.12), которые описывают двузначную область существования, и экстремальные точки искомой функции $y = y(x)$.

Решая систему уравнений (2.3.4) с использованием выражений (2.3.12) и (2.3.13) методом Ньютона [5] с начальным приближением $x^{(0)} = 10; y^{(0)} = 1$, получаем следующие корни:

$$x_1 = 1,5874; \quad y_1 = 1,2599.$$

Отсюда следует, что двузначная область существования функции $y = y(x)$ реализуется при $x \in [0; 1,5874]$.

Стационарные точки функции $y = y(x)$ определим из решения системы уравнений (2.3.5), которая записывается как:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3y &= 0; \\ x^3 - 3xy + y^3 &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему указанным методом при $x^{(0)} = 10; y^{(0)} = 10$, получаем следующие корни:

$$x_2 = 1,2599; \quad y_2 = 1,5874.$$

Вычисляя по формуле (2.3.6) с использованием выражений (2.3.13) значения $y''(x_2, y_2)$, имеем, что в полученной точке функция $y = y(x)$ имеет максимум.

Построим вид этой функции, преобразовав выражение (2.3.12) в кубическое уравнение вида:

$$x_i^3 - 3x_i y + y^3 = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (2.3.14)$$

где x_i – задаваемые значения аргумента формируемой функции $y = y(x)$.

Для решения совокупности параметрических уравнений (2.3.14) будем использовать численный метод, позволяющий получать как действительные, так и мнимые корни алгебраического уравнения n -го порядка [5].

В Табл. 2.7 приведены результаты применения этого метода к уравнению (2.3.14) при $m = 12$.

Таблица 2.7

№	x	y		
1	-2	1,1071	—	—
2	-1	0,3222	—	—
3	0	0	0	0
4	0,10	-0,5494	0,0000	0,5460
5	0,25	-0,8763	0,0208	0,8554
6	0,50	-1,2645	0,0837	1,1807
7	0,75	-1,5862	0,1906	1,3956
8	1	-1,8794	0,3473	1,5321
9	1,2599	-2,1684	0,5810	1,5874
10	1,45	-2,3737	0,8344	1,5393
11	1,5874	-2,5198	1,2600	1,2600
12	2	-2,9514	—	—

График функции $y = y(x)$, построенный по этим результатам, представлен на Рис. 2.12.

Из приведенных данных следует, что особая и регулярные точки кривой (2.3.12), полученные расчетами и решением уравнения (2.3.14), полностью совпадают.

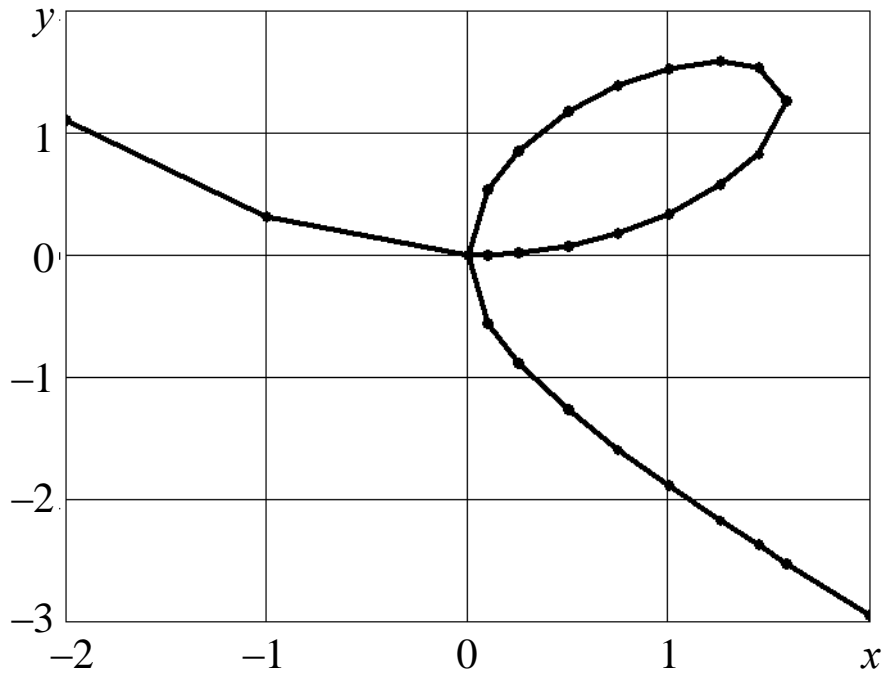


Рис. 2.12

2.4. Вычисление интегралов от неявных функций

Во многих прикладных задачах необходимо вычислять интегралы вида:

$$J_1 = \int_{x_0}^{x_k} \Phi(y(x)) dx; \quad J_2 = \int_{x_0}^{x_k} \Phi(y'(x)) dx. \quad (2.4.1)$$

Будем считать, что функция $y(x)$ задана уравнением (2.2.1), а $y'(x)$ – выражением (2.1.9).

Примером интеграла J_1 при $\Phi(y(x)) = y(x)$ является вычисление площади заштрихованной фигуры, представленной на Рис. 2.13.

Примером интеграла J_2 является выражение:

$$L = \int_{x_0}^{x_k} \sqrt{1 + y'^2(x)} dx, \quad (2.4.2)$$

определяющее, согласно [6, 8], длину участка кривой $y(x)$ на интервале $[x_0, x_k]$.

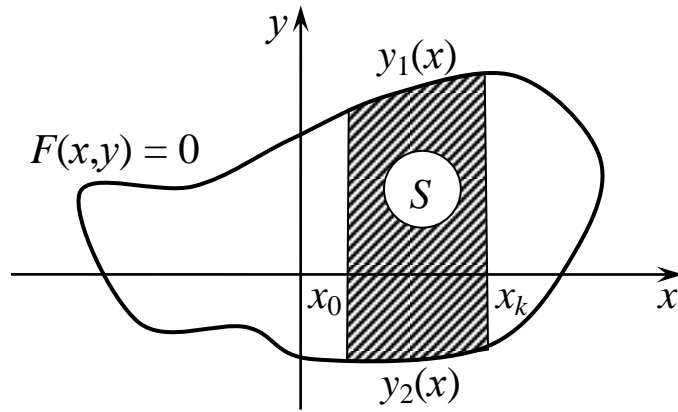


Рис. 2.13

Используя представление $y'(x)$ в форме выражения (2.1.9), формулу (2.4.2) можно, проводя несложные преобразования, представить как:

$$L = \int_{x_0}^{x_k} \frac{\sqrt{F_y'^2(x, y) + F_x'^2(x, y)}}{F_y'(x, y)} dx. \quad (2.4.3)$$

В результате получен интеграл, зависящий от параметра y , рассмотренный в Разд. 1.1.

Рассмотрим методы вычисления интеграла J_1 , описываемого первым выражением из состава формул (2.4.1).

Для его вычисления будем использовать дифференциальное уравнение (2.1.9):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x'(x, y)}{F_y'(x, y)}, \quad (2.4.4)$$

с различными начальными условиями.

Для однозначных функций $y = y(x)$, $x \in [x_0, x_k]$ начальное условие имеет вид:

$$y(x_0) = y_0. \quad (2.4.5)$$

Значение правой части этого условия определяется из численного решения уравнения:

$$F(x_0, y) = 0. \quad (2.4.6)$$

Будем рассматривать искомое значение J_1 как интеграл с переменным верхним пределом:

$$J_1(x) = \int_{x_0}^x \Phi(y(z)) dz. \quad (2.4.7)$$

Тогда из выражения (1.1.15) следует, что:

$$\frac{dJ_1}{dx} = \Phi(y(x)). \quad (2.4.8)$$

Из интеграла (2.4.7) следует, что начальное условие для этого дифференциального уравнения примет следующий вид:

$$J_1(x_0) = 0. \quad (2.4.9)$$

Искомое значение интеграла J_1 определяется как значение функции $J_1(x)$ при $x = x_k$, полученной путем решения системы уравнений (2.4.4), (2.4.8) при начальных условиях (2.4.5) и (2.4.9).

Для вычисления площади S криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = y(x)$ при $x \in [x_0, x_k]$, решается следующая задача Коши:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}; & \frac{dS}{dx} &= y; & x &\in [x_0, x_k]; \\ y(x_0) &= y_0; & S(x_0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

При этом искомое значение площади S получается из решения этой задачи как:

$$S = S(x_k).$$

Если $y(x)$ на интервале $[x_0, x_k]$ является двузначной функцией (см. Рис. 2.13), то для вычисления площади S используется интеграл вида:

$$S = \int_{x_0}^{x_k} (y_1(x) - y_2(x)) dx,$$

который представим как:

$$S = S_1 - S_2 = \int_{x_0}^{x_k} y_1(x) dx - \int_{x_0}^{x_k} y_2(x) dx. \quad (2.4.11)$$

В этом случае решаются две задачи Коши:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= -\frac{F'_x(x, y_1)}{F'_y(x, y_1)}; \quad \frac{dS_1}{dx} = y_1; \quad y_1(x_0) = y_{1,0}; \quad S_1(x_0) = 0. \\ \frac{dy_2}{dx} &= -\frac{F'_x(x, y_2)}{F'_y(x, y_2)}; \quad \frac{dS_2}{dx} = y_2; \quad y_2(x_0) = y_{2,0}; \quad S_2(x_0) = 0. \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

Здесь значения $y_{1,0}$ и $y_{2,0}$ – два решения уравнения вида (2.4.6). Искомое значение площади S на основе решений этих задач вычисляется из выражения вида:

$$S = S_1(x_k) - S_2(x_k). \quad (2.4.13)$$

Если точки с координатами x_0, x_k совпадают с точками A и L (см. Рис. 2.11), то начальные условия в задачах (2.4.12) примут вид:

$$y_1(x_0) = +\varepsilon; \quad y_2(x_0) = -\varepsilon. \quad (2.4.14)$$

При вычислении длины дуги L функции $y = y(x)$ должны быть заданы координаты (x_0, y_0) начала и (x_k, y_k) конца дуги (Рис. 2.14).

Здесь y_0 вычисляется путем решения уравнения (2.4.6), а для определения значения y_k решается уравнение:

$$F(x_k, y) = 0. \quad (2.4.15)$$

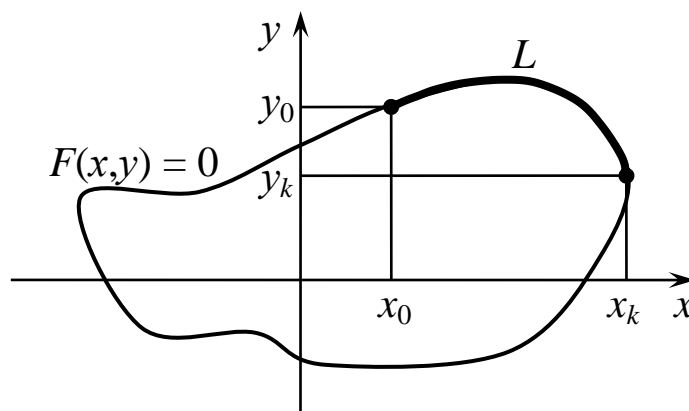


Рис. 2.14

Представим (2.4.3) в виде интеграла с переменным верхним пределом:

$$L(x) = \int_{x_0}^x \frac{\sqrt{F_y'^2(x, y) + F_x'^2(x, y)}}{F_y'(x, y)} dx. \quad (2.4.16)$$

Дифференцируя $L(x)$, получаем дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{dL}{dx} = \frac{\sqrt{F_y'^2(x, y) + F_x'^2(x, y)}}{F_y'(x, y)}. \quad (2.4.17)$$

Добавляя к нему дифференциальное уравнение (2.3.4), получаем систему уравнений 2-го порядка, которая интегрируется на интервале $[x_0, x_k]$ при следующих начальных условиях:

$$L(x_0) = 0; \quad y(x_0) = y_0. \quad (2.4.18)$$

При этом искомое значение длины кривой $y(x)$ при $x \in [x_0, x_k]$ с использованием решения $L(x)$ этой системы будет равно:

$$L = L(x_k).$$

При задании замкнутой кривой в параметрической форме вида (2.2.29) ее площадь и длина вычисляются по следующим формулам [8]:

$$S = \int_{\varphi_0}^{\varphi_k} y(\varphi) x'(\varphi) d\varphi; \quad (2.4.19)$$

$$L = \int_{\varphi_0}^{\varphi_k} \sqrt{x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi)} d\varphi. \quad (2.4.20)$$

При вычислении S используется система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\varphi} &= \frac{x_k - x_0}{2} \cos \varphi; \\ \frac{dy}{d\varphi} &= -\frac{F'_x(x, \varphi)}{F'_y(x, \varphi)}; \\ \frac{dS}{d\varphi} &= y \cdot \frac{x_k - x_0}{2} \cos \varphi,\end{aligned}\tag{2.4.21}$$

а для определения величины L – система вида:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\varphi} &= \frac{x_k - x_0}{2} \cos \varphi; \\ \frac{dy}{d\varphi} &= -\frac{F'_x(x, \varphi)}{F'_y(x, \varphi)}; \\ \frac{dL}{d\varphi} &= \sqrt{\left(\frac{x_k - x_0}{2} \cos \varphi\right)^2 + \left(-\frac{F'_x(x, \varphi)}{F'_y(x, \varphi)}\right)^2}.\end{aligned}\tag{2.4.22}$$

Пример 2.8.

Рассмотрим пример определения площади замкнутой части декартова листа и длины кривой, ограничивающей эту часть (см. Рис. 2.12).

Для составления системы дифференциальных уравнений вида (2.3.10) воспользуемся описанной выше тригонометрической подстановкой:

$$x(\varphi) = \frac{1}{2} [x_0 + x_k + (x_k - x_0) \sin \varphi],$$

где x_0, x_k – соответственно границы интервала по оси x , в котором существует рассматриваемая замкнутая фигура.

Как следует из Примера 2.7, значения $x_0 = 0, x_k = 1,5874$. Тогда тригонометрическая подстановка конкретизируется как:

$$x(\varphi) = 0,7937(1 + \sin \varphi).$$

Подставляя сюда $\varphi = 0$, получаем $x(0) = 0,7937$.

Для получения координаты y в этой точке подставим это значение в уравнение (2.4.6) и решим его относительно y . Получим $y(0) = 1,4248$. Найденные значения являются начальными условиями для системы дифференциальных уравнений, с помощью которой осуществляется построение замкнутой части декартова листа:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\varphi} &= 0,7937 \cos \varphi; \\ \frac{dy}{d\varphi} &= \frac{y - x^2}{y^2 - x} \cdot 0,7937 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

Решение этой системы дифференциальных уравнений на интервале $\varphi \in [0, 2\pi + \varepsilon]$ показано в Табл. 2.8 и на Рис. 2.15, где $\varepsilon = 0,0001$.

Таблица 2.8

φ , град	x	y
0	0,794	1,425
36	1,260	1,587
72	1,549	1,434
108	1,549	1,045
144	1,260	0,581
180	0,794	0,214
216	0,327	0,036
252	0,039	0
288	0,039	0,341
324	0,327	0,972
360	0,794	1,425

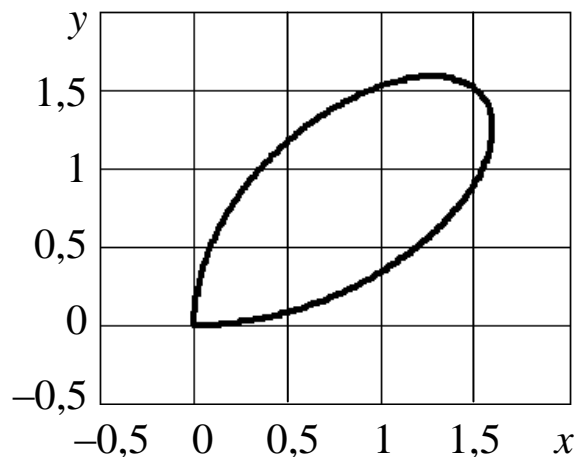


Рис. 2.15

Для определения площади этой фигуры согласно выражениям (2.4.21) добавим к системе (2.4.23) еще одно уравнение:

$$\frac{dS}{d\varphi} = y \cdot 0,7937 \cos \varphi$$

с начальным условием $S(0) = 0$.

В результате решения полученной системы трех дифференциальных уравнений имеем $S = S(2\pi) = 1,5$, что полностью совпадает со значением, приведенным в работе [8].

Для определения длины замкнутой кривой декартова листа, согласно (2.4.22), добавим к системе (2.4.23) уравнение:

$$\frac{dL}{d\varphi} = \sqrt{(0,7937 \cos \varphi)^2 + \left(\frac{y - x^2}{y^2 - x} \cdot 0,7937 \cos \varphi \right)^2}$$

с начальным условием $L(0) = 0$.

В результате решения этой системы трех дифференциальных уравнений имеем $L = L(2\pi) = 4,920$.

2.5. Применение неявных функций при решении дифференциальных уравнений и задач вариационного исчисления

В работе [6] отмечается, что часто в прикладных задачах составленное дифференциальное уравнение имеет вид выражения:

$$F(x, y, y') = 0, \quad x \in [x_0, x_k],$$

которое невозможно преобразовать к классическому представлению:

$$y' = f(x, y).$$

Существующие численные методы предлагают решать такое неявно заданное дифференциальное уравнение как значительную по объему систему нелинейных уравнений или с использованием конечно-разностной схемы большой размерности [3].

Для сокращения трудоемкости получения интегральной кривой $y = y(x)$, $x \in [x_0, x_k]$ решение неявного дифференциального уравнения предлагается осуществить путем численного решения системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = z; \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad x \in [x_0, x_k].$$

с начальными условиями:

$$y(x_0) = y_0; \quad z(x_0) = z_0.$$

При этом величина z_0 определяется из численного решения уравнения вида:

$$F(x_0, y_0, z) = 0.$$

Использование предложенного подхода позволяет наряду с искомой функцией $y = y(x)$ получать значения ее производной $y' = z(x)$, которые могут быть использованы при анализе процесса, для моделирования которого применяются неявные дифференциальные уравнения.

Проиллюстрируем этот подход на модельном уравнении вида:

$$F(x, y, y') = xy y' - 1 = 0, \quad x \in [2; 4];$$

$$y(2) = 3.$$

При $y' = z$ частные производные функции F будут равны:

$$F'_x(x, y, z) = yz; \quad F'_z(x, y, z) = xy.$$

Тогда приведенная выше система уравнений для нахождения функций $y(x)$ и $z(x)$ запишется как:

$$\frac{dy}{dx} = z; \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{z}{x}, \quad x \in [2; 4].$$

Эта система интегрируется при начальных условиях:

$$y(2) = 3; \quad z(2) = z_0,$$

где значение z_0 определяется из уравнения:

$$x_0 y_0 z = 1$$

и после подстановки в него значений $x_0 = 2, y_0 = 3$ дает значение $z_0 = 1/6 = 0,1666$.

На Рис. 2.16,*a* приведены графики полученных функций $y = y(x)$ и $y' = z(x)$.

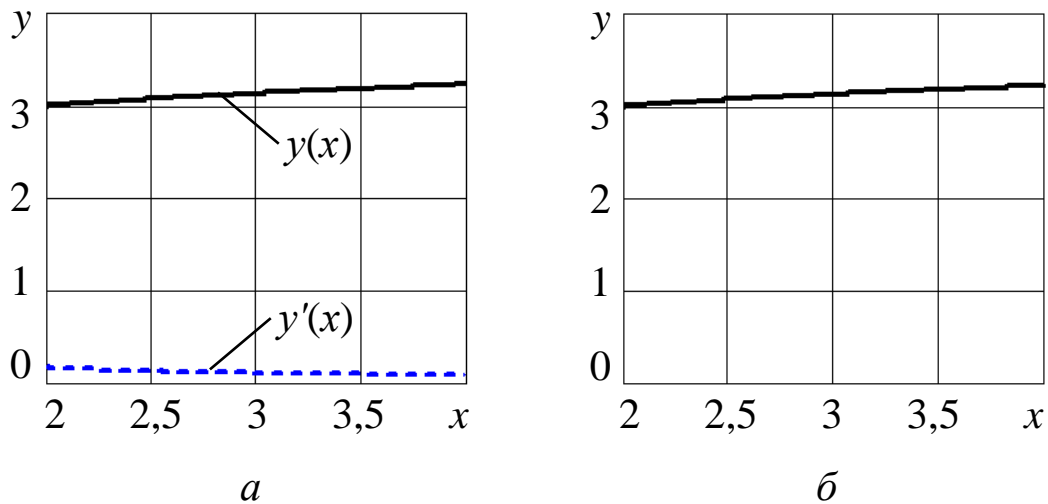


Рис. 2.16

Результат численного интегрирования классического уравнения:

$$y' = \frac{1}{xy}, \quad x \in [2,4];$$

$$y(2) = 3$$

представлен в виде графика на Рис. 2.16,б.

Сопоставление графиков искомой функции $y(x)$ показывает их полное совпадение.

Рассмотрим простейшую вариационную задачу [14, 15]:

Требуется найти функцию $y = y(x)$, доставляющую минимум (максимум) функционалу:

$$J = \int_{x_0}^{x_k} \Phi(x, y, y') dx \quad (2.5.1)$$

при выполнении заданных начальных условий:

$$y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y'_0. \quad (2.5.2)$$

Искомая функция является решением дифференциального уравнения Эйлера [15]:

$$\Phi'_y - \frac{d}{dx} \Phi'_{y'} = 0, \quad (2.5.3)$$

где:

$$\Phi'_y = \frac{\partial}{\partial y} \Phi(x, y, y'); \quad \Phi'_{y'} = \frac{\partial}{\partial y'} \Phi(x, y, y'). \quad (2.5.4)$$

Это уравнение 2-го порядка в общем виде можно записать как:

$$f(x, y, y', y'') = 0. \quad (2.5.5)$$

Общее решение уравнения (2.5.3) имеет вид:

$$y = y(x, C_1, C_2). \quad (2.5.6)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются с использованием условий (2.5.2).

Отметим, что в практических задачах решение вида (2.5.6) путем интегрирования уравнения (2.5.5) удается получить в достаточно редких случаях.

В некоторых частных случаях функционала (2.5.1) удается упростить уравнение Эйлера (2.5.3) и найти его первый интеграл, представляющий собой функцию, которая не изменяется вдоль экстремали $y = y(x)$.

Известно, что для минимизации функционала вида:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \Phi(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx$$

используется система n дифференциальных уравнений Эйлера-Лагранжа [14, 15].

В этом случае система $2n$ первых интегралов задает решение этой задачи $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ в неявной форме.

Уравнение (2.5.3) имеет первый интеграл в следующих частных случаях функционала (2.5.1) [15]:

1. Функция Φ не зависит от y' . Уравнение Эйлера представляется как:

$$\Phi'_y(x, y) = 0. \quad (2.5.7)$$

2. Подынтегральная функция Φ имеет вид:

$$\Phi = \Phi(x, y').$$

Первый интеграл здесь записывается как:

$$\Phi'_{y'}(x, y') = C_1. \quad (2.5.8)$$

3. Для функции $\Phi = \Phi(y, y')$ первый интеграл имеет вид:

$$\Phi(y, y') - \Phi'_{y'}(y, y') \cdot y' = C_1. \quad (2.5.9)$$

Отметим, что выражения (2.5.7)-(2.5.9) задают в неявной форме искомую функцию $y = y(x)$.

Используем приведенный выше подход для построения этой функции и вычисления получаемого значения функционала (2.5.1).

Для первого интеграла вида (2.5.7) система дифференциальных уравнений будет иметь вид:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\Phi''_{yx}(x, y)}{\Phi''_{yy}(x, y)}; \quad \frac{dJ}{dx} = \Phi(x, y). \quad (2.5.10)$$

Эта система интегрируется на интервале $[x_0, x_k]$ при следующих начальных условиях:

$$y(x_0) = y_0; \quad J(x_0) = 0. \quad (2.5.11)$$

Искомое значение функционала (2.5.1) будет равно:

$$J = J(x_k). \quad (2.5.12)$$

Для первого интеграла вида (2.5.8) предварительно вычислим значение постоянной C_1 с использованием условий (2.5.2):

$$C_1^0 = \Phi'_{y'}(x, y'_0)$$

и рассмотрим функцию:

$$F(x, y') = \Phi'_{y'}(x, y') - C_1^0 = 0. \quad (2.5.13)$$

Введем обозначение:

$$y' = z \quad (2.5.14)$$

и перепишем (2.5.13) как:

$$F(x, z) = 0.$$

Функцию $z = z(x)$ будем определять из решения дифференциального уравнения:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{F'_x(x, z)}{F'_z(x, z)} \quad (2.5.15)$$

с начальным условием:

$$z(x_0) = y'_0 \quad (2.5.16)$$

Для дифференциального уравнения (2.5.14) имеем начальное условие вида:

$$y(x_0) = y_0. \quad (2.5.17)$$

Для вычисления значения функционала задачи будем использовать дифференциальное уравнение:

$$\frac{dJ}{dx} = \Phi(x, z), \quad x \in [x_0, x_k] \quad (2.5.18)$$

с начальным условием:

$$J(x_0) = 0. \quad (2.5.19)$$

Тогда построение экстремали $y = y(x)$ и вычисление получаемого при этом значения функционала сводится к численному интегрированию системы уравнений (2.5.14), (2.5.15), (2.5.18). При этом функционал вычисляется с использованием выражения (2.5.12).

Рассмотрим реализацию первого интеграла вида (2.5.9).

Особенностью этого выражения является отсутствие в нем аргумента x .

Определим с помощью начальных условий задачи (2.5.2) константу C_1 в формуле (2.5.9) как:

$$C_1^0 = \Phi(y_0, y'_0) - y'_0 \Phi'_{y'}(y_0, y'_0). \quad (2.5.20)$$

Представим интеграл в виде функции:

$$F(y, z) = \Phi(y, z) - z \Phi'_z(y, z) - C_1^0 = 0. \quad (2.5.21)$$

Здесь, как и выше, использовано обозначение:

$$y' = z. \quad (2.5.22)$$

Производная по x от функции (2.5.21) будет иметь вид:

$$F'_y(y, z)y' + F'_z(y, z)z' = 0.$$

Откуда с учетом (2.5.22) получаем:

$$z' = -\frac{zF'_y(y, z)}{F'_z(y, z)}. \quad (2.5.23)$$

С использованием выражения (2.5.21) частные производные F'_y и F'_z конкретизируются следующим образом:

$$\begin{aligned} F'_y(y, z) &= \Phi'_y(y, z) - z\Phi''_{zy}(y, z); \\ F'_z(y, z) &= \Phi'_z(y, z) - \Phi'_z(y, z) - z\Phi''_{zz}(y, z) = \\ &= -z\Phi''_{zz}(y, z). \end{aligned} \quad (2.5.24)$$

Тогда уравнение (2.5.23) примет вид:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\Phi'_y(y, z) - z\Phi''_{zy}(y, z)}{\Phi''_{zz}(y, z)}. \quad (2.5.25)$$

Формирование экстремали $y(x)$ и вычисление значения функционала решаемой вариационной задачи осуществляется путем численного решения системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= z; \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{\Phi'_y(y, z) - z\Phi''_{zy}(y, z)}{\Phi''_{zz}(y, z)}; \\ \frac{dJ}{dx} &= \Phi(y, z) \end{aligned} \quad (2.5.26)$$

с начальными условиями:

$$y(x_0) = y_0; \quad z(x_0) = y'_0; \quad J(x_0) = 0 \quad (2.5.27)$$

и последующего определения значения J как $J(x_1)$.

Пример 2.9.

Проиллюстрируем предлагаемый подход на решении ряда модельных вариационных задач.

Пусть задача (2.5.1), (2.5.2) конкретизируется следующим образом:

$$J = \int_0^4 \sin xy \, dx \rightarrow \min;$$
$$y(0) = 1; \quad y'(0) = 0.$$

Выражение (2.5.7) для этой задачи принимает вид:

$$\Phi'_y = x \cos xy.$$

Система дифференциальных уравнений (2.5.10) и начальные условия (2.5.11) для построения экстремали $y = y(x)$ и вычисления значения функционала J запишутся как:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x \cos xy}{\cos xy - x^2 \sin xy}; \quad (2.5.28)$$

$$\frac{dJ}{dx} = \sin xy; \quad x \in [0, 4].$$

$$y(0) = 1; \quad J(0) = 0. \quad (2.5.29)$$

Согласно выражению (2.5.12) значение функционала этой задачи определяется как:

$$J = J(4). \quad (2.5.30)$$

Результаты решения задачи (2.5.28)-(2.5.30) приведены в Табл. 2.9 и на Рис. 2.17.

Вариационная задача:

$$J = \int_1^4 x y'^2 \, dx \rightarrow \min;$$
$$y(1) = 5; \quad y'(1) = 0,5$$

имеет первый интеграл вида (2.5.8), который конкретизируется выражением:

$$2xy' = C_1.$$

Таблица 2.9

x	y	J
0	1	0
0,4	0,667	0,061
0,8	0,422	0,185
1,2	0,323	0,309
1,6	0,112	0,400
2,0	0,054	0,456
2,4	0,027	0,490
2,8	0,015	0,511
3,2	0,008	0,524
3,6	0,005	0,533
4	0,003	0,539

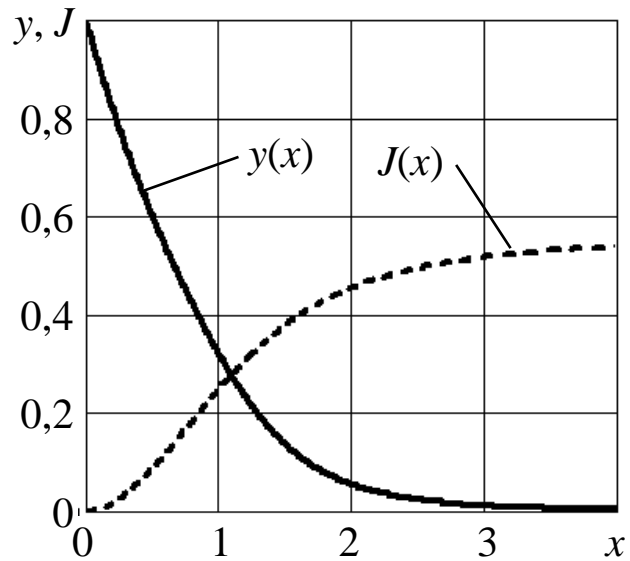


Рис. 2.17

Подставляя в него начальные условия задачи, имеем, что:

$$C_1^0 = 1.$$

Тогда функция (2.5.13) запишется как:

$$F(x, y') = 2xy' - 1 = 0. \quad (2.5.31)$$

Используя обозначение (2.5.14), получаем:

$$F(x, z) = 2xz - 1 = 0.$$

Построение экстремали $y = y(x)$ задачи и вычисление значения ее функционала осуществляется путем решения задачи Коши вида (2.5.14), (2.5.15), (2.5.18), (2.5.17), (2.5.16), (2.5.19), которая конкретизируется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= -\frac{z}{x}; & \frac{dJ}{dx} &= xz^2, & x \in [1, 4]; \\ y(1) &= 5; & z(1) &= 0,5; & J(1) &= 0. \end{aligned} \quad (2.5.32)$$

Следуя традиционному подходу, из выражения (2.5.31) получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x}. \quad (2.5.33)$$

Интегрируя его при начальном условии $y(1) = 5$, получаем решение вида:

$$y(x) = \ln \sqrt{x} + 5.$$

Подставляя выражение (2.5.33) в функционал задачи, имеем:

$$\begin{aligned} J &= \int_1^4 x \left(\frac{1}{2x} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int_1^4 \frac{dx}{x} = \\ &= \frac{\ln 4 - \ln 1}{4} = \frac{\ln 4}{4} = 0,3466. \end{aligned}$$

Проинтегрируем второе уравнение системы (2.5.32) как уравнение с разделяющимися переменными [15]:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{z} &= -\frac{dx}{x}; \quad \ln z = -\ln x + \ln C; \\ \ln z &= \ln \left(\frac{C}{x} \right); \quad z(x) = \frac{C}{x}. \end{aligned}$$

Используя начальное условие $z(1) = \frac{1}{2}$, получаем следующее значение постоянной интегрирования:

$$C^0 = \frac{1}{2}.$$

Тогда с учетом первого уравнения системы (2.5.32) и выражения (2.5.33) имеем:

$$z(x) = \frac{1}{2x} = y'(x).$$

Откуда следует, что результаты традиционного и предлагаемого подхода к решению задач вида (2.5.1), (2.5.2) являются полностью идентичными.

Пусть дана вариационная задача:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^2 (y^2 + y'^2) dx \rightarrow \min; \\ y(0) &= 4; \quad y'(0) = 2. \end{aligned} \tag{2.5.34}$$

Первый интеграл вида (2.5.9) решения этой задачи записывается как:

$$y^2 + y'^2 - 2y \cdot y' = C_1.$$

Используя выражения (2.5.20) и начальные условия задачи, имеем:

$$C_1^0 = 4.$$

Тогда функция (2.5.21) примет вид:

$$F(x,z) = y^2 + z^2 - 2yz - 4 = 0. \quad (2.5.35)$$

Здесь подынтегральная функция в выражении для функционала J представлена следующим образом:

$$\Phi(y,z) = y^2 + z^2.$$

Частные производные от этой функции будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \Phi'_y(y,z) &= 2y; & \Phi'_z(y,z) &= 2z; \\ \Phi''_{yz}(y,z) &= 0; & \Phi''_{zz}(y,z) &= 2. \end{aligned}$$

Тогда задача Коши (2.5.26), (2.5.27) конкретизируется следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= z; & \frac{dz}{dx} &= y; & \frac{dJ}{dx} &= y^2 + z^2, & x \in [0, 2]; & (2.5.36) \\ y(0) &= 4; & z(0) &= 2; & J(0) &= 0. \end{aligned}$$

Искомое значение функционала определяется как решение третьего уравнения системы в точке $x = 4$, т.е. $J = J(4)$.

При использовании традиционного подхода к решению рассматриваемой задачи применяется уравнение Эйлера (2.5.3), которое в форме (2.5.5) имеет вид:

$$y - y'' = 0. \quad (2.5.37)$$

Такое же дифференциальное уравнение второго порядка можно получить из первых двух уравнений системы (2.5.36) следующим образом.

Продифференцируем первое уравнение по x и используем в его правой части второе уравнение системы:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} = y.$$

Откуда следует, что $y'' - y = 0$.

Это говорит об идентичности традиционного и предложенного подходов к решению вариационных задач с первым интегралом вида (2.4.9).

Решение линейного дифференциального уравнения (2.4.37) с начальными условиями (2.5.34) известным методом [15] имеет вид:

$$y(x) = 3e^x + e^{-x}.$$

Отметим, что аналитическое вычисление значения функционала J для этой экстремали весьма затруднительно.

В заключение этого раздела рассмотрим применение предлагаемого подхода к численному решению неявного уравнения Эйлера (2.5.5).

Введем в решаемой задаче Коши:

$$F(x, y, y', y'') = 0, \quad x \in [x_0, x_k]; \quad (2.5.38)$$

$$y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y'_0 \quad (2.5.39)$$

новые переменные p и q следующим образом:

$$y' = p; \quad y'' = q, \quad (2.5.40)$$

где $p = p(x)$, $q = q(x)$ – искомые функции, связанные соотношением:

$$p' = q. \quad (2.5.41)$$

Тогда исходное дифференциальное уравнение примет вид:

$$F(x, y, p, q) = 0. \quad (2.5.42)$$

Из этого соотношения определим производную:

$$\frac{dq}{dx} = -\frac{F'_x(x, y, p, q)}{F'_q(x, y, p, q)}. \quad (2.5.43)$$

Используя выражения (2.5.40) и (2.5.41), запишем следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = p; \quad \frac{dp}{dx} = q. \quad (2.5.44)$$

Начальные условия для этих уравнений имеют вид:

$$y(x_0) = y_0; \quad p(x_0) = y'_0. \quad (2.5.45)$$

Начальное условие для дифференциального уравнения (2.5.43) записывается как:

$$q(x_0) = q_0. \quad (2.5.46)$$

Таким образом, задача построения экстремали $y(x)$ и вычисления значения функционала $J(y(x))$ сводится к интегрированию системы уравнений (2.5.43), (2.5.44) при начальных условиях (2.5.45) и (2.5.46).

2.6. Применение неявных функций для планирования траекторий движения БЛА

В работе [10] отмечается, что программные движения беспилотных вертолетов (БВ) должны осуществляться по требуемым для выполнения их полетных заданий траекториям. В этой монографии были приведены методы формирования таких траекторий в виде явных (классических) функций. В ней была отмечена необходимость применения для этих целей неявных функций, но не указаны методы их формирования, кроме выбора классических уравнений окружности и эллипса [8, 14].

Для многих применений БВ при полетах в горизонтальной плоскости xOy [10] рекомендуется использовать траекторию в форме «суперэллипса», описываемую уравнением вида:

$$F(x, z) = \frac{x^4}{a^4} + \frac{z^4}{b^4} - 1 = 0, \quad (2.6.1)$$

где a, b – его полуоси с центром в начале координат.

Определим площадь получаемой с помощью выражения (2.6.1) функции $z = z(x)$ фигуры и ее периметр. Отметим, что аналитическое получение этих характеристик классическими методами [12] весьма трудоемко.

Проведем исследование функции $z = z(x)$. Область определения этой функции, определяется решением системы уравнений вида (2.3.4), которая для выражения (2.6.1) принимает следующий вид:

$$\frac{4z^3}{b^4} = 0; \quad \frac{x^4}{a^4} + \frac{z^4}{b^4} - 1 = 0. \quad (2.6.2)$$

Откуда имеем, что функция $z(x)$ является двузначной функцией со следующими значениями координат крайних точек:

$$z_0 = 0; \quad x_0 = -a; \quad z_k = 0; \quad x_k = +a. \quad (2.6.3)$$

Точки, подозрительные на экстремум, определенные из системы уравнений вида (2.3.5):

$$\frac{4x^3}{a^4} = 0; \quad \frac{x^4}{a^4} + \frac{z^4}{b^4} - 1 = 0$$

имеют следующие координаты:

$$x^* = 0; \quad z^* = \pm b. \quad (2.6.4)$$

Нетрудно с помощью выражения вида (2.3.6) показать, что в точке $(0, +b)$ функция $z = z(x)$ достигает максимума, а в точке $(0, -b)$ – минимума.

В связи с тем, что согласно выражениям (2.6.2) и (2.6.3) производная $F'_z(x_0, z_0) = 0$, для построения функции $z(x)$ используется задача Коши вида (2.2.15), (2.2.24), которая конкретизируется как:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x^3}{z^3}; \quad z(-a) = \pm \varepsilon, \quad x \in [-a, +a]. \quad (2.6.5)$$

Пример 2.10

Пусть БВ должен провести мониторинг земной (надводной) поверхности в квадрате (2×2) км, облетая его по периметру. Для описания такой траектории будем использовать маневренную систему координат Mxz [10] с началом в центре контролируемого квадрата.

В этом случае уравнение (2.6.1) примет следующий вид:

$$x^4 + z^4 - 1 = 0. \quad (2.6.6)$$

Вычислим площадь получаемой фигуры и длину ее границы в километрах.

Характерные точки этой кривой, согласно выражениям (2.6.3) и (2.6.4) имеют следующие координаты:

$$\begin{aligned} (x_0, z_0) &= (-1, 0) \text{ км}; & (x_k, z_k) &= (+1, 0) \text{ км}; \\ (x_{\max}, z_{\max}) &= (0, +1) \text{ км}; & (x_{\min}, z_{\min}) &= (0, -1) \text{ км}. \end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения, описывающие задачу с использованием тригонометрической подстановки вида $x = \sin \varphi$, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\varphi} &= \cos \varphi; \\ \frac{dy}{d\varphi} &= -\frac{\sin^3 \varphi \cdot \cos \varphi}{y^3}; \\ \frac{dS}{d\varphi} &= y \cdot \cos \varphi; \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

$$\frac{dL}{d\varphi} = \sqrt{\cos^2 \varphi + \left(-\frac{\sin^3 \varphi \cdot \cos \varphi}{y^3} \right)^2}$$

Интегрирование этой системы уравнений производится при начальных условиях:

$$x(0) = -1; \quad y(0) = \varepsilon; \quad S(0) = 0; \quad L(0) = 0. \quad (2.6.8)$$

Решение задачи Коши (2.6.7), (2.6.8) для $a = \mp 1$ км и $\varepsilon = 0,1$ приведены в Табл. 2.10 и на Рис. 2.18.

Таблица 2.10

φ, град.	x	y
0	0	-1
36	0,588	-0,969
72	0,951	-0,653
108	0,951	0,653
144	0,588	0,969
180	0,000	1
216	-0,588	0,969
252	-0,951	0,653
288	-0,951	-0,653
324	-0,588	-0,969
360	-0,000	-1

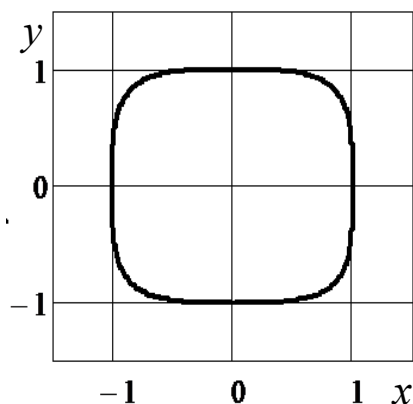


Рис. 2.18

$$S(360^\circ) = 3,707 \text{ км}^2;$$

$$L(360^\circ) = 6,832 \text{ км.}$$

В работе [10] предлагаются различные методы построения требуемых траекторий БВ по заданным значениям их начальных и конечных точек и углов направления вектора скорости. Вместе с тем на практике для описания траекторий используются их характерные точки, через которые обязательно должен пройти полет вертолета.

Потребуем, чтобы траектория его движения на постоянной высоте $y = h$ в горизонтальной плоскости, проходящая через ее характерные точки (ХТТ) с координатами (x_i, z_i) , $i = (\overline{1, n})$, имела замкнутый характер.

В общем случае траектория БВ задается неявной функцией:

$$F(x, z, a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n) = 0. \quad (2.6.9)$$

Здесь a_i – коэффициенты, подлежащие определению из решения системы уравнений вида:

$$F(x_i, z_i, a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n) = 0, \quad i = (\overline{1, n}). \quad (2.6.10)$$

В качестве функций (2.6.9) можно использовать алгебраические кривые на плоскости, описываемые выражением (2.3.9).

Пример 2.11.

Пусть в некоторой системе координат заданы три ХТТ БВ с координатами:

$$(x_1, z_1) = (0, 2; 1, 8) \text{ км};$$

$$(x_2, z_2) = (0, 7; 3, 0) \text{ км};$$

$$(x_3, z_3) = (0, 9; 1, 0) \text{ км}.$$

В качестве функции (2.6.9) будем использовать общее уравнение кривой 2-го порядка вида [14]:

$$a_1 x^2 + 2a_2 xz + a_3 z^2 = 1. \quad (2.6.11)$$

Для получения значений коэффициентов a_i , $i = \overline{(1, 3)}$ будем решать следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$a_1 x_i^2 + 2a_2 x_i z_i + a_3 z_i^2 = 1, \quad i = \overline{(1, 3)}.$$

Численное решение этой системы дает следующие результаты:

$$a_1^0 = 3,7387; \quad a_2^0 = -1,4519; \quad a_3^0 = 0,5951. \quad (2.6.12)$$

Тогда неявное задание (2.6.11) требуемой траектории БЛА конкретизируется как:

$$3,7387x^2 - 1,4519xz + 0,5951z^2 = 1.$$

Область определения $[x_0, x_k] \times [z_0, z_k]$ функции $z = z(x)$, согласно выражению вида (2.3.4), формируется с учетом значений (3.6.11) из решения системы нелинейных уравнений:

$$a_2^0 x + a_3^0 z = 0;$$

$$a_1^0 x^2 + 2a_2^0 xz + a_3^0 z^2 = 1.$$

При значениях начальных приближений:

$$\bar{x} = \mp 10; \quad \bar{z} = \mp 8$$

получаем следующие значения корней системы:

$$x = \mp 2,713; \quad z = \mp 6,733.$$

Откуда следует, что:

$$[x_0, x_k] = [-2,713; +2,713]; \quad [z_0, z_k] = [-6,733; +6,733]$$

и, что центр фигуры, описываемой выражением (2.6.11), находится в начале координат.

Построение функции $z = z(x)$, $x \in [x_0, x_k]$ осуществляется путем решения задачи Коши с использованием тригонометрической подстановки вида:

$$x = \frac{x_k - x_0}{2} \sin \varphi = 2,713 \sin \varphi. \quad (2.6.13)$$

Задача Коши с учетом (2.6.12) и (2.6.13) запишется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\varphi} &= 2,713 \cos \varphi; \\ \frac{dy}{d\varphi} &= -\frac{3,7387 \cdot 2,713 \sin \varphi - 1,4519 y}{-1,4519 \cdot 2,713 \sin \varphi + 0,5951 y} \cdot 2,713 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2.6.14)$$

Начальными условиями этой задачи являются выражения:

$$x(0) = 0; \quad y(0) = -\sqrt{\frac{1}{a_3}} = -1,2963. \quad (2.6.15)$$

Тогда, решая задачу (2.6.14), (2.6.15) на интервале $0 \leq \varphi \leq 2\pi + \varepsilon$, где $\varepsilon = 0,01$, получим результаты, приведенные в Табл. 2.11 и на Рис. 2.19.

Таблица 2.11

φ, град.	x	y
0	0	-1,307
36,057	1,597	2,906
72,115	2,582	6,006
108,172	2,578	6,804
144,229	1,586	4,996
180,286	-0,014	1,274
216,344	-1,608	-2,937
252,401	-2,586	-6,022
288,458	-2,574	-6,800
324,516	-1,575	-4,973
360,573	0,027	-1,240

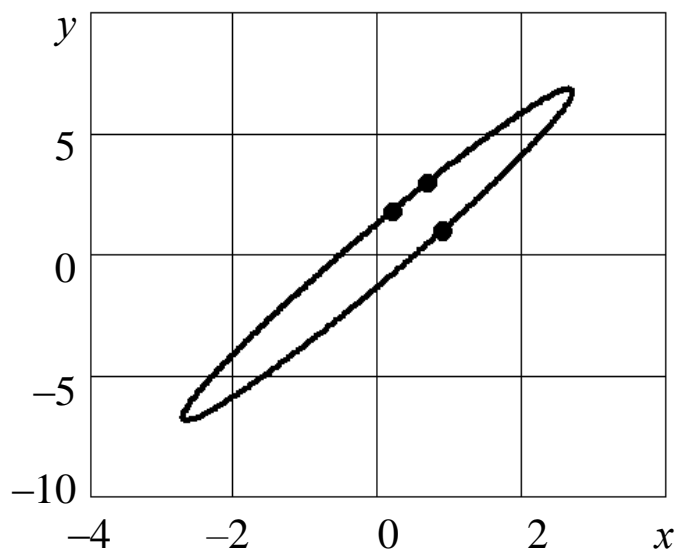


Рис. 2.19

На графике $y = y(x)$ в виде точек • показаны заданные ХТТ траектории полета вертолета.

Глава 3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Уравнения с параметрами достаточно давно рассматриваются как раздел элементарной алгебры [17, 18], в котором исследуется область значений параметра, при котором существует решение рассматриваемого уравнения.

Нелинейные алгебраические и трансцендентные параметрические уравнения используются в общем случае при получении решений задач параметрического нелинейного программирования, рассмотренных в работе [16]. Кроме этого, такие уравнения входят в состав систем, которые используются для нахождения векторов управления динамическими объектами методами теории обратных задач управления такими объектами [16].

Отметим, что в существующей литературе по вычислительной математике [1-5 и др.] отсутствуют численные методы решения нелинейных параметрических уравнений.

3.1. Применение существующих численных методов

В общем виде система нелинейных параметрических уравнений задается следующими выражениями:

$$F_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad t \in [t_1, t_k]. \quad (3.1.1)$$

Здесь t – некоторый параметр, при наличии которого искомые корни этой системы будут функциями вида:

$$x_1(t), x_2(t), \dots, x_j(t), \dots, x_n(t), \quad t \in [t_1, t_k].$$

Рассмотрение численных методов решения системы вида (3.1.1) начнем с разработки методов ее решения при $n = 1$.

Пусть необходимо решить следующее нелинейное параметрическое уравнение:

$$F(x, t) = 0, \quad t \in [t_1, t_k], \quad (3.1.2)$$

где t – некоторый скалярный параметр, который может принимать дискретное множество значений t_1, t_2, \dots, t_k или изменяться непрерывным образом в заданном интервале его значений $[t_1, t_k]$.

В первом случае для решения каждого уравнения:

$$F(x, t_i) = 0, \quad i = (\overline{1, k}), \quad (3.1.3)$$

можно воспользоваться существующими численными методами решения нелинейных уравнений, изложенными в работах [1-5 и др.]. Трудоемкость их использования будет пропорциональна числу k заданных значений параметра t .

При непрерывном изменении значения $t \in [t_1, t_k]$ существующий практический подход к решению уравнения (3.1.2) состоит в сведении ее к первому случаю, но со значительно более «густой» сеткой значений параметра t . В этом случае трудоемкость решения задачи за счет увеличения используемых значений параметра t резко возрастает.

Преимущество предлагаемого ниже метода состоит в сокращении числа итераций, необходимых для нахождения решения в каждом текущем узле сетки значений параметра t , за счет использования решения, полученного в предыдущем узле сетки [19].

Перепишем уравнение (3.1.3) в следующей форме:

$$F_i(x) = 0, \quad i = (\overline{1, k}), \quad (3.1.4)$$

где:

$$F_i(x) = F(x, t_i).$$

Предположим, что каждое уравнение $F_i(x) = 0$ из совокупности (3.1.4) имеет единственное решение $\xi_i \in [a, b]$ и $F_i(x) \neq F_j(x)$, ($i \neq j$) для всех $x \in [a, b]$, $i, j = (\overline{1, k})$.

Используем следующие результаты теоремы о сходимости метода Ньютона для решения этой задачи: «Если $F_i(a)F_i(b) < 0$,

а $F_i'(x)$, $F_i''(x)$ не равны нулю и сохраняют определенные знаки на отрезке $[a, b]$, то, исходя из начального приближения x_0 , удовлетворяющего неравенству $F_i'(x_0)F_i''(x_0) > 0$, по методу Ньютона, заданного формулой $x_{n+1}^{(i)} = x_n^{(i)} - \frac{F_i(x_n^{(i)})}{F_i'(x_n^{(i)})}$, можно вычислить единственный корень ξ_i уравнения $F_i(x) = 0$ с любой степенью точности» [1].

В качестве начального приближения x_0 выбирается тот конец отрезка $[a, b]$, которому отвечают ординаты $F_i(x_0)$ того же знака, что и знак производной $F_i''(x_0)$.

Будем считать известным значение искомого корня $x^{(i)}$ уравнения $F_i(x) = 0$ при фиксированном значении $i = (\overline{1, k})$. Положим $i = i + 1$ и рассмотрим ситуацию, представленную на Рис. 3.1.

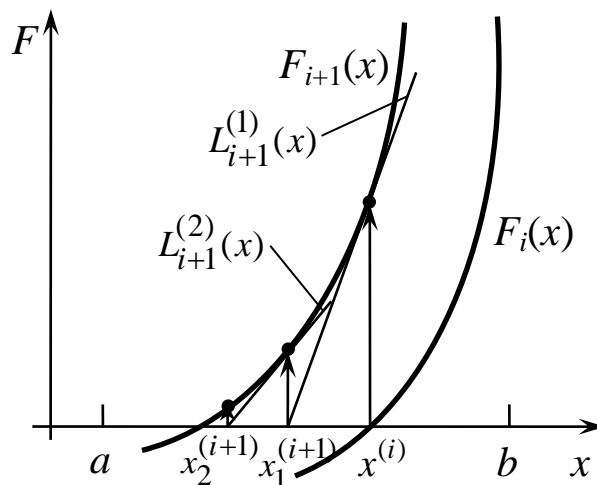


Рис. 3.1

Раскладывая левую часть уравнения:

$$F_{i+1}(x) = 0 \quad (3.1.5)$$

в ряд Тейлора в окрестности точки $x = x^{(i)}$ [8] с сохранением линейных членов, имеем:

$$F_{i+1}(x) = F_{i+1}(x^{(i)}) + F_{i+1}'(x^{(i)})(x - x^{(i)}).$$

Приравнивая к нулю правую часть этого выражения, получаем уравнение касательной $L_{i+1}^{(i)}(x)$ к кривой $F_{i+1}(x)$ в точке $x = x^{(i)}$, представленной на Рис. 3.1:

$$F_{i+1}(x^{(i)}) + F'_{i+1}(x^{(i)})(x - x^{(i)}) = 0.$$

Предполагая, что корень $x^{(i)}$ является нулевым приближением к искомому корню $x^{(i+1)}$, получим первое приближение к нему по формуле:

$$x_1^{(i+1)} = x_0^{(i+1)} - \frac{F_{i+1}(x_0^{(i+1)})}{F'_{i+1}(x_0^{(i+1)})}, \quad \text{где } x_0^{(i+1)} = x^{(i)}.$$

Если выполняются неравенства:

$$\left| F_{i+1}(x_1^{(i+1)}) \right| \leq \varepsilon, \quad \left| \xi^{(i+1)} - x_1^{(i+1)} \right| \leq \left| x_1^{(i+1)} - x_0^{(i+1)} \right| \leq \varepsilon,$$

где ε – требуемая точность решения уравнения (3.1.5), то данное приближение принимается за искомое решение уравнения $F_{i+1}(x) = 0$.

В противном случае в точке $x = x_1^{(i+1)}$ строится касательная $L_{i+1}^{(2)}(x)$ к кривой $F_{i+1}(x)$, которая описывается уравнением вида:

$$F_{i+1}(x_1^{(i+1)}) + F'_{i+1}(x_1^{(i+1)})(x - x_1^{(i+1)}) = 0$$

Из этого уравнения получаем формулу для вычисления второго приближения к корню $x^{(i+1)}$:

$$x_2^{(i+1)} = x_1^{(i+1)} - \frac{F_{i+1}(x_1^{(i+1)})}{F'_{i+1}(x_1^{(i+1)})}.$$

Обобщая этот процесс, запишем рекуррентную формулу для вычисления j -го приближения к искомому корню:

$$x_j^{(i+1)} = x_{j-1}^{(i+1)} - \frac{F_{i+1}(x_{j-1}^{(i+1)})}{F'_{i+1}(x_{j-1}^{(i+1)})}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (3.1.6)$$

Начальное условие для нее имеет вид:

$$x_0^{(i+1)} = x^{(i)}.$$

Общие условия завершения на j -й итерации процесса поиска корня $x^{(i+1)}$ записывается как:

$$\begin{aligned} |F_{i+1}(x_j^{(i+1)})| &\leq \varepsilon, \quad j=1,2,3,\dots \\ |\xi^{(i+1)} - x_j^{(i+1)}| &\leq |x_j^{(i+1)} - x_{j-1}^{(i+1)}| \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Для случая, когда кривые $F_i(x)$ могут пересекаться, следует применить рекуррентную процедуру, основанную на комбинированном численном методе, объединяющем метод Ньютона с методом хорд [1, 5].

Пример 3.1.

Пусть уравнение (3.1.2), имеющее вид:

$$F(x,t) = 2x - t^2 + 1 = 0,$$

необходимо решить при трех значениях t_1, t_2, t_3 параметра t таких, что:

$$t \in \{0; 2; 4\}.$$

Для этих значений необходимо решить 3 уравнения:

$$F_1(x,t) = 2x - t_1^2 + 1 = 0;$$

$$F_2(x,t) = 2x - t_2^2 + 1 = 0;$$

$$F_3(x,t) = 2x - t_3^2 + 1 = 0.$$

Применяя к этим уравнениям расчетную схему вида (3.1.6) при $F_i' = 2$, получаем решения вида:

$$x(0) = -0,5; \quad x(2) = 1,5; \quad x(4) = 7,5.$$

Если выражение (3.1.6) имеет вид алгебраического уравнения m -го порядка с координатами, зависящими от $t \in [t_1, t_2]$, то параметрическое уравнение может иметь множество решений, описываемых функциями $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \dots, x^{(m)}(t)$.

Проиллюстрируем это свойство таких уравнений на следующем примере.

Пример 3.2.

Пусть дано следующее параметрическое уравнение:

$$F(x, t) = (t - 1)x^2 + 2(2t + 1)x + (4t + 3) = 0,$$

которое необходимо решить на интервале значений параметра $t \in [-0,8; 1,0]$ с шагом $h = 0,2$.

Применение численного метода получения всех корней алгебраического уравнения [5] к каждому узлу сетки:

$$-0,8 < -0,6 < \dots < 0 < \dots < 0,8 < 1,0$$

дает значения функций $x^{(1)}(t)$ и $x^{(2)}(t)$, представленных в Табл. 3.1 и на Рис. 3.3.

Таблица 3.1

t	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$
-0,8	-0,333	-0,333
-0,6	-0,750	0,500
-0,4	-0,867	0,965
-0,2	-0,943	1,943
0	-1	3
0,2	-1,045	4,545
0,4	-2,082	7,082
0,6	-1,114	12,114
0,8	-1,142	27,142
1	-1,167	-1,167

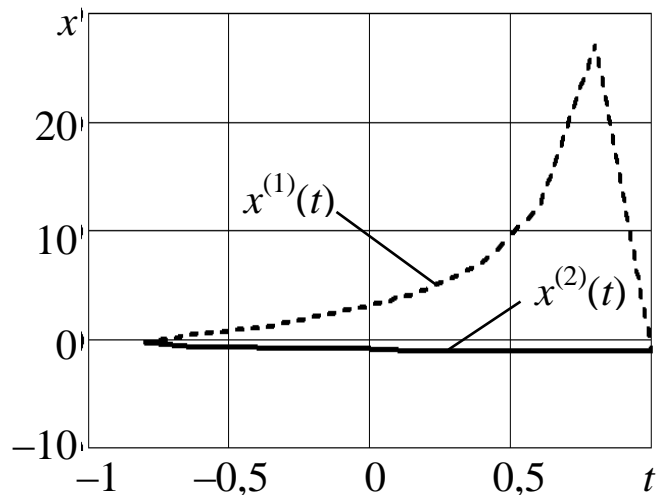


Рис. 3.3

Аналогично этим выражениям записывается расчётная схема для решения системы уравнений (3.1.1).

Для случая, когда по условиям решаемой задачи параметр t должен непрерывно изменяться в заданном интервале $[t_1, t_k]$, для решения уравнения (3.1.2) предлагается использовать метод, основанный на разложении левой части этого уравнения в ряд Тейлора с сохранением линейных членов разложения [19]. Проводя такое разложение в окрестности точки (t_{i-1}, x_{i-1}) , которая является решением уравнения (3.1.2) при $t = t_{i-1}$, имеем:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{i-1} (x - x_{i-1}) + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{i-1} (t - t_{i-1}) = 0. \quad (3.1.8)$$

Отсюда корень уравнения, решаемого при $t = t_i$, вычисляется как:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{i-1}}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{i-1}} (t_{i+1} - t_i). \quad (3.1.9)$$

При этом начальное приближение корня при $i = 1$ определяется из уравнения:

$$F(x, t_1) = 0.$$

Отметим, что для применения формулы (3.1.9) шаг сетки $h = t_{i+1} - t_i$ по параметру t должен быть достаточно малым.

Общая расчётная схема предлагаемого метода решения системы нелинейных параметрических уравнений вида (3.1.1) включает в себя следующие этапы [19]:

1. Строится сетка по параметру t с достаточно большим числом узлов, значения которых определяются как:

$$t_i = t_{i-1} + \Delta t, \quad i = \overline{1, k}, \quad \Delta t = \frac{t_k - t_0}{N},$$

где N – число узлов сетки на отрезке $[t_0, t_k]$.

2. Функции F_j раскладываются в ряд Тейлора в окрестности точки $(t_{i-1}, x_1^{(i-1)}, x_2^{(i-1)}, \dots, x_n^{(i-1)})$ с сохранением только линейных членов разложения:

$$F_j(t_{i-1}, x_1^{(i-1)}, x_2^{(i-1)}, \dots, x_n^{(i-1)}) + \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_r}\right)_{i-1} (x_r^{(i)} - x_r^{(i-1)}) + \left(\frac{\partial F_j}{\partial t}\right)_{i-1} (t_i - t_{i-1}) = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.1.10)$$

где:

$$\left(\frac{\partial F_j}{\partial x_r}\right)_{i-1} = \frac{\partial}{\partial x_r} F_j(t_{i-1}, x_1^{(i-1)}, x_2^{(i-1)}, \dots, x_n^{(i-1)}),$$

$$\left(\frac{\partial F_j}{\partial t}\right)_{i-1} = \frac{\partial}{\partial t} F_j(t_{i-1}, x_1^{(i-1)}, x_2^{(i-1)}, \dots, x_n^{(i-1)}).$$

Заметим, что выражение (3.1.8) является частным случаем соотношения (3.1.10) при $n = 1$.

3. Система (3.1.10) записывается в виде:

$$\sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_r}\right)_{i-1} \Delta x_r^{(i)} = - \left(\frac{\partial F_j}{\partial t}\right)_{i-1} \Delta t, \quad j = (\overline{1, n}), \quad (3.1.11)$$

где $\Delta x_r^{(i)} = x_r^{(i)} - x_r^{(i-1)}$, $\Delta t = t_i - t_{i-1}$, $r = (\overline{1, n})$.

4. Используя полученные одним из численных методов, рассмотренных в работах [1, 2, 5 и др.], решения $\Delta x_r^{(i)}$, $r = (\overline{1, n})$, системы линейных уравнений (3.1.11), находятся искомые решения $x_r^{(i)} = x_r(t_i)$, $r = (\overline{1, n})$ исходной нелинейной системы уравнений (3.1.1) по следующим рабочим формулам:

$$x_r^{(i)} = x_r^{(i-1)} + \Delta x_r^{(i)}, \quad i = (\overline{1, k}), \quad r = (\overline{1, n}). \quad (3.1.12)$$

Условие завершения на i -й итерации процесса поиска решения $x_r^{(i)}$ записывается как $|F_j(x_r^{(i)})| \leq \varepsilon$, $i = (\overline{1, k})$, $r = (\overline{1, n})$, $j = (\overline{1, n})$.

Преимущество данной процедуры состоит в сокращении числа итераций, необходимых для нахождения решения системы (3.1.1) в каждом узле достаточно «густой» сетки значений параметра t , за счет использования решения, полученного в предыдущем узле сетки.

3.2. Применение сингулярных дифференциальных уравнений

Для решения нелинейных параметрических уравнений можно использовать метод малого параметра, предложенный в работе [13].

Пусть требуется получить решение $x = x(t)$, $t \in [t_1, t_k]$ уравнения (3.1.2). Данный метод предполагает замену этого уравнения сингулярно возмущенным дифференциальным уравнением вида:

$$\mu \frac{dx}{dt} = F(x, t), \quad (3.2.1)$$

где $0 < \mu \ll 1$ – малый параметр.

Начальное условие при $t = \tau$ для этого уравнения запишется как:

$$x(\tau, \mu) = x_0. \quad (3.2.2)$$

Применение метода малого параметра при решении уравнения (3.1.2) обосновывается следующим утверждением, полученным на основе результатов работы [13]:

«Корень $x^* = x^*(t)$, полученный путем решения задачи Коши (3.2.1), (3.2.2), будет устойчиво стремиться к искомому решению $x^0 = x^0(t)$ при выполнении следующего условия:

$$F'_x(x^*(t), t) < 0, \quad (3.2.3)$$

где F'_x – частная производная функции F по переменной x ».

Для выполнения этого условия выражение (3.1.2) может при необходимости быть переписано в форме:

$$-F(x, t) = 0.$$

Тогда уравнение (3.2.1) примет вид:

$$\mu \frac{dx}{dt} = -F(x, t).$$

Начальная точка (τ, x_0) интегральной кривой $x = x(t)$ уравнения (3.2.1) выбирается, исходя из условий:

$$\tau < t_1, F'_x(x_0, \tau) < 0. \quad (3.2.4)$$

Промежуток (τ, t_0) , на котором реализуется быстрое изменение решения задачи Коши (3.2.1), (3.2.2) от начального значения x_0 до значений, близких к $x^*(t)$, называется пограничным слоем. Множество значений (τ, x_0) , удовлетворяющих условиям (3.2.4), называется областью притяжения корня $x^*(t)$ [13].

На Рис. 3.2 представлено поведение решений задачи Коши (3.2.1), (3.2.2) при различных значениях τ и x_0 .

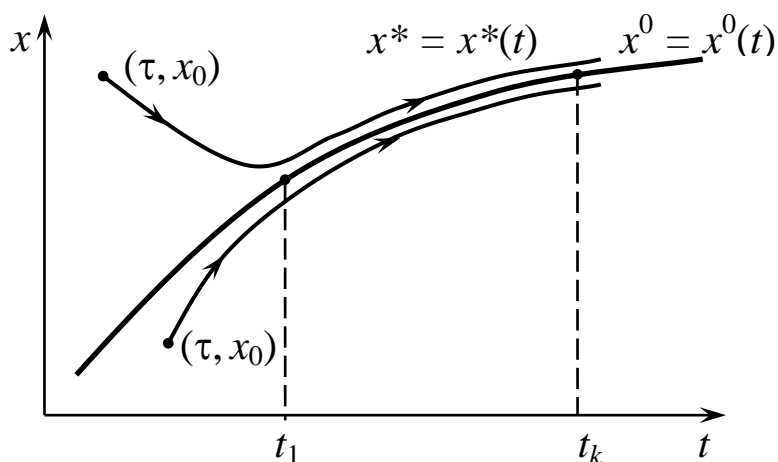


Рис. 3.2

Установлено [13], что при выборе любых начальных условий (3.2.2) из области притяжения можно получить путем интегрирования уравнения (3.2.1) приближенное решение $x^*(t)$ уравнения (3.1.2).

Это решение должно удовлетворять условию:

$$|F(x^*(t_1), t_1)| < \varepsilon, \quad (3.2.5)$$

где ε – требуемая точность решения уравнения (3.1.2).

Заметим, что для применения соответствующих численных методов интегрирования [1, 2, 5] уравнение (3.2.1) представляется в следующем виде:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\mu} F(x, t), \quad t \in [\tau, t_k]. \quad (3.2.6)$$

Таким образом, при использовании предлагаемого метода необходимо выполнить следующую последовательность действий:

1. Выбрать достаточно малое значение параметра μ .
2. Установить область притяжения решения задачи и выбрать начальные значения τ и x_0 , удовлетворяющие условиям (3.2.4).
3. Выбрать и реализовать численный метод интегрирования уравнения (3.2.6).
4. В процессе получения решения этого уравнения при $t = t_1$ проверять выполнение условия (3.2.5). При его выполнении процесс интегрирования продолжается до достижения параметром t значения t_k .

В противном случае процесс останавливается и производится с использованием неравенств (3.2.4) выбор новых значений τ и x_0 с повторным интегрированием уравнения (3.2.6). Последние действия выполняются до тех пор, пока не будет выполнено условие (3.2.5).

В работе [13] предлагается верхняя оценка значения малого параметра μ , которая в наших обозначениях имеет вид:

$$\mu \leq \frac{\varepsilon}{M} \left| \frac{F'_x(t_1, x(t_1))}{F'_t(t_1, x(t_1))} \right|, \quad (3.2.7)$$

где ε – требуемая точность решения уравнения (3.1.2); $M \geq 1$ – произвольная константа, значение которой выбирается заведомо бóльшим, чем значение модуля отношения производных F'_x и F'_t .

Пример 3.3.

В работе [13] сингулярное уравнение вида (3.2.6) было использовано для расчета связи полярных координат контура обрабатываемой детали и декартовой системы станка с ЧПУ.

Это уравнение в наших обозначениях записывается как:

$$\mu \frac{dx}{dt} = t - 0,75 \ln(x^2 + 1) \sin x,$$

где x – полярный угол; t – ордината декартовых технологических координат станка.

Известно, что параметр $t \in [-3,142; 2,528]$ рад.

Основные результаты численного интегрирования приведенного выше уравнения при $\mu = 0,01$ с начальным условием:

$$x(-3,142) = 0$$

представлены в Табл. 3.2.

Таблица 3.2

t	-3,142	-2,332	-1,522	-0,712	0,098	0,908	1,718	2,528
x	0	-1,011	-0,898	-0,201	0,001	0,356	1,020	0,863
ε	0,0012	0,0004	0,0014	0,0003	0,0022	0,0026	0,0039	0,0022

В этой таблице приведены вполне приемлемые для практики значения погрешности ε получения решения $x = x(t)$ с помощью дифференциального уравнения с малым параметром.

Аналогичный подход предлагается использовать при решении системы параметрических уравнений (3.1.1).

При его реализации формируется следующая система сингулярных уравнений [13]:

$$\mu \frac{dx_j}{dt} = F_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad j = (\overline{1, n}), \quad t \in [\tau, t_k] \quad (3.2.8)$$

с начальными условиями:

$$x_j(\tau) = x_{j0}, \quad j = (\overline{1, n}). \quad (3.2.9)$$

Для получения решения $x_1^* = x_1^*(t), x_2^* = x_2^*(t), \dots, x_n^* = x_n^*(t)$ этой задачи Коши, приближенно представляющего точные решения $x_1^0 = x_1^0(t), x_2^0 = x_2^0(t), \dots, x_n^0 = x_n^0(t)$ системы уравнений (3.1.1), выбираются начальные значения $\tau, x_{j0}, j = (\overline{1, n})$, удовлетворяющие неравенствам вида:

$$\tau < t_1, F_j'_{x_j}(\tau, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) < 0, j = (\overline{1, n}), \quad (3.2.10)$$

где $F_j'_{x_j}$ – частная производная функции $F_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ по переменной $x_j, j = (\overline{1, n})$.

Здесь, как и выше, для выполнения этих неравенств в правой части уравнений (3.2.8) некоторые функции $F_j, j \in (\overline{1, n})$ могут быть умножены на (-1) .

Величины $\tau, x_{j0}, j = (\overline{1, n})$ кроме выполнения условий (3.2.9) должны удовлетворять неравенству [13]:

$$\sum_{j=1}^n \left| F_j(x_1^*(t_1), x_2^*(t_1), \dots, x_n^*(t_1), t_1) \right| < \varepsilon, \quad (3.2.11)$$

обеспечивающему решение системы уравнений (3.1.1) при $t \in [t_1, t_k]$ с заданной точностью ε .

При решении этой системы методом малого параметра выполняется указанная выше последовательность действий, в которых используются выражения (3.2.8)-(3.2.11). В п.п. 3 и 4 этой последовательности используется представление системы дифференциальных уравнений (3.2.8) в следующей форме:

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{1}{\mu} F_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad j = (\overline{1, n}), \quad t \in [\tau, t_k]. \quad (3.2.12)$$

Основным достоинством применения метода малого параметра для решения линейных и нелинейных параметрических уравнений является возможность снизить трудоемкость процессов формирования искомых решений с привлечением

существующих численных методов интегрирования дифференциальных уравнений (3.2.6) или (3.2.12).

3.3. Применение методов построения неявных функций

Выражения (3.1.1) и (3.1.2) могут рассматриваться как неявные представления параметрических систем нелинейных уравнений и отдельных уравнений.

При условии, что параметр t непрерывно изменяется в заданном интервале его значений $[t_1, t_k]$ возможно использование методов, приведенных в Главе 2.

Рассмотрим подходы и особенности решения такими методами уравнения:

$$F(x, t) = 0, \quad t \in [t_1, t_k]. \quad (3.3.1)$$

Если это выражение задает однозначную функцию $x(t)$, которая является корнем уравнения при $t \in [t_1, t_k]$, то она формируется путем решения задачи Коши вида:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{F'_t(x, t)}{F'_x(x, t)}, \quad t \in [t_1, t_k]; \quad (3.3.2)$$

$$x(t_1) = x_0. \quad (3.3.3)$$

Здесь начальное значение x_0 является единственным корнем уравнения:

$$F(x, t_1) = 0. \quad (3.3.4)$$

Для уравнения (3.3.1), задающего двузначную функцию $x(t)$, его корни $x_1(t)$, $x_2(t)$, $t \in [t_1, t_k]$ также можно найти из решения дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_r}{dt} = -\frac{F'_t(x_r, t)}{F'_x(x_r, t)}, \quad t \in [t_1, t_k] \quad (3.3.5)$$

с начальными условиями:

$$x_r(t_1) = x_{r0}, \quad r = \overline{(1, 2)}, \quad (3.3.6)$$

где x_{10} и x_{20} – корни уравнения (3.3.4).

Проиллюстрируем предлагаемый подход на следующих примерах.

Пример 3.4.

Пусть требуется решить параметрическое уравнение из Примера 3.1 вида:

$$F(x,t) = 2x - t^2 + 1 = 0$$

при параметре t , изменяющемся в интервале его значений $[0, 4]$.

Аналитическое решение этого уравнения имеет вид:

$$\bar{x}(t) = 0,5(t^2 - 1), \quad t \in [0, 4].$$

Частные производные функции F записываются как:

$$F'_t(x,t) = -2t; \quad F'_x(t,x) = 2.$$

Тогда задача Коши (3.3.2), (3.3.3) конкретизируется следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = t; \quad x(0) = -0,5; \quad t \in [0, 4].$$

Численное решение этой задачи методом Рунге-Кутта и вычисленные значения функции $\bar{x}(t)$ приведены в Табл. 3.3.

Таблица 3.3

t	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$x(t)$	-0,5	-0,375	0	0,625	1,5	2,625	4	5,625	7,5
$\bar{x}(t)$	-0,5	-0,375	0	0,625	1,5	2,625	4	5,625	7,5

Пример 3.5.

Как показал вычислительный эксперимент в Примере 3.2, функция:

$$F(x,t) = (t-1)x^2 + 2(2t+1)x + (4t+3) = 0 \quad (3.3.7)$$

порождает двухзначную функцию $x(t)$ при значениях $t \in [-0,8; 1,0]$.

Решим для этой функции две задачи Коши (3.3.5), (3.3.6) при параметре t непрерывно изменяющегося в интервале $[-0,6; 1,0]$.

Применяемые частные производные имеют вид:

$$F'_t(x, t) = x^2 + 4x + 4;$$

$$F'_x(x, t) = 4t + 2(t - 1)x + 2.$$

Тогда уравнения (3.3.5) для определения корней $x_1(t)$ и $x_2(t)$ примут следующий вид:

$$\frac{dx_r}{dt} = -\frac{x^2 + 4x + 4}{4t + 2(t - 1)x + 2}, \quad (3.3.8)$$

$$r = (1, 2), \quad t \in [-0,6; 1,0]$$

Начальные условия (3.3.6) для интегрирования этих уравнений с использованием Табл. 3.1 конкретизируются как:

$$x_1(-0,6) = -0,75; \quad x_2(-0,6) = 0,5. \quad (3.3.9)$$

Результаты решения задач Коши (3.3.8), (3.3.9) приведены в Табл. 3.4.

Из сравнения Табл. 3.4 и Табл. 3.1 следует практически полное совпадение значений корней $x_1(t)$ и $x_2(t)$ на рассматриваемом интервале значений параметра t .

Исключением является значение функции $x_2(t)$ при $t = 1$.

Из выражения (3.5.7) следует, что при таком значении параметра квадратное параметрическое уравнение вырождается и превращается в линейное уравнение вида:

$$6x + 7 = 0,$$

которое имеет корень $x = -1,16667$.

Согласно Табл. 3.4 значение этого корня совпадает со значением $x_1(t)$ при $t = 1$, но значение $x_2(t)$ при $t \rightarrow \infty$ резко возрастает.

Важным для практического применения является частный случай уравнения (3.1.2), которое представляется параметрическим алгебраическим уравнением n -го порядка вида:

$$F(x, t) = \sum_{s=0}^n a_s(t)x^s = 0, \quad t \in [t_1, t_k]. \quad (3.3.10)$$

Таблица 3.4

t	x_1	x_2
-0,6	-0,750	0,500
-0,4	-0,867	1,153
-0,2	-0,943	1,943
0	-1,000	3,000
0,2	-1,045	4,545
0,4	-1,082	7,082
0,6	-1,114	12,144
0,8	-1,142	27,142
1	-1,167	-70931

Здесь $a_s(t)$ – непрерывные и дифференцируемые функции параметра t , $s = (\overline{0, n})$; $a_0(t)$ – свободный член уравнения.

Отметим, что данное представление отличается от форм записи таких уравнений, приведенных в работах [5, 8, 14 и др.].

Примером уравнения (3.3.10) при $n = 2$ является выражение (3.3.7).

При конкретном значении $t = t^*$ можно воспользоваться хорошо изученными свойствами и численными методами решения (см. Пример 3.2) классических алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами [5, 8, 14].

Приведем ряд практически значимых свойств таких уравнений [14]:

1°. Алгебраическое уравнение называется действительным, если все его n коэффициентов имеют значения в форме действительных чисел.

2°. Действительное уравнение n -й степени имеет не более n корней, включая комплексно-сопряженные корни. При этом уравнение нечетной степени всегда имеет хотя бы один действительный корень.

3°. Все корни уравнения (3.3.10) при фиксированном значении параметра t не превосходят по модулю числа:

$$N(t) = 1 + \frac{A(t)}{|a_n(t)|}, \quad (3.3.11)$$

где $A(t) = \max\{|a_1(t)|, |a_2(t)|, \dots, |a_{n-1}(t)|\}$, $t \in [t_1, t_2]$.

Отметим, что это выражение дано для представления алгебраических уравнений в форме (3.3.10).

4°. Число положительных корней действительного алгебраического уравнения либо равно числу $M(t)$ перемен знака в последовательности коэффициентов $a_0(t), a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)$, причем коэффициенты, равные нулю не учитываются; либо меньше числа $M(t)$ на четное число, $t \in [t_1, t_2]$.

При этом если в указанном интервале перемен знака нет, то уравнение не имеет положительных корней. Если в нем присутствует только одна перемен знака, то имеется один положительный корень.

Число отрицательных корней получается с использованием этого свойства при замене в выражении (3.3.10) переменной x на $(-x)$.

Проиллюстрируем это свойство на следующем примере:

Пример 3.6.

Для значения $t = t^* = 0$ уравнение (3.3.7), записанное в форме (3.3.10), примет следующий вид:

$$F(x, 0) = 3 + 2x - x^2 = 0.$$

Последовательность его коэффициентов один раз изменяет знак. То же самое произойдет при замене x на $(-x)$. Таким образом, при данном значении t уравнение имеет один положительный и один отрицательный корни.

Для применения оценки (3.3.11) при $a_0 = 3$; $a_1 = 2$; $a_2 = -1$ имеем, что $A = \max\{3, 2\} = 3$, $|a_2| = 1$. Тогда получим значение

$N = 4$. Значения корней приведенного выше уравнения $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$ не превышают значения N .

5°. Зависимость между корнями и коэффициентами уравнения (3.3.10) имеет вид [8]:

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 + \dots + x_n &= -\frac{a_1(t)}{a_n(t)}; \\
 x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n &= \frac{a_2(t)}{a_n(t)}; \\
 x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n &= -\frac{a_3(t)}{a_n(t)}; \quad (3.3.12) \\
 &\dots\dots\dots \\
 x_1x_2\dots x_n &= (-1)^n \frac{a_0(t)}{a_n(t)}, \quad t \in [t_1, t_2].
 \end{aligned}$$

Эти выражения могут рассматриваться как система нелинейных уравнений вида (3.3.1) для определения корней $x_1(t)$, $x_2(t), \dots, x_n(t)$ уравнения (3.3.10).

Приведенные выше свойства 1°-5° существенно влияют на число корней этого уравнения и, в конечном итоге, на многозначность неявной функции $x(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, формируемой уравнением (3.3.10).

В этой связи существенную роль играет связь нулей функций $a_s(t)$, $s = \overline{0, n}$ с рассматриваемым интервалом $[t_1, t_2]$.

Будем считать, что эти непрерывные функции являются монотонно возрастающими и убывающими, а при $t = \tau_s$ обращаются в нуль:

$$a_s(\tau_s) = 0, \quad s = \overline{0, n}. \quad (3.3.13)$$

Из выражений (3.3.12) следует, что при $\tau_n \in [t_1, t_2]$ свойство 5° не выполняется и число корней уравнения (3.3.10) в этой точке уменьшается.

Пример 3.7.

Пусть для функции (3.3.7) задан интервал $[0, 5]$ изменения параметра t .

Коэффициенты этого уравнения в представлении вида (3.3.10) имеют вид:

$$\begin{aligned}a_0(t) &= 4t + 3; & a_1(t) &= 2(2t + 1); \\ a_2(t) &= t - 1, & t &\in [0, 5].\end{aligned}$$

Из выражений (3.3.13) следует, что:

$$\tau_0 = -0,75; \quad \tau_1 = -0,5; \quad \tau_2 = 1.$$

Из этих результатов видно, что:

$$\tau_0 \notin [0, 5]; \quad \tau_1 \notin [0, 5]; \quad \tau_2 \in [0, 5].$$

Последнее означает, что соотношения (3.3.12) для $n = 2$:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= -\frac{2(2t + 1)}{t - 1}; \\ x_1 x_2 &= \frac{4t + 3}{t - 1}\end{aligned}$$

при $t = 1$ не выполняются.

Выше было показано, что при таком значении параметра t это уравнение имеет один корень.

Выполнение условий (3.3.12) для других функций $a_s(t)$, $s = (\overline{1, n})$ может привести в точках $t = \tau_s$ к переходу от действительных корней к комплексным. Поэтому, если хотя бы один коэффициент $a_s(t)$, $s = (\overline{0, n})$ обращается в нуль в интервале $[t_1, t_2]$, то нахождение всех корней уравнения (3.3.10) осуществляется на сетке значений параметра t , сформированной в интервале $[t_1, t_2]$ известными численными методами [1, 5].

Для случаев, когда все $\tau_s \notin [t_1, t_2]$, $s = (\overline{0, n})$ при формировании корней $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ рекомендуется использовать решения задач Коши вида:

$$\frac{dx_r}{dt} = -\frac{\sum_{s=0}^n \dot{a}_s(t)x_r^s}{\sum_{s=1}^n sa_s(t)x_r^{s-1}}, \quad t \in [t_1, t_2]; \quad (3.3.14)$$

$$x_r(t_1) = x_{r1}, \quad r = \overline{(1, R)}. \quad (3.3.15)$$

В этих выражениях использованы следующие обозначения:

$\dot{a}_s(t)$ – производные от коэффициентов уравнения (3.3.10),
 x_{r1} – r -й корень уравнения:

$$\sum_{s=0}^n a_s(t_1)x^s = 0. \quad (3.3.16)$$

Заметим, что из полученных действительных корней этого уравнения выбирается R корней, которые соответствуют решаемой практической задаче. При этом число корней уравнения (3.3.16) определяет степень многозначности искомой функции $x(t)$, $t \in [t_1, t_2]$.

Пример 3.8.

Пусть квадратное параметрическое уравнение, которое необходимо решить при $t \in [0, 5]$, имеет вид:

$$F(x, t) = (4t + 3) + 4(2t + 1)x + (t + 1)x^2 = 0. \quad (3.3.17)$$

Нетрудно убедиться, что все нули коэффициентов $a_s(t)$, $s = \overline{(0, 2)}$ лежат вне заданного интервала $[0, 5]$.

Решения уравнения (3.3.16) при $t = t_1 = 0$, которое конкретизируется с учетом (3.3.17) как:

$$3 + 4x + x^2 = 0,$$

имеют следующие значения:

$$x_1 = -3; \quad x_2 = -1.$$

Для формирования правых частей уравнений (3.3.14) определим частные производные выражения (3.3.17):

$$F'_t(x, t) = 4 + 8x + x^2;$$

$$F'_x(x, t) = 4(2t + 1) + 2(t + 1)x.$$

Тогда задача Коши (3.3.14), (3.3.15) примет вид:

$$\frac{dx_r}{dt} = -\frac{4 + 8x_r + x_r^2}{4(2t + 1) + 2(t + 1)x_r}, \quad r = \overline{(1, 2)};$$

$$x_1(0) = -3; \quad x_2(0) = -1.$$

Результаты численного решения этих задач приведены в Табл. 3.5 и на Рис. 3.4.

Таблица 3.5

t	x_1	x_2
0	-3	-1
0,5	-4,610	-0,723
1,0	-5,345	-0,655
1,5	-5,777	-0,623
2,0	-6,062	-0,605
2,5	-6,264	-0,593
3,0	-6,415	-0,585
3,5	-6,533	-0,578
4,0	-6,627	-0,573
4,5	-6,703	-0,570
5	-6,767	-0,566

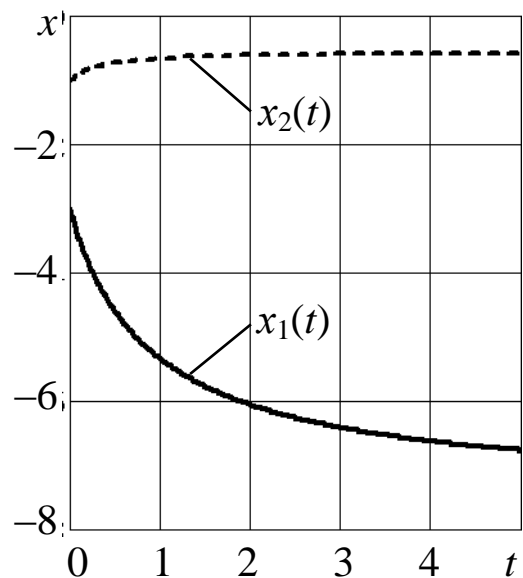


Рис. 3.4

Отметим, что их сравнение с точным методом построения корней $x_{1,2}(t)$ дало полное совпадение результатов.

Результаты построения оценки (3.3.11), которая конкретизируется как:

$$N(t) = 1 + \frac{4(2t + 1)}{t + 1}, \quad t \in [0, 5],$$

приведены в Табл. 3.6 и на Рис. 3.5.

Из сравнения данных Табл. 3.5 и Табл. 3.6 следует, что значения $|x_1(t)|$ и $|x_2(t)|$ лежат в заштрихованной области Рис. 3.5.

Таблица 3.6

t	$N(t)$
0	5,000
0,5	6,333
1,0	7,000
1,5	7,400
2,0	7,667
2,5	7,857
3,0	8,000
3,5	8,111
4,0	8,200
4,5	8,273
5	8,333

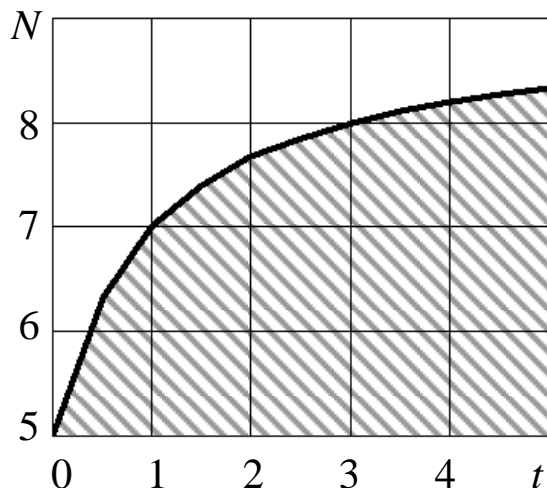


Рис. 3.5

3.4. Формирование закона изменения угла общего шага несущего винта беспилотного вертолета

В данном разделе будут использованы результаты применения рассмотренных методов к решению одной из задач управления беспилотным вертолетом [10, 20].

Сила тяги несущего винта (НВ) беспилотного вертолета (БВ) описывается выражением вида:

$$T_{\text{НВ}} = 0,5C_{\text{Т НВ}}\rho(\omega_{\text{НВ}}R_{\text{НВ}})^2\pi R_{\text{НВ}}^2. \quad (3.4.1)$$

В этой формуле использованы следующие обозначения:

$C_{\text{Т НВ}}$ – коэффициент силы тяги НВ;

$\rho = \rho(h)$ – плотность воздуха на высоте h полета БВ;

$\omega_{\text{НВ}}$ – угловая скорость вращения НВ вертолета;

$R_{\text{НВ}}$ – радиус лопастей НВ БВ.

Коэффициент $C_{\text{Т НВ}}$ силы тяги НВ, определенный экспериментальным путем, описывается зависимостью вида:

$$C_{\text{Т НВ}} = C_{\text{Т НВ}}(\varphi_{\text{ОШ}}), \quad \varphi \in [0, \varphi_{\text{ОШ, max}}], \quad (3.4.2)$$

где $\varphi_{\text{ОШ}}$ – общий шаг НВ, представляющий собой угол поворота каждой лопасти относительно ее горизонтальной оси.

Как показано в работе [20], наиболее точно зависимость (3.4.2) аппроксимируется полиномом с постоянными коэффициентами:

$$C_{T_{HB}}(\varphi_{OШ}) = a_1\varphi_{OШ} + a_2\varphi_{OШ}^2 + a_3\varphi_{OШ}^3. \quad (3.4.3)$$

Преобразуем выражение (3.4.1) к следующему виду:

$$a_1\varphi_{OШ} + a_2\varphi_{OШ}^2 + a_3\varphi_{OШ}^3 = \frac{2T_{HB}}{\rho(\omega_{HB}R_{HB})^2\pi R_{HB}^2}. \quad (3.4.4)$$

Для осуществления управляемого движения БВ необходимо изменять значение силы T_{HB} во времени [10, 20].

Будем считать, что методами, изложенными в этих работах, сформированы для каждого режима полета БВ законы:

$$T_{HB} = T_{HB}(t), \quad t \in [t_1, t_k]. \quad (3.4.5)$$

Здесь $[t_1, t_k]$ – интервал времени выполнения вертолетом рассматриваемого режима.

С учетом заданного закона (3.4.5) уточним выражение (3.4.4) как:

$$a_1\varphi_{OШ} + a_2\varphi_{OШ}^2 + a_3\varphi_{OШ}^3 = \frac{0,6369T_{HB}}{\rho\omega_{HB}^2R_{HB}^4}, \quad t \in [t_1, t_k].$$

Перепишем это выражение в виде кубического параметрического уравнения:

$$F(\varphi_{OШ}, t) = -a_0(t) + a_1\varphi_{OШ} + a_2\varphi_{OШ}^2 + a_3\varphi_{OШ}^3 = 0, \quad (3.4.6)$$

$$t \in [t_1, t_k],$$

в котором свободный член описывается функцией вида:

$$a_0(t) = \frac{0,6369T_{HB}(t)}{\rho(h(t))\omega_{HB}^2R_{HB}^4}. \quad (3.4.7)$$

Для формирования программного управления вертолетом необходимо найти закон изменения угла:

$$\varphi_{OШ} = \varphi_{OШ}(t), \quad t \in [t_1, t_k] \quad (3.4.8)$$

при заданных зависимостях $T_{HB}(t)$ и $h(t)$.

Заметим, что при этом изменение плотности воздуха, входящее в выражение (3.4.7), вычисляется по формуле вида [10]:

$$\rho(h(t)) = \rho_0 e^{-0,0001 h(t)}, \quad (3.4.9)$$

где $\rho_0 = 1,225 \text{ кг/м}^3$ – плотность воздуха на поверхности Земли.

Пример 3.9.

Сформируем программу $\varphi_{\text{ош}} = \varphi_{\text{ош}}(t)$ для перехода БВ из горизонтального полета на высоте $h = 100 \text{ м}$ со скоростью $72,2 \text{ м/с}$ в режим его висения. Данный маневр БВ реализуется на интервале $[t_1, t_k] = [0; 60] \text{ с}$.

При этом сила тяги НВ в Ньютонах должна изменяться при $t \in [0; 60] \text{ с}$ по следующему закону [20]:

$$T_{\text{НВ}}(t) = 1,951 \cdot 10^4 - 68,113t + 5,762t^2 - 0,196t^3 + 2,919 \cdot 10^{-3}t^4 - 1,593 \cdot 10^{-5}t^5. \quad (3.4.10)$$

График этой функции приведен на Рис. 3.6.

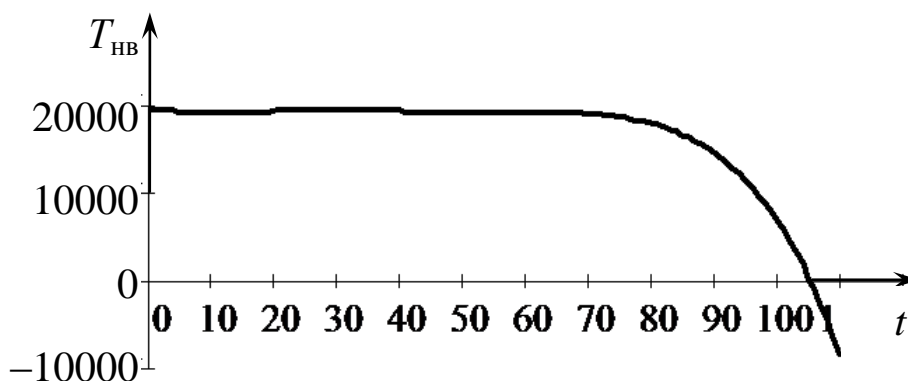


Рис. 3.6

Полином (3.4.3) конкретизируется как [20]:

$$C_{\text{ТНВ}} = 0,152\varphi_{\text{ош}} + 0,189\varphi_{\text{ош}}^2 - 0,527\varphi_{\text{ош}}^3, \quad (3.4.11)$$

где угол $\varphi_{\text{ош}}$ изменяется в пределах $[0; 30]$ град.

Из этой работы будем использовать следующие параметры НВ гипотетического БВ с массой $m = 1920 \text{ кг}$:

$$R_{\text{НВ}} = 5 \text{ м}; \quad \omega_{\text{НВ}} = 31,4 \text{ с}^{-1}.$$

С учетом этих параметров и значения $\rho(100) = 1,2128 \text{ кг/м}^3$, вычисленного по формуле (3.4.9), уточним вид функции (3.4.7):

$$a_0(t) = \frac{0,6369T_{\text{НВ}}(t)}{747357,68} = 8,5220 \cdot 10^{-7} \cdot T_{\text{НВ}}(t), \quad (3.4.12)$$

где $T_{\text{НВ}}(t)$ описывается полиномом вида (3.4.10).

Из Рис. 3.6 следует, что $\tau_0 \notin [0; 60] \text{ с}$.

Последнее означает, что для построения закона изменения общего шага НВ можно использовать задачу Коши (3.3.14), (3.3.15), которая решается на интервале времени $[0; 60] \text{ с}$.

Вычислим значения начальных условий (3.3.15) путем решения уравнения:

$$-8,522 \cdot 10^{-7} T_{\text{НВ}}(0) + 0,152\varphi_{\text{ош}} + 0,189\varphi_{\text{ош}}^2 - 0,527\varphi_{\text{ош}}^3 = 0.$$

Решая это уравнение известными методами [5], получаем следующие значения корней:

$$\varphi_{\text{ош}}^{(1)} = -0,446 \text{ рад.} = -25,567^\circ;$$

$$\varphi_{\text{ош}}^{(2)} = 0,1 \text{ рад.} = 5,752^\circ;$$

$$\varphi_{\text{ош}}^{(3)} = 0,704 \text{ рад.} = 40,363^\circ.$$

В связи с тем, что зависимость (3.4.10) была построена для $\varphi_{\text{ош}} \in [0, 30] \text{ град}$, первый и третий корни отбрасываем как практически незначимые. Поэтому будем решать указанные задачи для $R = 1$ при следующем начальном условии:

$$\varphi_{\text{ош}}(0) = 0,1.$$

Уравнение (3.3.14) применительно к представлению неявной функции $\varphi_{\text{ош}}(t)$ вида (3.4.6), (3.4.7) примет вид:

$$\frac{d\varphi_{\text{ош}}}{dt} = -\frac{5,805 \cdot 10^{-5} - 9,821 \cdot 10^{-6}t + 5,011 \cdot 10^{-7}t^2}{0,152 + 0,378\varphi_{\text{ош}} - 1,581\varphi_{\text{ош}}^2} + \frac{-9,950 \cdot 10^{-9}t^3 + 6,788 \cdot 10^{-11}t^4}{0,152 + 0,378\varphi_{\text{ош}} - 1,581\varphi_{\text{ош}}^2}. \quad (3.4.14)$$

Результаты интегрирования этого уравнения с начальным условием (3.4.13) при $t \in [0; 60]$ с. представлены в Табл. 3.7 и на Рис. 3.7.

Таблица 3.7

$t, \text{с}$	$\varphi_{\text{ош}}, \text{град}$
0	5,7295
6	5,6622
10	5,6528
12	5,6538
18	5,6662
24	5,6780
29	5,6813
30	5,6812
36	5,6764
42	5,6687
48	5,6640
50	5,6636
54	5,6641
56	5,6646
60	5,6632

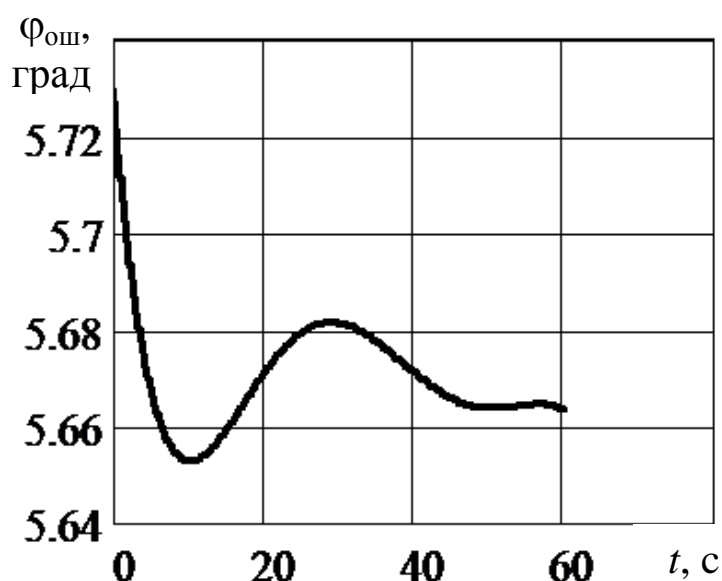


Рис. 3.7

Поведение полученной функции $\varphi_{\text{ош}}(t)$, $t \in [0; 60]$ с. показывает уменьшение угла поворота НВ на интервале времени $[0; 10,32]$, в котором начинается торможение БВ со скоростью $V(0) = 72,2$ м/с. Рост значения угла $\varphi_{\text{ош}}(t)$ при $t \in [10,32; 28,5]$ с. означает небольшой разгон вертолета. Далее в интервале $[28,5; 50,5]$ с. осуществляется процесс торможения БВ и незначительный разгон при $t \in [50,5; 57,8]$ с. Окончательное

торможение вертолета до скорости $V(60) = 0$ м/с производится в интервале $[57,8; 60]$ с.

Полученный характер изменения закона $\varphi_{\text{ош}}(t)$, $t \in [0, 60]$ с. полностью соответствует поведению такого высокоинерциального объекта, как БВ одновинтовой схемы.

Отметим, что в конечной точке рассматриваемого режима полета БВ при $t = 60$ с. вычисленная по формуле (3.4.10) тяга НВ принимает следующее значение:

$$T_{\text{нв}}(60) = 19247,220 \text{ Н},$$

которая при $\varphi_{\text{ош}}(60) = 5,6632^\circ$ полностью уравновешивает силу тяжести БВ, равную $G = mg = 19247,220$ Н.

В заключение главы заметим, что разработка эффективных численных методов решения нелинейных параметрических уравнений и систем таких уравнений требует дальнейших более детальных и глубоких исследований с обязательным привлечением прикладных задач науки и техники, в которых они могут найти применение.

Глава 4. АППРОКСИМАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью являются специальным классом обыкновенных дифференциальных уравнений. Такие уравнения возникают в прикладной механике, теории нелинейных колебаний [21], теории автоматического регулирования и управления [22], теории переключательных схем [23] и других областях математического моделирования (например, [24]). Краткий обзор их примеров приведен в первом разделе данной главы.

Следует отметить, что основные теоретические исследования в этой области посвящены уравнениям с разрывной правой частью по искомой переменной.

Другим замечанием является практически полное отсутствие численных методов решения этого важного класса дифференциальных уравнений.

В главе приводится один из подходов к численному интегрированию дифференциального уравнения с разрывной правой частью по независимой переменной. Системы с такой особенностью достаточно часто используются в математических моделях динамики полета и управления различных видов БЛА с дополнительными разгонными двигателями в составе их силовых установок [10, 16, 20].

4.1. Определение, свойства и примеры дифференциальных уравнений с разрывной правой частью

До 60-х годов XX века обыкновенные дифференциальные уравнения с разрывной правой частью изучались, главным образом, в следующих двух направлениях:

1. Для дифференциальных уравнений (и систем) с разрывной правой частью общего вида доказывались теоремы о существовании решения и исследовались основные свойства решений. Эти результаты связаны с обобщением понятия решения дифференциального уравнения и охватывают также тот случай, когда правая часть дифференциального уравнения разрывна во всех точках рассматриваемой области.

2. Для дифференциальных уравнений (и систем) с кусочно-непрерывной правой частью в ряде работ исследовалось поведение решений с качественной стороны. Решения таких уравнений состоят из кусков, каждый из которых проходит в области, где правая часть уравнения непрерывна, а иногда также из кусков, лежащих на границе двух областей непрерывности правой части. Применение такого подхода вызывает затруднения в тех случаях, когда в течение конечного промежутка времени решение бесконечное число раз попадает на линию (или поверхность) разрыва правой части рассматриваемого дифференциального уравнения.

Одной из первых отечественных работ по дифференциальным уравнениям с разрывной правой частью является монография [25].

В этой работе дается определение решения системы дифференциальных уравнений с разрывной правой частью и изучаются свойства таких решений (существование, продолжительность, единственность, непрерывная зависимость решения от начальных условий и правой части). При некоторых ограничениях обосновывается возможность применения к таким уравнениям основных методов качественной теории дифференциальных уравнений. Полученные результаты используются для исследования систем дифференциальных уравнений

с кусочно-непрерывной правой частью. Такой подход позволяет преодолеть затруднения, появляющиеся в тех случаях, когда решение не может быть составлено из конечного числа гладких кусков, и получить ряд новых результатов. В частности, для систем уравнений с кусочно-непрерывной правой частью при достаточно широких предположениях доказываются теоремы существования, продолжаемости, единственности и непрерывной зависимости решения при $t > t_0$ от начальных условий, заданных при $t = t_0$.

Как было отмечено выше, многие прикладные задачи механики, радиофизики, теории управления приводят к необходимости рассматривать дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями. Это требует обобщения понятия решения, которое рассматривалось при изучении уравнений с непрерывной правой частью [15]. В случае, когда правая часть уравнения $\dot{x} = f(x, t)$ непрерывна по x и разрывна по t , обычно удается сделать такое обобщение, основываясь на чисто математических соображениях (например, следует потребовать, чтобы решение было непрерывным) [26].

Ситуация существенно усложняется, когда правая часть уравнения разрывна по искомой переменной x . В таких случаях приходится учитывать прикладное содержание рассматриваемых уравнений и соответствующий содержательный смысл понятия решения.

Независимо от того, какого типа разрывы имеет функция f , обобщение понятия решения должно удовлетворять ряду принципиальных требований, среди которых важными являются следующие требования [26]:

1. Обобщение решения не должно противоречить понятию решения уравнения с непрерывной правой частью.

2. Вновь определенное понятие решения должно быть пригодным при решении достаточно широкого класса прикладных задач.

3. Для таких решений должны быть установлены теоремы существования и, возможно, единственности, а также разработаны способы построения приближенных решений.

4. Решения должны допускать естественные замены переменных.

Как известно, при доказательстве теоремы существования и единственности решения задачи Коши $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ с непрерывной правой частью используется тот факт, что эта задача эквивалентна интегральному уравнению:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds, \quad (4.1.1)$$

в котором интеграл понимается по Риману.

Если же в этом уравнении пользоваться интегралом Лебега и не предполагать непрерывность f по t , то можно расширить понятие решения (4.1.1) и доказать соответствующие теоремы существования и единственности, а также установить многие полезные для приложений свойства таких решений.

В работе [26] функция $f(t, x)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, которые формулируются следующим образом:

Пусть в области D переменных (t, x) выполняются условия:

1) функция $f(t, x)$ почти при всех t определена и непрерывна по x ;

2) функция $f(t, x)$ измерима по t при каждом x ;

3) существует суммируемая на каждом ограниченном отрезке $t_1 \leq t \leq t_2$ функция $m(t)$ такая, что $|f(t, x)| \leq m(t)$, при $(t, x) \in D$.

Уравнение $\dot{x} = f(t, x)$, в котором x – скаляр или вектор, а функция $f(t, x)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, называется уравнением Каратеодори.

Функция $x(t)$, определенная на интервале или отрезке T_s , называется решением уравнения Каратеодори, если она абсолютно непрерывна на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset T_s$ и почти всюду удовлетворяет уравнению Каратеодори. Аналогично при выполнении условий Каратеодори эта функция удовлетворяет интегральному уравнению:

$$x(t) = x(t_0) + \int_0^t f(s, x(s)) ds \quad (4.1.2)$$

при любом $t_0 \in T_s$.

В теории систем с разрывной правой частью должны учитываться как прикладные, так и чисто математические соображения. Эта теория обеспечивает возможность математического исследования указанных систем, т.е. включает стандартные теоремы существования решений, их продолжимости, теоремы качественной теории дифференциальных уравнений.

Пример 4.1.

Рассмотрим дифференциальное уравнение, у которого правая часть $f(t, x)$ является разрывной по t :

$$\dot{x} = \text{sign } t \quad (4.1.3)$$

Вид правой части этого уравнения представлен на Рис. 4.1,а. Поле направлений уравнения (4.1.3) приведено на Рис. 4.1,б.

Это уравнение с учетом Рис. 4.1,а конкретизируется следующим образом:

$$\dot{x} = \begin{cases} -1, & t < 0; \\ 0, & t = 0; \\ +1, & t > 0. \end{cases} \quad (4.1.4)$$

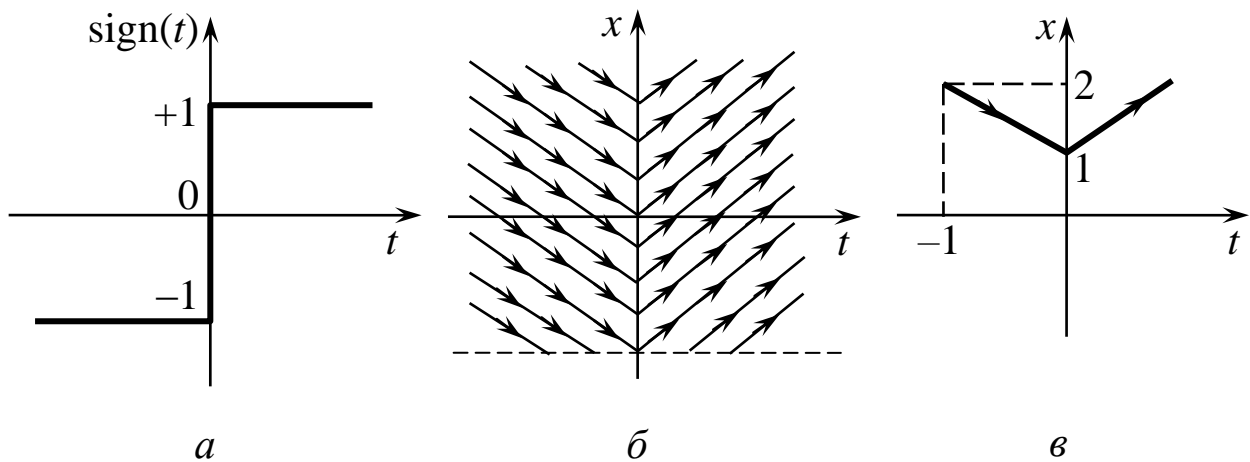


Рис. 4.1

Тогда для $t \in [t_1, 0)$ общее решение этого уравнения запишется как:

$$x_1(t) = -t + C_1. \quad (4.1.5)$$

Для $t = 0$ такое решение будет иметь вид:

$$x_2(t) = C_2,$$

где произвольная константа интегрирования $C_2 = 0$.

При $t \in (0, t_2]$ получим:

$$x_3(t) = t + C_3. \quad (4.1.6)$$

Для $t \in [t_1, t_2]$, где $t_1 < 0$, $t_2 > 0$ кусочно-непрерывное решение уравнения (4.1.3) будет состоять из функций (4.1.5) и (4.1.6). При этом в точке $t = 0$ производная $\dot{x}(t)$ терпит разрыв.

Пусть $t_1 = -1$ и начальное условие в задаче Коши имеет вид:

$$x(-1) = 2.$$

Тогда из выражения (4.1.5) получаем, что $C_1 = 1$. В этом случае имеем:

$$x_1(t) = 1 - t.$$

При $t = 0$ в выражении (4.1.6) полагаем $x_3(0) = x_1(0)$ и получаем, что $C_3 = 1$. Отсюда имеем решение уравнения (4.1.3) вида:

$$x(t) = \begin{cases} 1-t, & t \in [-1, 0]; \\ 1+t, & t \geq 0. \end{cases} \quad (4.1.7)$$

График этого решения представлен на Рис. 4.1,в.

Другая ситуация имеет место для уравнения:

$$\dot{x} = \text{sign } x.$$

Задача Коши для этого уравнения с начальным условием $x(0) = 0$ даже локально является неразрешимой.

Источником дифференциальных уравнений с разрывной правой частью в прикладной механике служат, например, механические системы с так называемым сухим трением.

Примером такой системы может служить тормозная колодка автомобиля и других движущихся объектов. Сила трения всегда направлена в сторону, противоположную скорости, и при переходе через нуль эта сила меняет знак на обратный. Зависимость силы трения от относительной скорости движения объекта качественно имеет вид, изображенный на рис. 4.2.

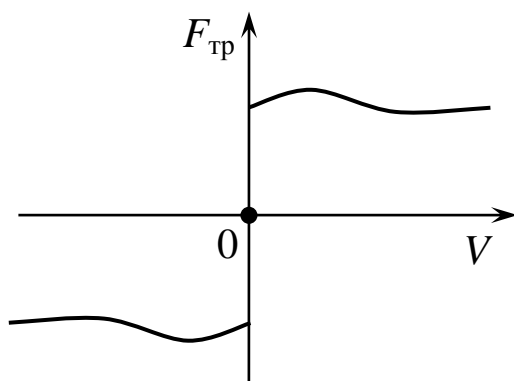


Рис. 4.2

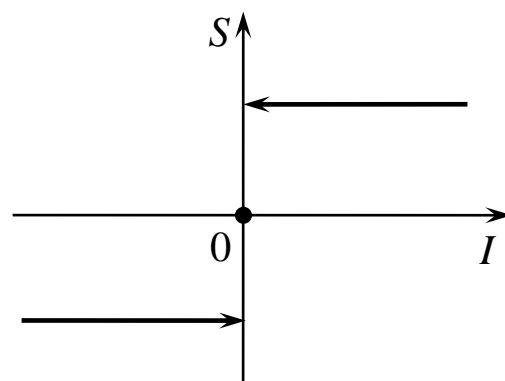


Рис. 4.3

В теории управления уравнения с разрывными правыми частями появляются, например, в классических системах, со-

державших механические или электронные реле (ключи). Идеализированная зависимость состояния реле от протекающего тока, имеет вид, приведенный на рис. 4.3.

Стремление повысить быстродействие системы автоматического управления, минимизировать энергетические затраты на управление, ограничить область возможных изменений регулируемых параметров и т.п. приводит к управляющим воздействиям в виде разрывных функций. В частности, к таким системам относятся системы с переменной структурой и со скользящими режимами [22, 27].

Пример 4.2.

В теории управления одной из простейших задач является задача управления движением материальной точки единичной массы по прямой, описываемым вторым законом Ньютона:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = u, \quad 0 < t < T, \quad (4.1.8)$$

где в качестве действующей силы u может фигурировать произвольная кусочно-непрерывная функция с разрывами первого рода, удовлетворяющая условию:

$$|u| < 1. \quad (4.1.9)$$

Например, в качестве функции u может быть выбрана непрерывная функция $u = \sin(\omega t)$, разрывная функция $u = \text{sign}(t - T/2)$ или любая другая кусочно-непрерывная функция. Важно, чтобы она имела конечное число точек разрыва первого рода и по модулю не превосходила единицы.

Решение уравнения (4.1.8), соответствующее конкретной функции $u = u(t)$ с точками разрыва t_1 и t_2 и удовлетворяющее начальным условиям:

$$x(0) = a; \quad \dot{x}(0) = b, \quad (4.1.10)$$

находится двукратным интегрированием уравнения:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = u(t), \quad 0 < t < T. \quad (4.1.11)$$

В результате получается функция вида:

$$x(t) = a + bt + \int_0^t (t-s)u(s)ds, \quad (4.1.12)$$

которая называется решением уравнения (4.1.8) с начальными условиями (4.1.10).

Это решение непрерывно, имеет непрерывную первую производную и удовлетворяет начальным условиям (4.1.10). Оно удовлетворяет также уравнению (4.1.11) во всех точках интервала $(0, T)$, кроме точек t_1 и t_2 , в которых решение $x = x(t)$ имеет лишь односторонние производные второго порядка.

Рассмотрим более сложную модель движения в виде нелинейного уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \quad t_0 < t < T, \quad (4.1.13)$$

в котором функция f непрерывна по совокупности переменных t, u, x и имеет непрерывную производную по x в некоторой ограниченной области изменения переменных t и x и при параметре u , удовлетворяющем условию (4.1.9). По теореме о непрерывной зависимости решения от параметра находим, что решение:

$$x = x(t, u) \quad (4.1.14)$$

уравнения (4.1.13) с начальным условием:

$$x(t_0) = x_0 \quad (4.1.15)$$

определено в некоторой окрестности точки t_0 и непрерывно зависит от u .

В качестве u возьмем произвольную кусочно-непрерывную функцию $u = u(t)$ с двумя точками разрыва t_1 и t_2 и удовлетворяющую условию (4.1.9), приведенную на Рис. 4.4.

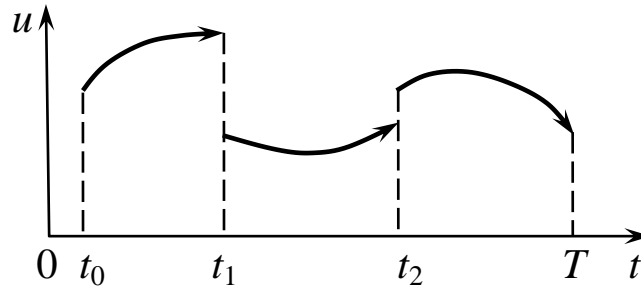


Рис. 4.4

С учетом этого необходимо получить решение уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u(t)), \quad t_0 < t < T. \quad (4.1.16)$$

Заметим, что функция $x = x(t, u(t))$, определяемая формулой (4.1.14), не является решением уравнения (4.1.16). Более того, функция $f(t, x, u(t))$ не удовлетворяет условиям теоремы Коши, так как она терпит разрыв по переменной t при $t = t_1$ и $t = t_2$. Поэтому решение задачи Коши (4.1.16), (4.1.15) определяется специальным образом.

В теории управления это делается продолжением решения по непрерывности. Сначала уравнение (4.1.16) рассматривается на интервале $t_0 < t < t_1$, где функция $u = u(t)$ непрерывна и, следовательно, уравнение удовлетворяет условиям теоремы Коши. Поэтому оно имеет решение:

$$x = x_0(t), \quad t_0 < t \leq t_1.$$

Пусть $x_1 = \lim_{t \rightarrow t_1-0} x_0(t)$. Обозначим через $x = x_1(t)$, $t_1 \leq t < t_2$,

решение задачи Коши:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u(t)), \quad t_1 < t < t_2, \quad x(t_1) = x_0.$$

Полагая $x_2 = \lim_{t \rightarrow t_2-0} x_1(t)$, аналогичным образом строим

решение $x = x_2(t)$ задачи Коши вида:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u(t)), \quad t_2 < t < T, \quad x(t_2) = x_1.$$

Тогда, по определению, решением задачи Коши (4.1.16), (4.1.15) является функция:

$$x(t) = \begin{cases} x_0(t), & t_0 \leq t < t_1; \\ x_1(t), & t_1 \leq t < t_2; \\ x_2(t), & t_2 \leq t < T. \end{cases}$$

Оно непрерывно на интервале $t_0 < t < T$, дифференцируемо всюду на этом интервале, за исключением точек $t = t_1$ и $t = t_2$, в которых оно имеет односторонние производные (Рис. 4.5). Во всех точках, где это решение дифференцируемо, оно удовлетворяет уравнению (4.1.16).

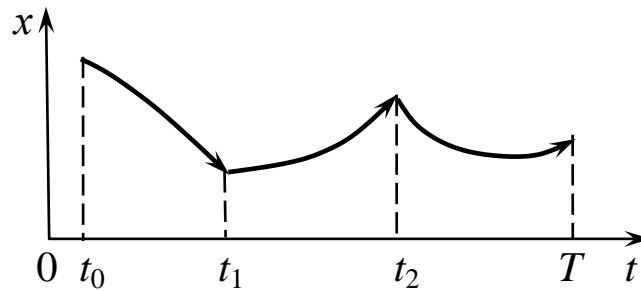


Рис. 4.5

Пример 4.3.

Рассмотрим дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + R\left(\frac{ds}{dt}\right) + k^2s = 0, \quad (4.1.17)$$

описывающее движение механической системы с «сухим» трением, в которой сила трения имеет вид:

$$R\left(\frac{ds}{dt}\right) = \begin{cases} P_0 & \text{при } \frac{ds}{dt} > 0; \\ -P_0 & \text{при } \frac{ds}{dt} < 0, \end{cases} \quad (4.1.18)$$

где P_0 и k – заданные положительные константы. Отметим, что величина силы сухого трения $R\left(\frac{ds}{dt}\right)$ не определена при значении $\frac{ds}{dt} = 0$.

Проведя замену $ds/dt = y$ и записав уравнение (4.1.17) в виде системы уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = -ky; \quad \frac{dy}{dt} = kx - \frac{P_0 \operatorname{sign}(y)}{k}, \quad (4.1.19)$$

имеем, что правая ее часть имеет разрыв по фазовой переменной y . Поэтому необходимо определить понятие решения системы уравнений (4.1.19) в окрестности линии $y = 0$, по которой происходит отмеченный разрыв.

Пример 4.4.

Пусть требуется минимизировать функционал:

$$J[u] = \int_0^1 x^2(t) dt$$

при ограничениях:

$$\frac{dx}{dt} = u; \quad x(0) = -1, \quad (4.1.20)$$

где в качестве u можно брать произвольную неотрицательную кусочно-непрерывную функцию $u = u(t)$ с точками разрыва только первого рода. Количество точек разрыва у каждой такой функции предполагается конечным.

Очевидно, что каждая из них однозначно определяет непрерывное решение задачи Коши (4.1.20), которое, будучи подставленным в функционал $J[u]$, определит некоторое его численное значение. Ясно также, что $J[u] > 0$ на каждом таком управлении, причем «идеальное» значение $J[u] = 0$ соответствует функции $x(t) = 0$. Такая функция является решением

рассматриваемого уравнения при $u(t) = 0$. Однако она не удовлетворяет начальному условию $x(0) = -1$. На других решениях дифференциального уравнения (4.1.20) при кусочно-непрерывном управлении $u(t)$ указанное «идеальное» значение функционала $J[u]$ не достигается.

Таким образом, применение теории переключательных (релейных) систем, реализация законов оптимального управления, моделей прикладной механики, радиофизики приводят к необходимости развития общей теории дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, для которых в общем случае неприемлемы методы классической теории дифференциальных уравнений.

Рассмотрим некоторые существующие численные методы решения таких уравнений.

В работе [24] предлагается применить метод Рунге-Кутты, который не только позволяет использовать переменный шаг интегрирования [5], но и «обходить» точки разрыва производных. Для этого все точки разрыва производных функции включаются в число точек интегрирования. Тогда на каждом шаге метода Рунге-Кутты имеем дело с функцией, производные которой до n -го порядка включительно непрерывны на интервале (t_i, t_{i+1}) и имеют конечные пределы на его концах соответственно справа и слева. При этом шаг $h_i = t_{i,k+1} - t_{i,k}$ является непостоянным, и основное воздействие на погрешность численного решения оказывает величина $H = \max\{t_{i,k+1} - t_{i,k}\}$. Если расставлять точки интегрирования, руководствуясь исключительно правилом $H < H^*$, то на маленьких шагах предлагаемого метода точки могут стоять неравномерно, поскольку интервалы между ними не будут влиять на величину H . Но при этом может накопиться ошибка

вычислений, связанная с попыткой многократного сложения величин, отличающихся на несколько порядков.

В работе [27] описан численный метод, предназначенный для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, фазовое пространство которых состоит из двух областей непрерывности поля направлений системы с общим участком гладкой границы, где реализуется скользящий режим. Для вычисления решения в скользящем режиме строятся две траектории по разные стороны от этой границы.

4.2. Вспомогательные функции численного метода решения разрывных дифференциальных уравнений

Для приближенного решения рассматриваемых дифференциальных уравнений с точностью до 5%, принятой в инженерных расчетах, будем использовать непрерывные аппроксимации ряда известных дискретных («ступенчатых») функций [8, 14].

Рассмотрим единичную функцию (функцию единичного скачка, функцию Хевисайда) вида:

$$1(t - t_p) = \begin{cases} 0, & t < t_p; \\ 0,5, & t = t_p; \\ 1, & t > t_p, \end{cases} \quad (4.2.1)$$

где t_p – точка разрыва аргумента решаемого дифференциального уравнения.

Вид этой функции представлен на Рис. 4.6.

Ряд свойств такой функции приведен в работе [14].

Для аппроксимации разрывной функции $1(t - t_p)$ построим непрерывную функцию:

$$E_1(t - t_p) = A + B \operatorname{arctg} C (t - t_p). \quad (4.2.2)$$

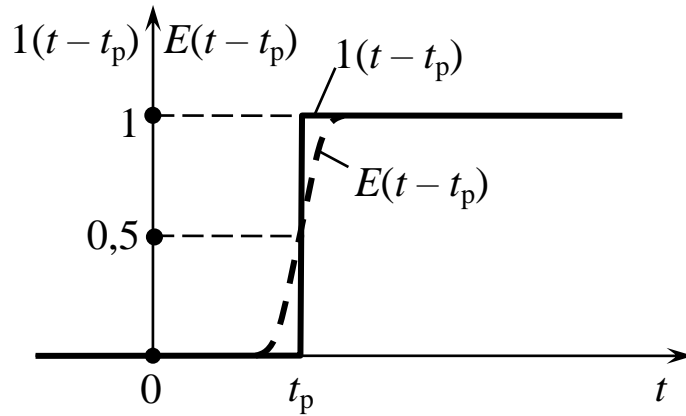


Рис. 4.6

Определим коэффициенты A , B , C этой аппроксимации. Потребуем, чтобы при $t = t_p$ выполнялось условие $E_1(0) = 0,5$. Тогда из (4.2.2) получаем, что:

$$A = 0,5. \quad (4.2.3)$$

Рассмотрим предел:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_1(t - t_p) = 0,5 + B \lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} C(t - t_p) = 1.$$

Из работы [8] следует, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \tau = \frac{\pi}{2}$. Тогда имеем:

$$0,5 + B \frac{\pi}{2} = 1.$$

Откуда значение параметра B определяется как:

$$B = \frac{1}{\pi}. \quad (4.2.4)$$

Потребуем, чтобы:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} E_1(t - t_p) = 0.$$

Используя приведенный выше подход, получаем уравнение вида:

$$0,5 + B \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Откуда получаем, что:

$$B = \frac{1}{\pi}. \quad (4.2.5)$$

Продифференцируем выражение (4.2.2) по t :

$$\dot{E}_1(t - t_p) = \frac{BC}{1 + (C(t - t_p))^2}.$$

При $t = t_p$ имеем:

$$\dot{E}_1(0) = BC. \quad (4.2.6)$$

Потребуем, чтобы:

$$\dot{E}_1(0) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right),$$

где ε – достаточно малый угол.

Тогда из (4.2.5) и (4.2.6) получаем, что:

$$C = \pi \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right). \quad (4.2.7)$$

Подставляя (4.2.3)-(4.2.5), (4.2.7) в выражение (4.2.2), получаем окончательный вид формируемой функции:

$$E_1(t - t_p) = 0,5 + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left[\pi(t - t_p) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right]. \quad (4.2.8)$$

Производная этой функции будет равна:

$$\dot{E}_1(t - t_p) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)}{1 + \left[\pi \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)(t - t_p)\right]^2}. \quad (4.2.9)$$

Отметим, что в приведенных в работе [14] непрерывных представлениях ступенчатых функций отсутствуют методы формирования их параметров.

Пример 4.5.

Рассмотрим вычисление функции (4.2.8) при $t \in [-10; 10]$ и $t_p = 0$ для следующих значений углов:

$$\varepsilon_1 = 2^\circ; \quad \varepsilon_2 = 1^\circ; \quad \varepsilon_3 = 0,5^\circ.$$

Результаты расчетов этой функции, приведенные в Табл. 4.2, показывают достаточную для практики точность аппроксимации функции (4.2.1) при угле $\varepsilon \in [0,5; 1]$ град.

Таблица 4.2

t	$E_1(t - t_p)$		
	$\varepsilon_1 = 2$	$\varepsilon_2 = 1$	$\varepsilon_3 = 0,5$
-10	$3,538 \cdot 10^{-4}$	$1,769 \cdot 10^{-4}$	$8,842 \cdot 10^{-5}$
-5	$7,076 \cdot 10^{-4}$	$3,537 \cdot 10^{-4}$	$1,768 \cdot 10^{-4}$
-3	$1,179 \cdot 10^{-3}$	$5,895 \cdot 10^{-4}$	$2,947 \cdot 10^{-4}$
-1	$3,538 \cdot 10^{-3}$	$1,769 \cdot 10^{-3}$	$8,842 \cdot 10^{-4}$
-0,50	$7,075 \cdot 10^{-3}$	$3,537 \cdot 10^{-3}$	$1,768 \cdot 10^{-3}$
-0,25	0,014	$7,073 \cdot 10^{-3}$	$3,537 \cdot 10^{-3}$
-0,15	0,024	0,012	$5,894 \cdot 10^{-3}$
-0,10	0,035	0,018	$8,840 \cdot 10^{-3}$
-0,05	0,070	0,035	0,018
-0,01	0,267	0,161	0,086
0	0,500	0,500	0,500
0,01	0,733	0,839	0,914
0,05	0,930	0,965	0,982
0,10	0,965	0,982	0,991
0,15	0,976	0,988	0,994
0,25	0,986	0,993	0,996
0,50	0,993	0,996	0,998
1	0,996	0,998	0,999
3	0,999	0,999	1
5	0,999	1	1
10	1	1	1

Рассмотрим аппроксимацию функции $\text{sign}(t - t_p)$, график которой приведен на Рис. 4.7.

На этом рисунке точка t_p определяет координату точки разрыва.

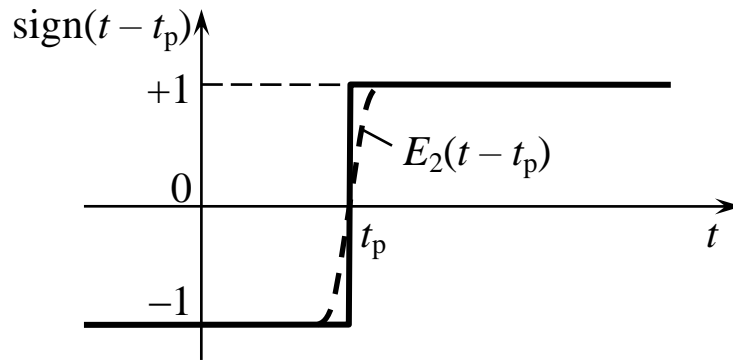


Рис. 4.7

Свойства функции $\text{sign}(x)$ приведены в работе [8].

Непрерывную аппроксимацию функции $\text{sign}(t - t_p)$ представим как:

$$E_2(t - t_p) = B \arctg C(t - t_p), \quad t \in [-\infty, +\infty]. \quad (4.2.10)$$

Параметр B в этом выражении определим из условия:

$$\lim_{t \rightarrow \mp\infty} E_2(t - t_p) = \mp 1.$$

Отсюда имеем, что:

$$B = \frac{2}{\pi}. \quad (4.2.11)$$

Производная от функции (4.2.10) по переменной t записывается как:

$$\dot{E}_2(t - t_p) = \frac{BC}{1 + (C(t - t_p))^2}. \quad (4.2.12)$$

Потребуем, чтобы ее значение при $t = t_p$ удовлетворяло условию:

$$\dot{E}_1(0) = BC = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right).$$

Откуда значение параметра C в выражении (4.2.10) определяется как:

$$C = \frac{\pi}{2} \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right). \quad (4.2.13)$$

Тогда аппроксимирующая функция (4.2.10) конкретизируется выражением вида:

$$E_2(t - t_p) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left[\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) (t - t_p) \right]. \quad (4.2.14)$$

Производная от этого выражения с использованием формул (4.2.11), (4.2.13) запишется как:

$$\dot{E}_2 = \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right)}{1 + \left[\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) (t - t_p) \right]^2}. \quad (4.2.15)$$

Пример 4.6.

Проведем анализ точности приближения значений функции (4.2.14) к $\operatorname{sign}(x - x_p)$ для $x \in [-10; 10]$, $x_p = 1$ и углов ε , принимающих следующие значения:

$$\varepsilon_1 = 0,5^\circ; \quad \varepsilon_2 = 0,1^\circ; \quad \varepsilon_3 = 0,01^\circ.$$

Результаты вычислительных экспериментов приведены в Табл. 4.3.

Из этой таблицы следует, что наилучшая аппроксимация достигается при угле $\varepsilon = 0,01^\circ$. График функции $E_2(x - 1)$ при таком значении ε представлен на Рис. 4.8.

Отметим, что в зависимости от решаемой практической задачи могут применяться аппроксимирующие функции $E_1(x - x_p)$ и $E_2(t - t_p)$, описываемые приведенными выше выражениями.

Таблица 4.3

x	$\varepsilon_1 = 0,5$	$\varepsilon_2 = 0,1$	$\varepsilon_1 = 0,01$
-10	-0,980	-0,996	-1,000
-8	-0,975	-0,995	-1,000
-6	-0,968	-0,994	-0,999
-4	-0,956	-0,992	-0,999
-2	-0,927	-0,986	-0,999
0	-0,787	-0,959	-0,996
2	0,787	0,959	0,996
4	0,927	0,986	0,999
6	0,956	0,992	0,999
8	0,968	0,994	0,999
10	0,975	0,995	1,000

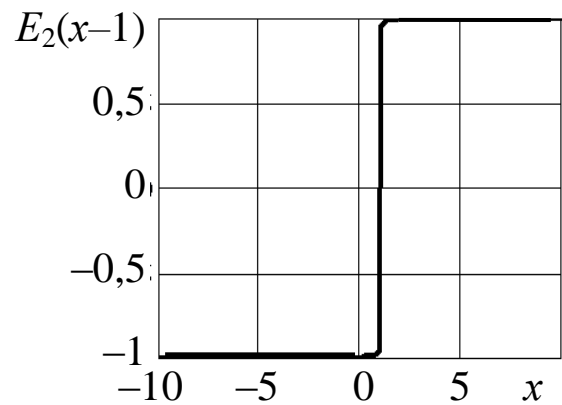


Рис. 4.8

4.3. Описание метода

Пусть требуется решить разрывное дифференциальное уравнение по аргументу t вида:

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x, t), & t \in [t_0, t_p]; \\ f_2(x, t), & t \in [t_p, t_k]. \end{cases} \quad (4.3.1)$$

с начальным условием:

$$x(t_0) = x_0. \quad (4.3.2)$$

Основная идея предлагаемого приближенного решения этой задачи состоит в таком преобразовании правых частей уравнения (4.3.1), которое позволяет построить интегральную кривую $x(t)$, $t \in [t_0, t_k]$ без разрыва ее производной в точке $t = t_p$.

Обозначим через $x_1(t)$ решение дифференциального уравнения:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, t), \quad t \in [t_0, t_p]$$

с начальным условием:

$$x_1(t_0) = x_0.$$

Соответственно будем считать, что функция $x_2(t)$ является решением уравнения:

$$\dot{x}_2 = f_2(x_2, t), \quad t \in [t_p, t_k]$$

с начальным условием:

$$x_2(t_p) = x_1(t_p).$$

Представленные выше задачи Коши для определения функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$ дают решение задачи (4.3.1), (4.3.2) с разрывом производной при значении $t = t_p$ (Рис. 4.9).

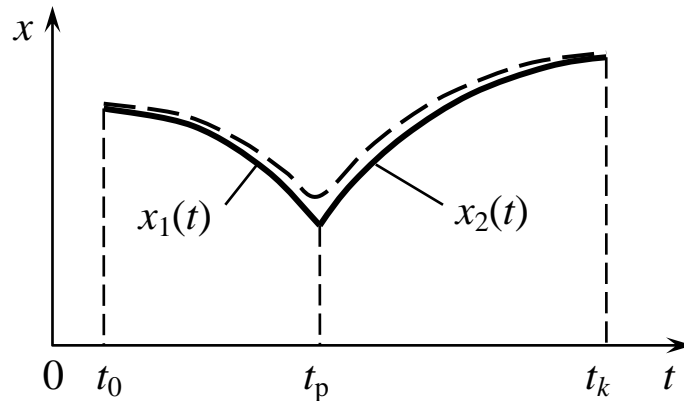


Рис. 4.9

На этом рисунке штриховой линией показано гладкое решение $x = x(t)$ уравнения (4.3.1), получаемое с помощью предлагаемого ниже метода.

Сформируем функцию вида:

$$\varphi(x, t) = (1 - E_1(t - t_p)) f_1(x, t) + E_1(t - t_p) f_2(x, t) \quad (4.3.3)$$

и будем рассматривать следующее классическое дифференциальное уравнение:

$$\dot{x} = \varphi(x, t), \quad t \geq t_0. \quad (4.3.4)$$

Для его практического решения в правую часть выражения (4.3.3) подставляется формула (4.2.8), либо к уравнению (4.3.4) добавляется дифференциальное уравнение вида:

$$\dot{E}_1(t - t_p) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)}{1 + \left[\pi \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)(t - t_p)\right]^2}. \quad (4.3.5)$$

с начальным условием:

$$E(t_0) = 0. \quad (4.3.6)$$

Далее к системе уравнений (4.3.3)-(4.3.5) с начальными условиями (4.3.2) и (4.3.6) применяют известные численные методы решения дифференциальных уравнений [5].

В некоторых случаях для выполнения практических расчетов можно использовать следующее преобразование выражений (4.3.3) и (4.3.4):

$$\dot{x} = f_1(x, t) + E_1(t - t_p)[f_2(x, t) - f_1(x, t)], \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (4.3.7)$$

Это дифференциальное уравнение с непрерывной правой частью интегрируется при начальном условии (4.3.2).

Заметим, что здесь значение t_p задано условиями решаемой практической задачи.

В приложениях часто требуется решать разрывные дифференциальные уравнения вида:

$$\dot{x} = \begin{cases} -f(x, t), & t \in [t_0, t_p); \\ +f(x, t), & t \in [t_p, t_k] \end{cases} \quad (4.3.8)$$

с начальным условием (4.3.2), в которых значение точки разрыва t_p определяется из соотношения:

$$x(t) = x_p(t), \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (4.3.9)$$

В этом уравнении функция $x_p(t)$ описывает линию переключения правых частей уравнения (4.3.8).

Для определения значения t_p будем решать задачу Коши вида:

$$\dot{x}_1 = -f(x, t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (4.3.10)$$

Тогда значение t_p определяется из решения уравнения (4.3.9), где в правой части использована функция $x_1(t)$.

После его определения применяется следующая непрерывная аппроксимация уравнений (4.3.8):

$$\dot{x} = f(x, t)E_2(t - t_p), \quad t \in [t_0, t_k], \quad (4.3.11)$$

где функция E_2 задается выражением (4.2.14).

Рассмотрим модельные примеры применения предлагаемых подходов.

Пример 4.7.

Пусть выражение (4.3.1) конкретизируется как:

$$\dot{x} = \begin{cases} x, & t \in [0, 1); \\ 2x, & t \in [1, 2]. \end{cases} \quad (4.3.12)$$

Это разрывное уравнение необходимо решать с начальным условием:

$$x(0) = 4.$$

График правых частей уравнения (4.3.12) при указанном начальном условии имеет вид, показанный на Рис. 4.10.

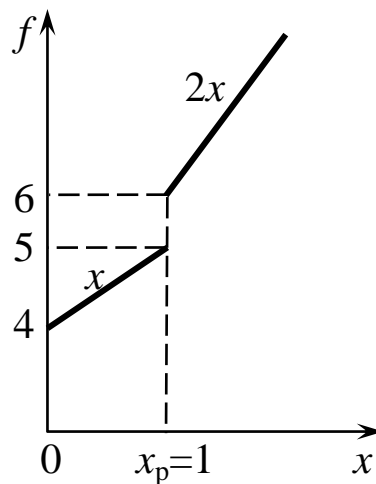


Рис. 4.10

Решая известными методами [15] уравнение:

$$\dot{x}_1 = x_1,$$

при заданном начальном условии, имеем:

$$x_1(t) = 4e^t, \quad t \in [0, 1]. \quad (4.3.13)$$

При $t = t_p = 1$ получаем начальное условие:

$$x_2(1) = x_1(1) = 4e \quad (4.3.14)$$

для второго уравнения вида:

$$\dot{x}_2 = 2x_2, \quad t \in [1, 2]. \quad (4.3.15)$$

Решая задачу Коши (4.3.14), (4.3.15), имеем:

$$x_2(t) = 4e^{2(t-0,5)}, \quad t \in [0, 2]. \quad (4.3.16)$$

Дифференциальное уравнение (4.3.7) и начальное условие (4.3.2) конкретизируются для $f_1(x,t) = x$ и $f_2(x,t) = 2x$ следующим образом:

$$\dot{x} = x \left[1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\pi \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - 0,5^\circ \right) (t-1) \right) \right) \right];$$

$$x(0) = 4.$$

Решение этой задачи Коши, а также результаты расчетов по формулам (4.3.13) и (4.3.16) приведены в Табл. 4.4.

Таблица 4.4.

t	x	x_1	x_2	Δ_1	Δ_2	δ
0	4	4	–	0	–	0
0,2	4,886	4,886	–	$-1,928 \cdot 10^{-5}$	–	$-3,946 \cdot 10^{-6}$
0,4	5,967	5,967	–	$-5,391 \cdot 10^{-5}$	–	$-9,033 \cdot 10^{-6}$
0,6	7,229	7,228	–	$-1,181 \cdot 10^{-4}$	–	$-1,620 \cdot 10^{-5}$
0,8	8,902	8,902	–	$-2,534 \cdot 10^{-4}$	–	$-2,846 \cdot 10^{-5}$
1	10,875	10,873	10,873	$-2,082 \cdot 10^{-3}$	$-2,082 \cdot 10^{-3}$	$-1,915 \cdot 10^{-4}$
1,2	16,221	–	16,221	–	$-4,617 \cdot 10^{-4}$	$-2,846 \cdot 10^{-5}$
1,4	24,199	–	24,199	–	$-3,921 \cdot 10^{-4}$	$-1,620 \cdot 10^{-5}$
1,6	36,100	–	36,100	–	$-3,261 \cdot 10^{-4}$	$-9,033 \cdot 10^{-6}$
1,8	53,855	–	53,855	–	$-2,125 \cdot 10^{-4}$	$-3,946 \cdot 10^{-6}$
2	80,342	–	80,342	–	$5,600 \cdot 10^{-9}$	$6,971 \cdot 10^{-11}$

В последних столбцах этой таблицы приведены значения абсолютных и относительных отклонений:

$$\Delta_i(t) = x_i(t) - x(t); \quad \delta_i(t) = \frac{\Delta_i(t)}{x_i(t)}, \quad i = \overline{(1, 2)}.$$

Анализ этих значений показывает высокую степень точности применяемой непрерывной аппроксимации в данном примере.

Рассмотрим примеры решения дифференциальных уравнений, содержащих функцию sign , которая аппроксимируется зависимостью $E_2(t - t_p)$.

Пример 4.8.

Пусть дано уравнение вида:

$$\dot{x} = \begin{cases} -x, & t \in [0, 2] \\ +x, & \end{cases} \quad (4.3.17)$$

с начальным условием:

$$x(0) = 2. \quad (4.3.18)$$

Представим уравнение (4.3.17) в виде:

$$\dot{x} = E_2(t),$$

где непрерывная функция $E_2(t)$ описывается формулой (4.2.14) при $t_p = 0$.

Это уравнение будем решать на интервале $[-1, +1]$ при начальном условии:

$$x(-1) = 2.$$

С учетом выражения (4.2.14) при $\varepsilon = 0,01^\circ$ и $t_p = 0$ решаемое уравнение конкретизируется как:

$$\dot{x} = \frac{2}{\pi} \arctg \left[\frac{\pi}{2} \text{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) \cdot t \right], \quad t \in [-1, +1].$$

В Табл. 4.5 и на Рис. 4.11 приведен фрагмент интегральной кривой $x(t)$ при $t \in [-0,1; +0,1]$.

Из полученных результатов следует, что при $t = 0$ значение $x(0) = 1,0245$, которое на 2,45% отличается от значения, определенного по формулам (4.1.7) и указанного на Рис. 4.1, в.

Пусть уравнение линии переключения правых частей уравнения (4.3.17) задается как:

$$x_p(t) = 1, \quad t \in [0, 2]. \quad (4.3.19)$$

Таблица 4.5

t	x
-0,10	1,109
-0,08	1,090
-0,06	1,071
-0,04	1,053
-0,02	1,036
0	1,025
0,02	1,036
0,04	1,053
0,06	1,071
0,08	1,090
0,10	1,109

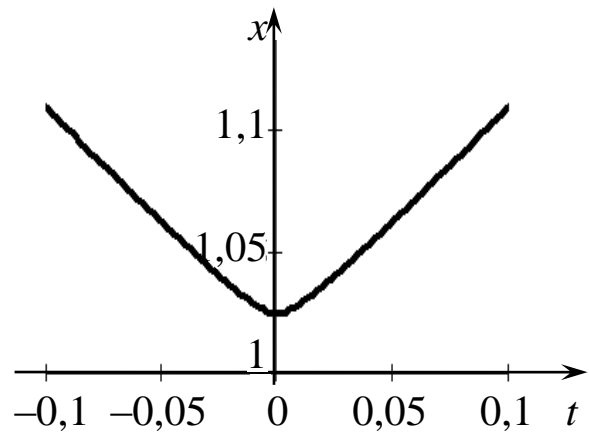


Рис. 4.11

Для определения точки разрыва t_p запишем задачу Коши вида:

$$\dot{x}_1 = -x_1; \quad x_1(0) = 2.$$

Решая эту задачу известными методами [15], имеем:

$$x_1(t) = 2e^{-t}. \quad (4.3.20)$$

Уравнение вида (4.3.9) с использованием выражений (4.3.19) и (4.3.20) конкретизируется следующим соотношением:

$$2e^{-t} = 1, \quad t \in [0, 2].$$

Решая это уравнение, получим, что:

$$t_p = \ln 2 = 0,633.$$

Дифференциальное уравнение вида (4.3.11) конкретизируется следующим выражением:

$$\dot{x} = x \left[\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left[\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) (t - 0,633) \right] \right], \quad t \in [0, 2]. \quad (4.3.21)$$

Результаты интегрирования этого уравнения с начальным условием (4.3.18) при $\varepsilon = 0,5^\circ$ приведены в Табл. 4.6 и на Рис. 4.12.

Таблица 4.6

t	x
0	2
0,2	1,640
0,4	1,345
0,6	1,107
0,8	1,121
1,0	1,364
1,2	1,662
1,4	2,027
1,6	2,474
1,8	2,019
2	3,685

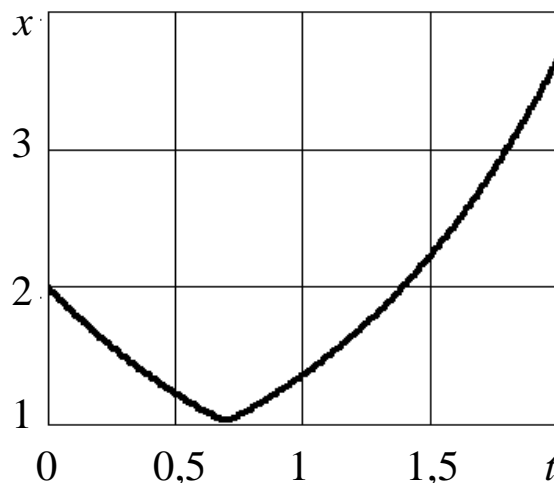


Рис. 4.12

Дополнительно в Табл. 4.7 и на Рис. 4.13 приведены значения интегральной кривой $x = x(t)$ при $t \in [0,6; 0,8]$ в окрестности точки разрыва. Эти данные показывают плавное изменение этой кривой без разрыва ее производной с достаточной для практики точностью.

Таблица 4.7

t	x
0,60	1,107
0,62	1,086
0,64	1,066
0,66	1,046
0,68	1,029
0,70	1,025
0,72	1,041
0,74	1,059
0,76	1,079
0,78	1,100
0,80	1,121

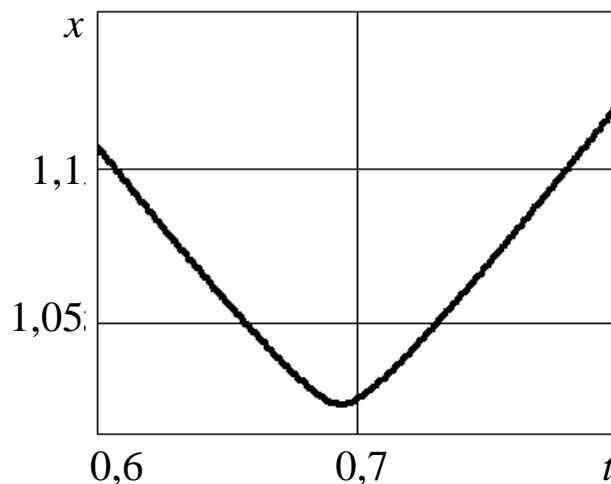


Рис. 4.13

4.4. Моделирование вертикального взлета беспилотного вертолета со стартовыми двигателями

Общие вопросы моделирования процессов взлета и посадки беспилотного вертолета (БВ) одновинтовой схемы были рассмотрены в монографии [16].

В данном разделе будет представлена упрощенная разрывная математическая модель вертикального взлета БВ, которая иллюстрирует практическое использование приведенного выше численного метода.

В предлагаемой модели взлета БВ рассматривается силовая установка перспективного вертолета, в которой в дополнение к его маршевому двигателю (МД) предлагается использовать два стартовых двигателя (СД), созданных на базе ракетных двигателей твердого топлива [10].

Отметим, что после завершения работы этих двигателей они сбрасываются (отстреливаются) и вертолет осуществляет остальные запланированные режимы полета с использованием только МД.

Такие модели не представлены в доступной отечественной и зарубежной литературе по беспилотной вертолетной технике.

Будем считать, что взлет БВ производится в выбранной стартовой системе координат (СК) [10].

Схема сил, действующих на БВ как на материальную точку постоянной и переменной массы при реализации режимов взлета вертолета без СД и со СД, приведена на Рис. 4.14,*а* и Рис. 4.14,*б*.

На этих рисунках использованы следующие обозначения: V – вектор скорости БВ; θ – угол наклона вектора V к горизонту; $T_{\text{нв}}$ – сила тяги несущего винта вертолета; $2P_{\text{сд}}$ – сила

тяги стартовых двигателей БВ; $X_{вр}$ – сила «вредного» сопротивления БВ; $G = mg$ – сила тяжести вертолета; y – текущая высота подъема БВ; $x_{0в}$ – координата дальности точки взлета БВ в стартовой СК.

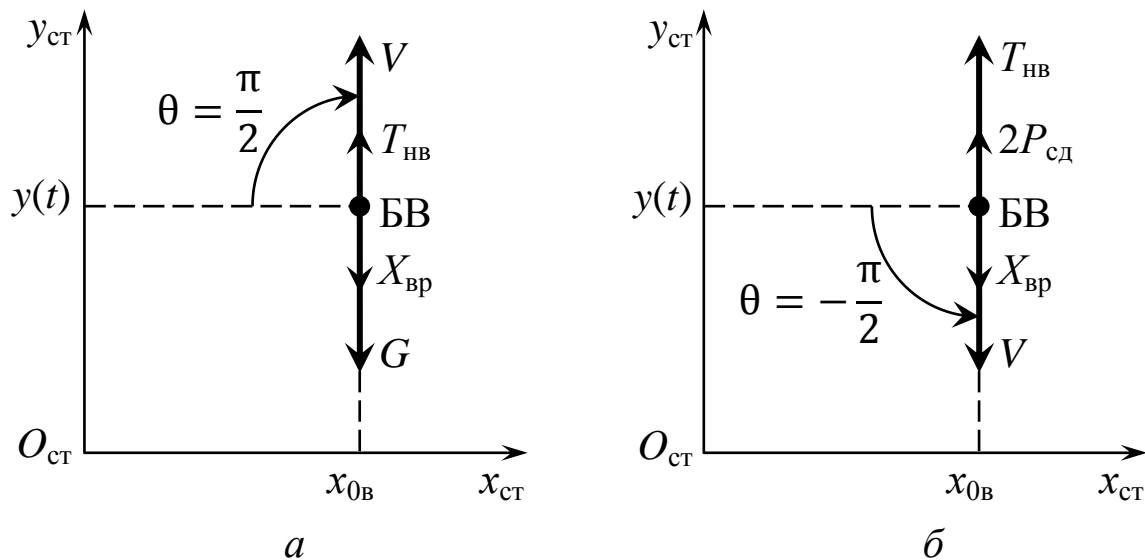


Рис. 4.14

Сформируем модели движения БВ на режимах вертикального взлета при отсутствии и наличии СД.

Используя схему сил, представленную на Рис. 4.14,а, запишем основные уравнения динамики взлета БВ без СД вида [20]:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{T_{нв} - 0,5\bar{c}_x\rho V^2 F_{нв}}{m} - g; \\ \dot{x} &= 0; \quad \dot{y} = V, \quad t \in [t_0, t_k]. \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

Здесь в первом уравнении системы использованы следующие обозначения: m – масса БВ; \bar{c}_x – коэффициент «вредного» сопротивления вертолета; $\rho = \rho(y)$ – плотность воздуха на высоте y ; $F_{нв}$ – площадь, ометаемая несущим винтом БВ.

Начальные условия для решения системы дифференциальных уравнений (4.4.1) записываются как:

$$V(t_0) = 0; \quad x(t_0) = x_{0в}; \quad y(t_0) = 0. \quad (4.4.2)$$

При описании режима взлета БВ, схема сил для которого приведена на Рис. 4.14,б, получаем следующую разрывную систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{V} = \begin{cases} \frac{T_{\text{HB}} + 2P_{\text{сд}} - 0,5\bar{c}_x\rho V^2 F_{\text{HB}}}{\bar{m}(t)} - g; & t \in [t_0, t_0 + \tau]; \\ \frac{T_{\text{HB}} - 0,5\bar{c}_x\rho V^2 F_{\text{HB}}}{m} - g; & t \in [t_0 + \tau, t_k]; \end{cases}$$

$$\dot{x} = 0;$$

$$\dot{y} = V. \quad (4.4.3)$$

Здесь $\bar{m}(t)$ – текущая масса БВ и работающих СД в момент времени $t \in [t_0, t_0 + \tau]$; τ – время работы этих двигателей.

Для этой системы также используются начальные условия вида (4.4.2).

Каждый из двух применяемых СД имеет следующие основные характеристики [10, 20]:

$m_{\text{кор}}$ – масса корпуса СД (кг); $m_{\text{зар}}$ – масса заряда двигателя (кг); μ – массовая скорость горения заряда (кг/с); τ – время работы СД (с).

При использовании этих параметров масса объекта «БВ + два СД», входящая в первое уравнение системы (4.4.3), будет изменяться во времени по следующему закону:

$$\bar{m}(t) = m + 2(m_{\text{кор}} + m_{\text{зар}} - \mu t), \quad t \in [t_0, t_0 + \tau]. \quad (4.4.4)$$

Первое уравнение системы (4.4.3) соответствует виду уравнения (4.3.1) при его следующей правой части:

$$f_1(V, y, t) = \frac{T_{\text{HB}} + 2P_{\text{сд}} - 0,5\bar{c}_x\rho V^2 F_{\text{HB}}}{m + 2(m_{\text{кор}} + m_{\text{зар}} - \mu t)} - g; \quad t \in [t_0, t_0 + \tau]; \quad (4.4.5)$$

$$f_2(V, y) = \frac{T_{\text{HB}} - 0,5\bar{c}_x\rho V^2 F_{\text{HB}}}{m} - g; \quad t \in [t_0 + \tau, t_k] \quad (4.4.6)$$

с точкой разрыва $t_p = \tau$, которая соответствует моменту времени окончания работы и сброса СД.

Классическое уравнение вида (4.3.4) с правой частью в форме выражения (4.3.3) в нашем случае конкретизируется как:

$$\dot{V} = (1 - E_1(t - \tau))f_1(V, y, t) + E_1(t - \tau)f_2(V, y), \quad (4.4.7)$$

где $E_1(t - \tau)$ – непрерывная аппроксимация функции единичного скачка $1(t - \tau)$, описываемая выражением (4.2.8).

Таким образом, с использованием соотношений (4.4.5)-(4.4.7), (4.2.8) система уравнений (4.4.3) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\pi \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) (t - \tau) \right) \right] \times \\ & \times \left[\frac{T_{\text{НВ}} + 2P_{\text{сд}} - 0,5\bar{c}_x \rho_0 \exp(-0,0001y) V^2 F_{\text{НВ}} - g}{m + 2(m_{\text{кор}} + m_{\text{зар}} - \mu t)} \right] + \\ & + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\pi \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) (t - \tau) \right) \right] \times \\ & \times \left[\frac{T_{\text{НВ}} - 0,5\bar{c}_x \rho_0 \exp(-0,0001y) V^2 F_{\text{НВ}} - g}{m} \right], \\ \dot{x} = & 0; \quad \dot{y} = V, \quad t \in [t_0, t_k]. \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

Эта система интегрируется одним из существующих численных методов на заданном интервале $[t_0, t_k]$ при начальных условиях (4.4.2).

Пример 4.9.

Рассмотрим некоторый гипотетический БВ со следующими характеристиками [20]:

$$\begin{aligned} m = 1962 \text{ кг}; \quad T_{\text{НВ}} = 27612,5 \text{ Н}; \\ \bar{c}_x = 0,0955; \quad F_{\text{НВ}} = 78,5 \text{ м}^2. \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

На вертолете установлены два стартовых ускорителя (СД) с параметрами [20]:

$$m_{\text{кор}} = 50 \text{ кг}; \quad m_{\text{зар}} = 30 \text{ кг}; \quad \mu = 7,5 \text{ кг/с}; \quad (4.4.10)$$

$$P_{\text{сд}} = 8000 \text{ Н}; \quad \tau = 4 \text{ с.}$$

Решим с помощью моделей его вертикального взлета вида (4.4.1) и (4.4.8) задачу определения моментов времени $t = t_k$ достижения вертолетом без СД и со СД высоты $y_{\text{зад}} = 1000 \text{ м}$. При этом для простоты вычислений будем считать, что $t_0 = 0 \text{ с}$.

Отметим, что в применяемых моделях используется следующая стандартная зависимость плотности воздуха от высоты [16]:

$$\rho = \rho_0 e^{-0,0001y}, \quad y \leq 11000 \text{ м}, \quad (4.4.11)$$

где $\rho_0 = 1,225 \text{ кг/м}^3$ – плотность воздуха на поверхности Земли.

Начальное условие (4.4.2) конкретизируем как:

$$V(0) = 0 \text{ м/с}; \quad x(0) = 500 \text{ м}; \quad y(0) = 0 \text{ м}. \quad (4.4.12)$$

В Табл. 4.8 и на Рис. 4.15 приведены результаты решения системы (4.4.1) при исходных данных (4.4.9), (4.4.11), (4.4.12).

Таблица 4.8

$t, \text{ с.}$	$V, \text{ м/с}$	$x, \text{ м}$	$y, \text{ м}$
0	0	500	0
2	8,422	500	8,478
4	16,215	500	33,265
6	22,930	500	72,613
8	28,377	500	124,133
10	32,594	500	185,297
12	35,752	500	253,802
14	38,070	500	327,746
16	39,755	500	405,660
18	40,982	500	486,460
20	41,885	500	569,372
22	42,563	500	653,851
24	43,087	500	739,522
26	43,505	500	826,128
28	43,851	500	913,493
30	44,149	500	1002,00

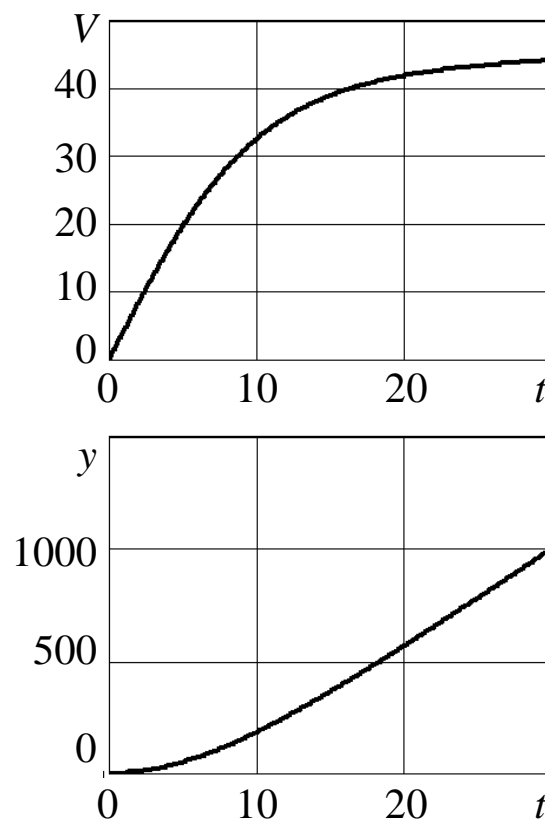


Рис. 4.15

Из этой таблицы следует, что требуемая высота подъема БВ без СД достигается при $t_k(1000) = 30$ с.

Решение системы уравнений (4.4.8) при исходных данных (4.4.9)-(4.4.12) представлены в Табл. 4.9 и на Рис. 4.16.

Таблица 4.9

$t, \text{с.}$	$V, \text{м/с}$	$x, \text{м}$	$y, \text{м}$
0	0	500	0
4	39,282	500	82,477
8	41,311	500	244,075
12	42,451	500	411,797
16	43,175	500	583,139
20	43,712	500	756,954
24	44,167	500	932,730
28	44,588	500	1110
30	44,793	500	1200

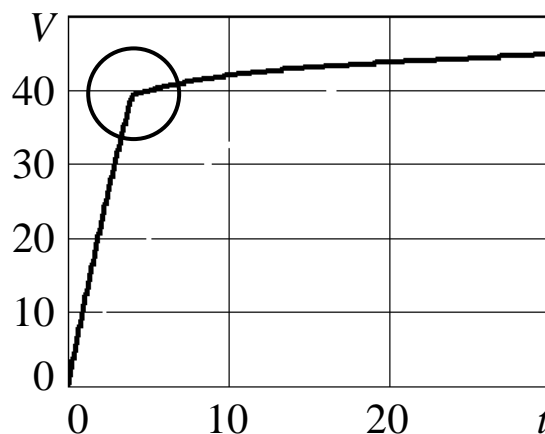


Рис. 4.16

Из полученных числовых результатов следует, что $t_k(1000) \approx 25$ с. График на Рис. 4.17 показывает сглаженность точки разрыва производной скорости при $t = 4$ с. и $\varepsilon = 0,5^\circ$.

Таблица 4.10

$t, \text{с.}$	$V, \text{м/с}$	$y, \text{м}$
3,950	38,851	80,493
3,975	39,046	81,467
4	39,224	82,445
4,025	39,262	83,426
4,050	39,284	84,408
4,075	39,304	85,391
4,100	39,322	86,373

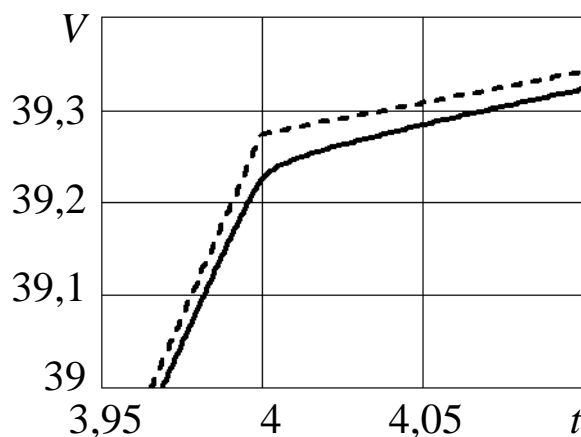


Рис. 4.17

При этом согласно Табл. 4.10, среднее значение скоростей при $t = 3,95$ с. и $t = 4,05$ с. отличается от значения $V(4) = 39,224$ м/с на 0,179%, что вполне приемлемо для инженерных расчетов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вычислительная математика, которая имеет современное название «численные методы», является обязательным компонентом применения вычислительной (компьютерной) техники в различных сферах человеческой деятельности.

Огромных успехов в нашей стране она достигла в 50-70-е годы прошлого века при решении сложнейших с научно-технической точки зрения атомной, ракетной и космических проблем.

К сожалению, в настоящее время развитие численных методов резко затормозилось в силу ряда объективных причин. К важнейшей из таких причин можно отнести массовое засилье импортной компьютерной техники совместно с «закрытым» программным обеспечением. Другая причина состоит в отсутствии сложных практически значимых научно-технических и других задач, требующих для их решения разработки эффективных алгоритмов численных методов.

На наш взгляд, для последующего развития вычислительной математики необходимо для решения будущих важных научно-технических, социальных и экономических задач формулировать ее неклассические задачи и разрабатывать для них эффективные численные методы и алгоритмы с ориентацией на существующие и перспективные образцы компьютерной техники.

Список литературы

1. *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1966. – 664 с.
2. *Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З.* Численные методы анализа. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 368 с.
3. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1966. – 631 с.
4. *Самарский А.А.* Введение в численные методы. М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1987. – 288 с.
5. *Вержбицкий В.М.* Основы численных методов. М.: Высшая школа, 2002. – 840 с.
6. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматлит, 2001, т. 2. – 662 с.
7. *Калашников А.Л., Потемкин Г.В., Филиппов В.Н.* Методические указания к решению задач на интегралы с параметром. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2016. – 52 с.
8. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и студентов ВТУЗов. М.: Наука, 1981, – 723 с.
9. *Моисеев В.С., Моисеева Л.Т.* Численный метод решения нелинейных уравнений, содержащих интеграл, зависящий от параметра // Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева, 2017, №1. – С. 148-151.
10. *Моисеев В.С.* Беспилотные вертолеты. Современное состояние и перспективы развития. Казань: Редакционно-издательский центр (РИЦ) «Школа», 2019. – 596 с. (Серия «Современная беспилотная вертолетная техника»).
11. *Пойа Д.* Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание. М.: Наука, 1976. – 448 с.
12. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматлит, 2001, т. 1. – 607 с.
13. *Горбунов Д.А., Моисеев В.С.* Основы прикладной теории неявных математических моделей и методов. Казань: РИЦ «Школа», 2012. – 172 с. (Серия «Современная прикладная математика и информатика»).
14. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Лань, 2003. – 832 с.

15. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. – 425 с.
16. *Моисеев В.С.* Прикладная теория управления беспилотными летательными аппаратами: монография. Казань: Республиканский центр мониторинга качества образования, 2013. – 768 с. (Серия «Современная прикладная математика и информатика»).
17. *Новоселов С.И.* Специальный курс элементарной алгебры. М.: Учпедгиз, 1962. – 280 с.
18. *Колосов А.В.* Уравнения и неравенства с параметром. Орел: 2013. – 96 с.
19. *Моисеев В.С., Горбунов Д.А., Комиссарова Е.М., Гущина Д.С.* Численные методы решения параметрических уравнений // Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева, 2004, №4. – С. 27-33.
20. *Моисеев В.С.* Динамика полета и управление беспилотными летательными аппаратами. Казань: РИЦ «Школа», 2017. – 416 с. (Серия «Современная прикладная математика и информатика»).
21. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Наука, 1981. – 914 с.
22. *Уткин В.И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981. – 368 с.
23. *Айзерман М.А., Пятницкий Е.С.* Основы теории разрывных систем // Автоматика и телемеханика, 1974, №7. – С. 33-47; №8. – С. 39-61.
24. *Белых Л.Н., Асаченков А.Л.* Моделирование инфекционных заболеваний. – В кн.: Вычислительные процессы и системы / Вып. 3. М.: Наука, 1985.
25. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Матем. сб., 1960. Т. 51 (93), №1. – С. 99-128.
26. *Егоров А.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. – 2-е изд., испр. М.: Физматлит, 2005. – 384 с.
27. *Коробицын В.В., Фролова Ю.В.* Алгоритм вычисления скользящего режима для системы с гладкой границей разрыва // Вычислительные технологии, т. 15, №2, 2010. – С. 52-68.
28. *Воднев В.Т., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф.* Основные математические формулы. Справочник. Минск: Вышэйшая школа, 1988. – 269 с.

Виктор Сергеевич Моисеев
Лия Тагирджановна Моисеева

**НЕКОТОРЫЕ НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ**

Подписано к печати 20.02.2020

Формат 60×84^{1/16}. Бумага офсетная.

Гарнитура «Times». Печать цифровая.

Усл. печ. 10,23 л. Печ. 11 л. Тираж 100 экз. Заказ № 26.

420111, Казань, Дзержинского, 9/1. Тел. сот.: +7(917)264-84-83.

Отпечатано с готового оригинал-макета
в редакционно-издательском центре «Школа»

E-mail: ric-school@yandex.ru